

Sensibilidades de Polos e Zeros em Relação ao Comprimento de Linhas de Transmissão Representadas pelo Modelo de Bergeron

Sergio Luis Varricchio* e Cristiano de Oliveira Costa*

*Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, CEP 21941 911
(e-mails: slv@cepel.br e crisoc@cepel.br).

Abstract: This work presents the calculation of pole and zero sensitivities with respect to the length of transmission lines (TLs) represented by the Bergeron model. This type of information may be useful when there are doubts about the parameter values of certain TLs or, in studies involving contingencies, which TL outages should be primarily considered. The application of the sensitivities of a pole in a power system harmonic analysis is presented.

Resumo: Neste trabalho é apresentado o cálculo de sensibilidades de polos e zeros em relação ao comprimento de linhas de transmissão (LTs) representadas pelo modelo de Bergeron. Este tipo de informação pode ser útil quando existem dúvidas sobre os valores dos parâmetros de determinadas LTs, ou, em estudos envolvendo contingências, quais LTs devem ser prioritariamente consideradas. A aplicação das sensibilidades de um polo em um estudo de comportamento harmônico é apresentada.

Keywords: Sensibilities; Poles; Zeros; Transmission Lines; Bergeron Model.

Palavras-chaves: Sensibilidades; Polos; Zeros; Linhas de Transmissão; Modelo de Bergeron.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentado o cálculo de sensibilidades de polos e zeros em relação ao comprimento de linhas de transmissão (LTs) representadas pelo modelo de Bergeron, recentemente implementado no programa HarmZs (CEPEL, 2016) do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL (para estudos de comportamento harmônico e análise modal de redes elétricas), objetivando sua compatibilização (Varricchio & Campello, 2019) com o Alternative Transients Program - ATP (para simulação no tempo de transitórios eletromagnéticos) (Leuven EMTP Center, 1990). Ambos os programas são largamente utilizados no setor elétrico brasileiro e recomendados nos Procedimentos de Rede do Operador Nacional do Sistema Elétrico - ONS (Operador Nacional do Sistema - ONS, 2017). O modelo de Bergeron é de grande interesse por ser recomendado pelo ONS nas Diretrizes para a Elaboração de Projetos Básicