

Visita aos Conceitos de Modelo Chaveado, Médio e de Pequenos Sinais de um Conversor CC-CC^{*}

Eubis P. Machado^{*} Adeon C. Pinto^{*} Jadsonlee S. Sá^{**}
Ricardo M. Prates^{*} Rodrigo P. Ramos^{*} Wedson P. Silva^{*}
Flávio B. Costa^{***} José Bione de Melo Filho^{****}
Alex Coutinho Pereira^{****}

^{*} Colegiado de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Vale do São Francisco - Univasf, Juazeiro, Brasil, (e-mail: {eubis.machado, adeon.pinto, ricardo.prates, rodrigo.ramos, wedson.silva}@univasf.edu.br)

^{**} Colegiado de Engenharia da Computação, Universidade Federal do Vale do São Francisco - Univasf, Juazeiro, Brasil, (e-mail: jadsonlee.sa@univasf.edu.br)

^{***} Electrical and Computer Engineering Department, Michigan Technological University, Michigan, US, (e-mail: fbcosta@mtu.edu)

^{****} Companhia Hidro Elétrica do São Francisco - Chesf, Recife, Brasil, (e-mail: {jbionef, alexcp}@chesf.gov.br)

Abstract: This paper, as part of the activities developed in the scope of a R&D+I, a review is carried out the fundamentals of switched, average and small-signal models of DC-DC converters, in order to provide clear and objective concepts. Starting from a PWM modulator, the concepts of the switching function and its Fourier series decomposition are presented to obtain the switched model of a converter. Based on the averaging operator, the averaged model and its stationary states are defined, which are the starting point for linearization of the converter. Writing the state and output vectors in the form of multivariable functions, the Taylor series is used to obtain the small-signal and linearized models of the converter. The results of the numerical solutions, their analysis and conclusions reveal the characteristics and applications of the models.

Resumo: Neste trabalho, como parte das atividades desenvolvidas no âmbito de um P&D+I, é realizada uma visita aos fundamentos dos modelos chaveado, médio e de pequenos sinais de conversores CC-CC, a fim de propiciar conceitos claros e objetivos. A partir de um modulador PWM, são apresentados os conceitos relativos à função de chaveamento e sua decomposição em série de Fourier para obter o modelo chaveado de um conversor. Baseado no operador de média, é definido o modelo médio e seus estados estacionários, os quais são o ponto de partida para linearização do conversor. Expressando os vetores de estados e de saída na forma de funções multivariáveis, utiliza-se a série de Taylor para obter os modelos a pequenos sinais e linearizado do conversor. Os resultados das soluções numéricas, suas análises e conclusões evidenciam as características e aplicações dos modelos.

Keywords: Distributed generation; Photovoltaic system; Modeling; Linearization; Computer simulation.

Palavras-chaves: Geração distribuída; Sistema fotovoltaico; Modelagem; Linearização; Simulação computacional.

1. INTRODUÇÃO

Na realização de simulações computacionais de sistemas fotovoltaicos, muitas vezes é necessário usar modelos de componentes e sistemas de vários níveis de complexidade, a depender do tipo de estudo realizado, a saber: transitórios eletromagnéticos ou estudos de planejamento da geração.

^{*} Os autores agradecem o apoio financeiro da Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL e da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco – CHESF por meio do Convênio 22/20 (CVI-1-80.2020.0010.00) no âmbito do Programa de P&D ANEEL.

Nos estudos de transitórios eletromagnéticos, geralmente são utilizados modelos tipo EMT (*Electromagnetic Transients*), pois estes são capazes de incorporar níveis significativos de detalhes do elemento em análise e, por isso, são mais complexos do que os demais tipos de modelo (Chiniforoosh et al., 2010). Não obstante, são inadequados para estudos em grande escala de tempo, sobretudo, por exigirem pequenos passos de solução, na ordem de dezenas de microssegundos ou mesmo nanossegundos, a depender do tipo de fenômeno a ser investigado. Os desafios na realização de estudos computacionais supracitados levaram ao

desenvolvimento dos chamados modelos dinâmicos de valor médio ou AVM (*Average-Value Models*) que se aproximam do sistema original, em termos de média, dentro de um período de comutação (Maksimovic et al., 2001b). Os modelos de conversores para estudos de planejamento geralmente são do tipo AVM, os quais são computacionalmente eficientes e permitem que simulações, em uma janela de tempo da ordem de horas, sejam possíveis de ser realizadas em computadores pessoais. Além disso, as entradas de dados e o pós-processamento são menos onerosos, quando comparados aos estudos do tipo EMT.

Diferentes estruturas de conversores CC-CC vêm sendo utilizadas na literatura para integrar o primeiro estágio de potência de inversores de dois estágios (Forouzesh et al., 2017; Zapata et al., 2019; Raghavendra et al., 2020). A seleção de uma dada estrutura está associada aos níveis de tensão do barramento CC do inversor, da tensão disponível na *string* do gerador fotovoltaico e das características relacionadas à eficiência do conversor. Contudo, por questão de simplicidade e por se tratar de um conversor base para sistemas fotovoltaicos de dois estágios (Xiao et al., 2007; Femia et al., 2004; Viinamäki et al., 2015), neste trabalho será utilizado um conversor CC-CC não isolado para efetivação de uma visita aos conceitos essenciais que permitem um entendimento detalhado dos modelos chaveado, médio e de pequenos sinais que, atualmente, vêm sendo requisitados nos estudos de sistemas fotovoltaicos conectados à rede para o concebimento de estudos de transitórios eletromagnéticos, controle, operação e planejamento de sistemas de energia.

2. MODULADOR PWM REGULADO POR TENSÃO

Assumindo que as chaves do conversor CC-CC sejam controladas por PWM (*Pulse-Width Modulation*), um elemento comparador é usado para correlacionar o sinal resultante da ação de controle do compensador (sinal de controle), v_{con} , com uma onda dente de serra ou uma onda triangular, v_{port} , denominada portadora. Como resultado da comparação entre aqueles sinais, uma função de chaveamento, sinal $q(t)$, é gerada na saída do elemento comparador, tal como apresentado na Figura 1.

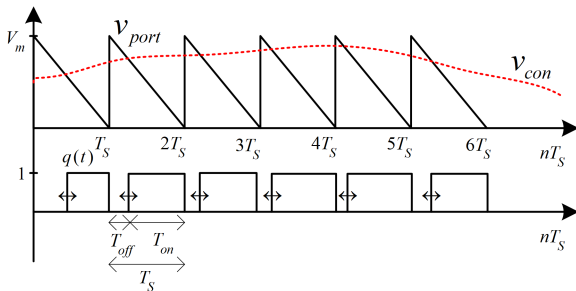


Figura 1. Análise de um modulador PWM.

Matematicamente, a função de chaveamento pode ser expressa por:

$$q(t) = \frac{1}{2} (\text{sign}(v_{con} - v_{port}) + 1), \quad (1)$$

sendo sign uma função que apresenta saída ± 1 dependendo da diferença entre v_{con} e v_{port} . De forma qualitativa:

$$q(t) = \begin{cases} 1 & \text{(chave ligada:) se } v_{con} \geq v_{port} \\ 0 & \text{(chave desligada:) se } v_{con} < v_{port} \end{cases} \quad (2)$$

O método PWM com frequência constante geralmente é utilizado no controle de conversores comutados, isso porque nas estratégias de modulação com frequência variável os harmônicos gerados são imprevisíveis, portanto difíceis de serem eliminados (Smedley, 1996). Além disso, os componentes do circuito conversor devem ser capazes de tolerar estresses devido a grandes variações na frequência de operação. Nota-se que, embora a largura do pulso da função de chaveamento seja alterada em função da tensão de controle, a frequência de chaveamento do conversor é mantida constante, pois as bordas ascendentes dos pulsos continuam equidistantes. Em outras palavras, as bordas ascendentes presentes na saída do modulador PWM ocorrem em instantes fixos no tempo, enquanto a posição da borda descendente é modulada pelo sinal de controle.

Uma segunda estratégia de modulação pode ser definida utilizando-se uma onda dente serra invertida (decrecente) como portadora (Lai and Smedley, 1998). Nesse caso, a borda descendente presente na saída PWM ocorre em instantes fixos no tempo, enquanto a posição da borda ascendente é modulada segundo o sinal de controle. As estratégias de modulação de frequência constante por borda ascendente e descendente são empregadas em conversores CC-CC, embora a primeira seja mais comum em circuitos integrados comerciais. A combinação de ambas também tem sido investigada para realizar o controle de conversores mais sofisticados (González et al., 2017). Do ponto de vista de dinâmica, os dois tipos de modulação diferem pouco em baixas frequências, mas podem apresentar características diferentes em altas frequências, conforme respostas em frequência apresentadas em Sable et al. (1991).

Assumindo a modulação sincronizada pela borda ascendente, durante um período de comutação T_s , o modulador PWM apresenta na sua saída nível lógico alto durante o intervalo de tempo T_{on} e nível lógico baixo durante o intervalo $T_{off} = T_s - T_{on}$. Considerando o k -ésimo período de comutação, a razão entre T_{on}^k e T_s é definido como o k -ésimo ciclo de trabalho:

$$d_k \triangleq \frac{T_{on}^k}{T_s}, \quad \text{para } \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (3)$$

portanto, a média móvel depende do tempo de condução no k -ésimo ciclo de comutação. De modo análogo, a razão entre T_{off}^k e T_s é definida por:

$$d'_k \triangleq \frac{T_{off}^k}{T_s} = \frac{T_s - T_{on}^k}{T_s} = 1 - d_k, \quad (4)$$

sendo d'_k o complemento do ciclo de trabalho. Portanto,

$$\begin{cases} T_{on}^k &= d_k T_s \\ T_{off}^k &= (1 - d_k) T_s \end{cases} \quad (5)$$

Note que $0 \leq d_k \leq 1$ e que o período de comutação do conversor, T_s , corresponde ao período da portadora.

Na Figura 2, tem-se uma representação gráfica da função de chaveamento, $q(t)$, e de seu complemento, $q(t)'$, levando-se em consideração os períodos de comutação, de condução, de bloqueio e do ciclo de trabalho. Por inspeção, percebe-se que as funções de $q(t)$ e $q(t)'$ são periódicas, apresentam período arbitrário T_s definido pela portadora

3. MODELO CHAVEADO

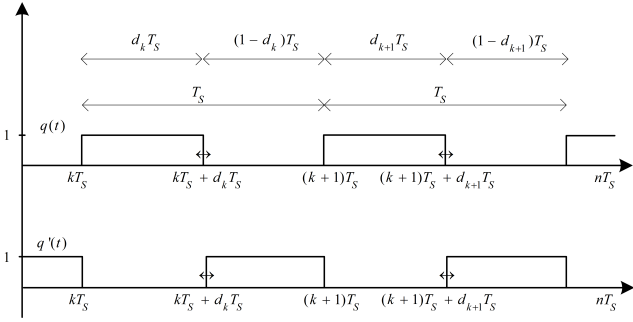


Figura 2. Funções de chaveamento $q(t)$ e $q'(t)$ na saída do modulador PWM com sincronização pelas bordas de subida.

e são sincronizadas pelas bordas de subida e descida, respectivamente.

Matematicamente, as funções de chaveamento apresentadas na Figura 2 podem ser expressas por:

$$q(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } kT_s \leq t \leq (k + d_k)T_s \\ 0 & \text{para } (k + d_k)T_s \leq t \leq (k + 1)T_s \end{cases} \quad (6)$$

$$q'(t) = 1 - q(t) . \quad (7)$$

Por serem periódicas, as funções de chaveamento podem ser decompostas em série de Fourier, por exemplo, usando a representação (Oppenheim et al., 2010):

$$q(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \theta_n) , \quad (8)$$

em que a_0 e A_n são os coeficientes da série de Fourier e $\omega = 2\pi/T_s$ a frequência angular da portadora.

O coeficiente a_0 é denominado componente CC ou médio de $q(t)$, sendo expresso por:

$$a_0 = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} q(t) dt . \quad (9)$$

Apenas a fração de ciclo em que $q(t) = 1$ irá contribuir para a integral, assim:

$$a_0 = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{kT_s + d_k T_s} q(t) dt = d_k . \quad (10)$$

Calculando os demais coeficientes da série de Fourier, a função $q(t)$ pode ser expressa por (Wood, 1981):

$$q(t) = d_k + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi d_k)}{n} \cos(n\omega t - n\omega t_0) . \quad (11)$$

Assumindo o caso particular em que o sinal de controle seja mantido constante, o que equivale ao conversor operar com malha de controle desabilitada, a componente CC de $q(t)$ é constante e correspondente ao ciclo de trabalho de regime:

$$d_k = D_{cc} . \quad (12)$$

No caso geral, a tensão de controle é variante no tempo, pois corresponde a uma ação de controle do compensador com o intuito de rejeitar perturbações para o conversor. Assim, levando-se em consideração essa natureza, a função $q(t)$ não apresenta um comportamento bem definido, pois os estados de condução e bloqueio não são constantes nas operações em malha fechada. Tal comportamento dificulta o desenvolvimento de estudos analíticos, sendo mais conveniente empregar o conceito de modelo médio.

O conversor utilizado nas análises é alimentado por uma fonte de corrente ideal, a qual se aproxima de um modelo de gerador fotovoltaico, para um ponto estacionário de operação, portanto, para uma condição de irradiância e temperatura constantes. Na saída do conversor, faz-se presente uma fonte de tensão constante que representa o barramento CC do inversor, isso porque os inversores fotovoltaicos comerciais regulam a tensão dos seus barramentos (Femia et al., 2009). Embora o modelo do tipo EMT não seja atrativo para estudos de simulação de longa duração, este é imprescindível para transparência no processo de obtenção do modelo médio. Na descrição das equações que caracterizam o modelo, emprega-se o circuito da Figura 3.

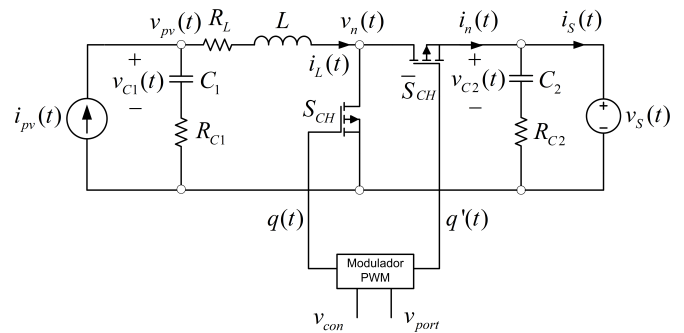


Figura 3. Conversor de interligação entre gerador fotovoltaico e barramento CC.

Aplicando técnicas convencionais de análise de circuitos elétricos àquele ilustrado na Figura 3, considerando que as chaves S_{CH} e \bar{S}_{CH} operam de forma complementar, é possível expressar a seguinte equação na forma canônica no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) . \quad (14)$$

Em que:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_{pv}(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L + R_{C1}}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{C2}C_2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_{C1}}{L} & -\frac{1 - q(t)}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{C2}C_2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} -R_{C1} & 1 & 0 \\ 1 - q(t) & 0 & \frac{1}{R_{C2}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} R_{C1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{C2}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} i_{pv}(t) \\ v_S(t) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

sendo $\dot{\mathbf{x}}(t) \triangleq \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ e $q(t)$ o sinal PWM que regula a condução das chaves controladas do circuito.

Devido à natureza descontínua e variante no tempo da função de chaveamento $q(t)$, sua presença em $\mathbf{B}(t)$ e $\mathbf{C}(t)$ propicia ao processo de conversão de energia estas mesmas características. Tais atributos dificultam a obtenção de relações algébricas que permitem quantificar o desempenho em regime permanente do processo, pois inviabiliza a obtenção de um modelo linear, uma vez que não possui estados estacionários.

4. MODELO MÉDIO

Para contornar as descontinuidades inerentes à função PWM, pode-se aplicar um método de inclusão diferencial (Filippov, 1988), o qual permite análises aproximadas através da suavização de oscilações de alta frequência. Sistemas dinâmicos cujas trajetórias podem não ser diferenciáveis em todos os lugares são também reportados como *sistemas dinâmicos não suaves* (di Bernardo et al., 2008). Geralmente, tais sistemas são investigados através de conceitos de *inclusões diferenciais*, *sistemas de complementaridade* e *inequações variacionais* (Filippov, 1988; Vidyasagar, 1993).

Tomar o modelo médio é um método de inclusão diferencial que permite análises aproximadas através da suavização das oscilações de alta frequência presentes em sistemas dinâmicos não lineares e descontínuos. A técnica de média de Krylov-Bogolyubov foi a primeira teoria de aproximação de um sistema dinâmico descontínuo por uma versão média. Embora não seja a única ferramenta matemática, ela fundamentou o desenvolvimento do conceito de modelo médio aplicado aos conversores chaveados.

Segundo Wester (1972), a média móvel de um sinal $g(t)$ no intervalo de um período T_s pode ser obtida pelo método operacional:

$$\langle g(t) \rangle_{T_s} \triangleq \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t g(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Esse conceito de média foi difundido na comunidade científica e na indústria através de Middlebrook and Cuk (1976), o qual apresenta procedimentos que permitem representar conversores CC-CC em termos de média móvel.

Empregando o conceito do operador de média, a função de chaveamento no k -ésimo período de comutação possui valor médio (Wester, 1972; Maksimovic et al., 2001a):

$$\langle q(t) \rangle_{T_s} \triangleq \frac{1}{T_s} \int_{t_0}^{t_0+T_s} q(\tau) d\tau = d_k, \quad (23)$$

conforme destaca a Figura 4. Logo, movendo o intervalo de análise ao longo dos k períodos de comutação, o ciclo de trabalho pode ser interpretado como média móvel ou local de $q(t)$, assumindo a forma contínua $d(t)$.

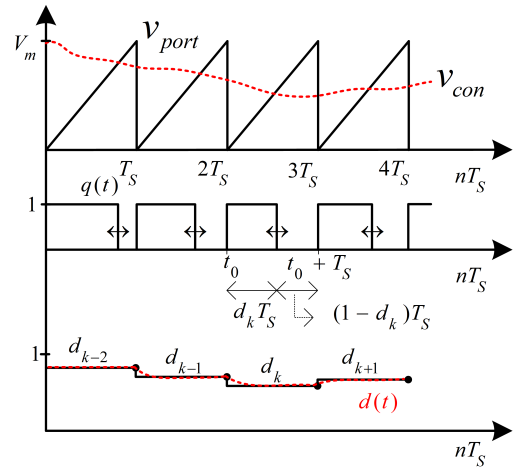


Figura 4. Sinais do modulador PWM para análise do valor médio da função de chaveamento.

Utilizando o conceito de operador de ⟨média⟩, os vetores $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ da representação de um sistema dinâmico no espaço de estados podem ser expressos por:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (24)$$

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (25)$$

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{y}(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Como o operador $\frac{d}{dt}$ é linear, o vetor diferencial de estado $\langle \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle_{T_s}$ corresponde à operação:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle_{T_s} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{x}(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo (13) em (27),

$$\langle \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} [\mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)] d\tau. \quad (28)$$

De modo análogo, substituindo (14) em (26) tem-se:

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} [\mathbf{C}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\tau)] d\tau, \quad (29)$$

sendo possível notar que o operador de média deve operar sobre um produto de fatores variantes no tempo.

Sejam $g(t)$ e $f(t)$ variáveis dinâmicas do sistema. Considerando que apresentam natureza quasi-contínua durante um ciclo de comutação do conversor, é possível definir a propriedade do produto (Wester, 1972; Caliskan et al., 1999; Gao, 2015):

$$\langle f(t)g(t) \rangle_{T_s} \triangleq \langle f(t) \rangle_{T_s} \langle g(t) \rangle_{T_s}. \quad (30)$$

Logo, assumindo que $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ sejam suaves durante o período T_s , a aplicação da propriedade do produto às Equações (28) e (29) permite expressar o seguinte modelo médio no espaço de estados:

$$\langle \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle_{T_s} = \mathbf{A} \langle \mathbf{x}(t) \rangle_{T_s} + \langle \mathbf{B}(t) \rangle_{T_s} \langle \mathbf{u}(t) \rangle_{T_s} \quad (31)$$

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle_{T_s} = \langle \mathbf{C}(t) \rangle_{T_s} \langle \mathbf{x}(t) \rangle_{T_s} + \mathbf{D} \langle \mathbf{u}(t) \rangle_{T_s}. \quad (32)$$

Em que,

$$\langle \mathbf{B}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{B}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} R_{C1} & -\frac{1-d(t)}{L} \\ \frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{C2}C2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\langle \mathbf{C}(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \mathbf{C}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} -R_{C1} & 1 & 0 \\ 1-d(t) & 0 & \frac{1}{R_{C2}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

O modelo médio é conduzido por matrizes que são função do ciclo de trabalho, $d(t)$, o qual, por hipótese, apresenta natureza suave dado a característica de média. Contudo, por se tratar de um sinal vinculado a uma ação de controle, apresenta a natureza variante no tempo em sistemas que operam em malha fechada.

O modelo médio proporciona simulações muito mais eficientes do conversor do que aquelas obtidas usando o modelo comutado definido por (13) e (14), isso presumindo que apenas médias locais das variáveis sejam de interesse. Embora seja tratado em termos de média móvel, o modelo é não linear e constitui um ponto de partida conveniente para o projeto de controladores não lineares, conforme investiga (Banerjee and Verghese, 2001). Contudo, no presente trabalho, o modelo do conversor será linearizado em torno de um ponto de operação, resultando em equações diferenciais lineares no domínio do tempo ou funções de transferências no domínio da frequência, ambas indispensáveis à implementação de técnicas de controle linear.

4.1 Ponto de Operação Estacionário

Para realizar a linearização do conversor, é necessário que o mesmo esteja operando em um ponto de equilíbrio, portanto, excitado com entradas constantes. Assumindo que no instante t_0 o sistema opera em condição estacionária, as derivadas dos estados são nulas e os estados de equilíbrio do sistema (\mathbf{x}_e), para um ciclo de trabalho $d(t_0) = d_e$ e entradas constantes $\mathbf{u}_e = [I_{pv} \ V_s]^T$, correspondem à solução do sistema matricial:

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{x}_e \rangle + \langle \mathbf{B}(t_0) \rangle \langle \mathbf{u}_e \rangle, \quad (35)$$

a qual pode ser expressa por:

$$\langle \mathbf{x}_e \rangle = \begin{bmatrix} I_{pv} \\ V_s(1-d_e) + I_{pv}R_L \\ V_s \end{bmatrix}. \quad (36)$$

A primeira e a última igualdade podem ser verificadas, facilmente, por inspeção do circuito da Figura 3, pois na condição em regime, os capacitores estão carregados e, portanto, a corrente nesses elementos é nula. Já a segunda igualdade não pode ser verificada por uma simples inspeção do circuito.

Em operações em malha fechada, o ciclo de trabalho corresponde a uma ação de controle do algoritmo de MPPT (*Maximum Power Point Tracking*), atuando sob o estado de condução e bloqueio das chaves do conversor. Logo, $d(t)$ deve ser interpretado como uma entrada do sistema, o qual passa a assumir a forma não linear, pois algumas variáveis aparecem na forma de um produto. Não obstante, as equações são continuamente diferenciáveis, o que admite a linearização do modelo médio e, por

consequente, a obtenção das funções de transferência, as quais permitem análises de resposta em frequência do sistema e facilitam as implementações dos sistemas de controle.

Substituindo $\langle \mathbf{x}_e \rangle$ em (32), as grandezas de saída do sistema na condição operação estacionária são da forma:

$$\langle \mathbf{y}_e \rangle = \begin{bmatrix} V_s(1-d_e) + I_{pv}R_L \\ I_{pv}(1-d_e) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Na forma apresentada, fica evidente que, para uma condição estática das entradas V_s e I_{pv} , a tensão terminal da fonte de corrente e a corrente injetada no barramento CC podem ser controladas, exclusivamente, pelo ciclo de trabalho.

5. MODELO DE PEQUENOS SINAIS

Para realizar a linearização do modelo canônico no espaço de estados, por conveniência, serão adotadas as seguintes substituições de variáveis, a saber:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} i_{pv}(t) \\ v_s(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_{pv}(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \doteq H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \doteq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (41)$$

Nas novas variáveis do sistema, o vetor de estados e de saídas podem ser expressos, respectivamente, nas seguintes formas de função multivariável:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}(-x_1(R_L + R_{C1}) + x_2 + R_{C1}u_1 - (1-u_3)u_2) \\ \frac{1}{C1}(-x_1 + u_1) \\ \frac{1}{R_{C2}C2}(-x_3 + u_2) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -R_{C1}x_1 + x_2 + R_{C1}u_1 \\ (1-u_3)x_1 + \frac{-u_2 + x_3}{R_{C2}} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

A linearização de $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ pode ser estabelecida a partir da expansão em série de Taylor e truncada na aproximação de primeira ordem em torno de um ponto de operação estacionário ($\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e$), a saber:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong F(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \mathbf{J}_{F_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{F_u}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}}, \quad (44)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong H(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \mathbf{J}_{H_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{H_u}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}}. \quad (45)$$

Em que:

- $F(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ e $H(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$: Funções multivariáveis correspondentes ao vetor de estados e de saída em condição estacionária, respectivamente;
- $\mathbf{J}_{F_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $\mathbf{J}_{H_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$: Jacobianos de $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em relação aos elementos do vetor \mathbf{x} , respectivamente;
- $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_e]$: Vetor de perturbações das variáveis de estados;

- $\mathbf{J}_{F_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $\mathbf{J}_{H_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$: Jacobiano de $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em relação aos elementos do vetor \mathbf{u} , respectivamente;
- $\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{u} - \mathbf{u}_e]$: Vetor de perturbações nas entradas.

Cada variável de estado x_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, apresenta um valor estacionário x_{ie} de modo que:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_{ie})}{dt} = \frac{d\tilde{x}_i}{dt}. \quad (46)$$

Não obstante, em (44), a função $F(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$, pois as derivadas dos estados são nulas na condição estacionária de operação. Logo, em termos de pequenos sinais, (44) pode ser representada na forma:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}_{F_X}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{F_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}}, \quad (47)$$

cujos jacobianos em $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ são da forma:

$$\mathbf{J}_{F_X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{R_L + R_{C1}}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{C2}C_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{F_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{C1} & 1 - u_{3e} & 1 - u_{2e} \\ \frac{1}{C_1} & L & L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{C2}C_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez inserida uma perturbação, $\tilde{\mathbf{u}}$, na entrada do modelo de pequenos sinais, a solução em $\tilde{\mathbf{x}}$ corresponde à perturbação do modelo médio no espaço de estados, $\langle \mathbf{x} \rangle$, em torno do ponto de operação estacionário \mathbf{x}_e . Logo, as variáveis de estados do modelo linearizado são da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{x}}. \quad (50)$$

O vetor de saídas do espaço de estados linearizado é dado (45), pois já se observa a sobreposição da componente estacionária, $H(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$, e da resposta à perturbação:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{H_X}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{H_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}}, \quad (51)$$

cujos jacobianos no ponto estacionário $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ são:

$$\mathbf{J}_{H_X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$= \begin{bmatrix} -R_{C1} & 1 & 0 \\ (1 - u_{3e}) & 0 & \frac{1}{R_{C2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{H_U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{C1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{C2}} & -x_{1e} \end{bmatrix}.$$

6. SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS

Utilizando modelos confiáveis e configurações de simulação apropriadas, as simulações computacionais são muito adequadas para investigar o desempenho de sistemas para diferentes cenários de operação. A fim de propiciar uma correta condução das simulações dos modelos investigados, nesta seção será apresentada uma técnica de solução numérica das equações de estado, bem como um procedimento para seleção do passo de integração das equações.

Com o sistema de processamento de energia representado no espaço de estados, diferentes técnicas podem ser utilizadas para solucionar as equações diferenciais (Boyce and Prima, 2010). A partir de um algoritmo de integração numérica, conhecendo o estado inicial $\mathbf{x}(t - \Delta t)$ e a entrada $\mathbf{u}(t)$, obtém-se a trajetória do sistema no espaço de estados simplesmente integrando o vetor de estados:

$$\int_{t-\Delta t}^t d\mathbf{x}(\tau) = \int_{t-\Delta t}^t [\mathbf{A} \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau)] d\tau. \quad (54)$$

Utilizando a regra de integração trapezoidal, as variáveis de estados correspondem à solução do sistema linear:

$$\mathbf{Q} \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t), \quad (55)$$

em que:

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right] \quad (56)$$

$$\mathbf{H}(t) = \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right] \mathbf{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}(t - \Delta t)\mathbf{u}(t - \Delta t)]. \quad (57)$$

Em estudos do tipo EMT, para uma boa prática de simulação, faz-se necessário que o analista tenha conhecimento da faixa de frequência na qual os fenômenos transitórios far-se-ão presentes, pois, para uma correta representação dos fenômenos transitórios, é recomendável que a maior frequência esperada no sistema simulado seja, pelo menos, cinco vezes menor que a frequência de Nyquist, isto é,

$$f_{max} \leq \frac{f_{Ny}}{5}. \quad (58)$$

Segundo o teorema da amostragem, se um sinal contínuo for amostrado no intervalo $0 \leq t \leq T$, então a frequência de Nyquist vale (Oppenheim and Schaffer, 1989):

$$f_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t}, \quad (59)$$

sendo Δt o intervalo entre amostras ou passo de solução.

Substituindo f_{Ny} em f_{max} , ao expressar o passo de integração, a seguinte inequação deve ser atendida:

$$\Delta t \leq \frac{1}{10f_{max}}, \quad (60)$$

a qual fornece uma boa escolha na solução das equações diferenciais usando a regra de integração trapezoidal.

7. ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS MODELOS

Nesta seção, os desempenhos dos modelos do conversor serão comparados entre si, através da verificação dos sinais presentes no vetor de saídas do espaço de estados, quando da imposição de perturbações no ciclo de trabalho.

Com o conversor operando em um ponto de equilíbrio, perturbações no ciclo de trabalho emulam uma ação de controle oriunda de algum algoritmo de MPPT. Embora, o sistema esteja operando em malha aberta, tais análises permitem verificar o desempenho dos modelos do conversor, como forma de caracterizar as vantagens, desvantagens e limitações dos modelos. Para fins de simulação, o conversor foi linearizado no ponto de operação definido pelo vetor de entradas $\mathbf{u}_e = [10 \text{ A } 700 \text{ V } 0,35]^T$, cujos parâmetros para uma frequência de chaveamento de 20 kHz são apresentados na Tabela 1 (Motahhir et al., 2018).

Tabela 1. Parâmetros do conversor.

L	R_L	C_1	R_{C1}	C_2	R_{C2}
1,2 mH	20 mΩ	75 μF	500 mΩ	75 μF	500 mΩ

O ciclo de trabalho foi gerado de forma aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0,25 \text{ } 0,45]$, cujo comportamento é apresentado na Figura 5. Utilizando um passo de integração de $0,1 \mu\text{s}$ para simulação do modelo chaveado e de $100 \mu\text{s}$ para os demais modelos (modelo médio, de pequenos sinais e linearizado), na Figura 6(a) é exibido o comportamento da tensão terminal da fonte de corrente, frente às variações no ciclo de trabalho. O modelo de pequenos sinais responde às perturbações do ciclo de trabalho, cujas dinâmicas são de mesma natureza dos modelos chaveado e médio, conforme exibe a Figura 6(b). Tal comportamento dinâmico justifica a utilização dos modelos de pequenos sinais em substituição aos modelos chaveado e médio, durante o processo de síntese das malhas de controle do conversor.

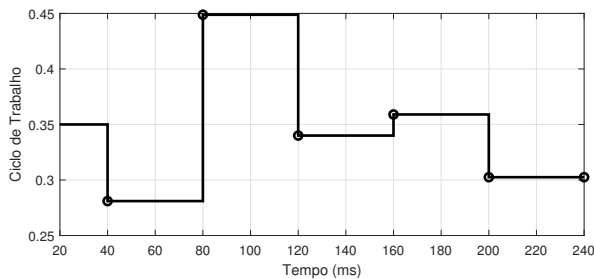


Figura 5. Comportamento dinâmico do ciclo de trabalho.

O comportamento da corrente no barramento CC, para os diferentes modelos e cenários de operação é exibido na Figura 7(a). A corrente obtida a partir do modelo chaveado apresenta pulsos na frequência de chaveamento do sinal PWM, enquanto o comportamento do modelo médio e linearizado correspondem a média do modelo chaveado, conforme se verifica na Figura 7(b). Por sua vez, o modelo de pequenos sinais apresenta a mesma dinâmica do modelo

médio e linearizado, porém sem o nível CC estabelecido para a corrente de saída do conversor.

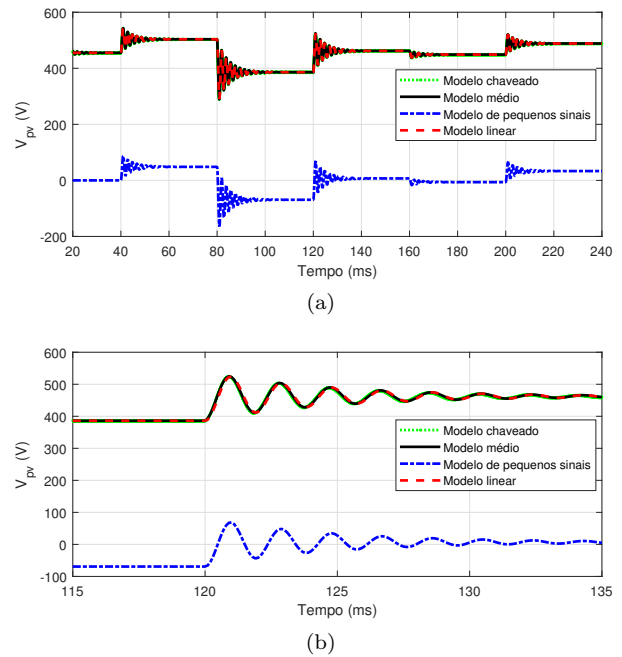


Figura 6. (a) Tensão terminal da fonte de corrente. (b) Detalhamento da tensão durante um transitório.

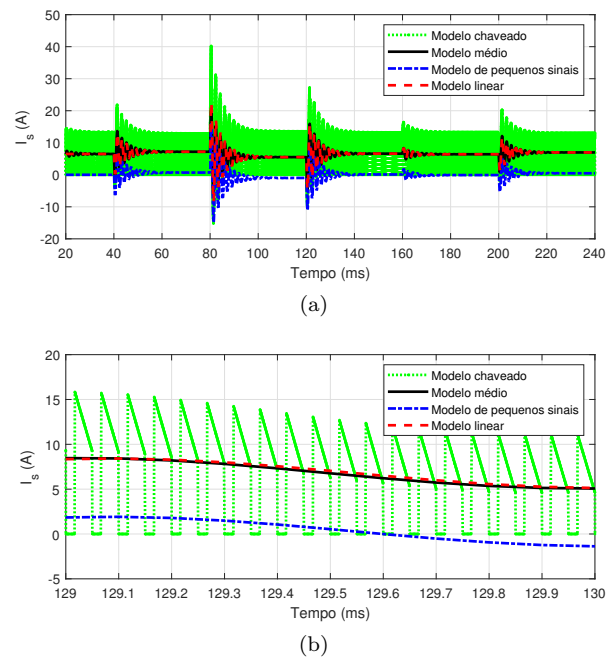


Figura 7. (a) Corrente injetada no barramento CC de saída. (b) Detalhamento da corrente durante um intervalo de regime permanente.

8. CONCLUSÕES

Com base nos resultados computacionais, constatou-se que as particularidades de cada modelo desenvolvido estão em plena concordância com a fundamentação teórica

apresentada. Pela natureza das respostas do modelo de grandes sinais, observou-se que os sinais de corrente e tensão apresentam oscilações na frequência do modulador PWM e, portanto, exigem pequenos passos de integração para obtenção de resultados consistentes. Como esperado, as respostas do modelo médio correspondem à média do modelo chaveado, portanto, apenas componentes de baixa frequência estão presentes, o que permite a utilização de passos de integração relativamente maiores. O modelo de pequenos sinais mostrou-se satisfatório, pois apresenta uma boa representatividade das dinâmicas do sistema.

REFERÊNCIAS

- Banerjee, S. and Verghese, G.C. (eds.) (2001). *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control*. Wiley-IEEE Press, Hoboken, New Jersey, USA, 1 edition.
- Boyce, W.E. and Prima, R.C.D. (2010). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 9 edition.
- Caliskan, V.A., Verghese, O.C., and Stankovic, A.M. (1999). Multifrequency averaging of dc/dc converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14(1), 124–133.
- Chiniforoosh, S., Jatskevich, J., Yazdani, A., Sood, V., Dinavahi, V., Martinez, J.A., and Ramirez, A. (2010). Definitions and applications of dynamic average models for analysis of power systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(4), 2655–2669.
- di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., and Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*, volume 163 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag London Limited, London, United Kingdom, 1 edition.
- Femia, N., Petrone, G., Spagnuolo, G., and Vitelli, M. (2004). Optimizing duty-cycle perturbation of p&o mppt technique. In *IEEE 35th Annual Power Electronics Specialists Conference (IEEE Cat. No.04CH37551)*, volume 3, 1939–1944 Vol.3.
- Femia, N., Petrone, G., Spagnuolo, G., and Vitelli, M. (2009). A technique for improving p&o mppt performances of double-stage grid-connected photovoltaic systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(11), 4473–4482.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1 edition.
- Forouzesh, M., Siwakoti, Y.P., Gorji, S.A., Blaabjerg, F., and Lehman, B. (2017). Step-up dc-dc converters: A comprehensive review of voltage-boosting techniques, topologies, and applications. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 32(12), 9143–9178.
- Gao, D. (2015). *Multi-Harmonic Modeling of Low-Power PWM dc-dc Converter*. Mestrado, Texas A&M University, Texas, USA.
- González, A., López-Erauskin, R., and Gyselinck, J. (2017). Interleaved three-port boost converter for photovoltaic systems including storage. In *19th European Conference on Power Electronics and Applications*, P.1–P.9.
- Lai, Z. and Smedley, K.M. (1998). A general constant-frequency pulsewidth modulator and its applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(4), 386–396.
- Maksimovic, D., Stankovic, A.M., Thottuvelil, V.J., and Verghese, G.C. (2001a). Modeling and simulation of power electronic converters. *Proceedings of the IEEE*, 89(6), 898–912.
- Maksimovic, D., Stankovic, A., Thottuvelil, V., and Verghese, G. (2001b). Modeling and simulation of power electronic converters. *Proceedings of the IEEE*, 89(6), 898–912.
- Middlebrook, R.D. and Cuk, S. (1976). A general unified approach to modelling switching-converter power stages. In *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 18–34.
- Motahhir, S., Ghzizal, A.E., Sebti, S., and Derouich, A. (2018). Modeling of photovoltaic system with modified incremental conductance algorithm for fast changes of irradiance. *International Journal of Photoenergy*, 2018, 1–13.
- Oppenheim, A.V. and Schaffer, R.W. (1989). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall.
- Oppenheim, A.V., Willsky, A.S., and Nawab, H. (2010). *Sinais e Sistemas*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2 edition.
- Raghavendra, K.V.G., Zeb, K., Muthusamy, A., Krishna, T.N.V., Kumar, S.V.S.V.P., Kim, D.H., Kim, M.S., Cho, H.G., and Kim, H.J. (2020). A comprehensive review of dc-dc converter topologies and modulation strategies with recent advances in solar photovoltaic systems. *Electronics*, 9(1).
- Sable, D.M., Cho, B.H., and Ridley, R.B. (1991). Use of leading-edge modulation to transform boost and flyback converters into minimum-phase-zero systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(4), 704–711.
- Smedley, K.M. (1996). Integrators in pulse width modulation switching circuits. In *27th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, volume 1, 773–781 vol.1.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2 edition.
- Viinamäki, J., Messo, J.J.T., Suntio, T., Sitbon, M., and Kuperman, A. (2015). Comprehensive dynamic analysis of photovoltaic generator interfacing dc-dc boost power stage. *IET Renewable Power Generation*, 9(4), 306–314.
- Wester, G.W. (1972). *Low-Frequency Characterization of Switched dc-dc Converters*. Doutorado, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA.
- Wood, P. (1981). *Switching Power Conversion*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, USA, 1 edition.
- Xiao, W., Dunford, W.G., Palmer, P.R., and Capel, A. (2007). Regulation of photovoltaic voltage. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(3), 1365–1374.
- Zapata, J.W., Kouro, S., Carrasco, G., Renaudineau, H., and Meynard, T.A. (2019). Analysis of partial power dc-dc converters for two-stage photovoltaic systems. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 7(1), 591–603.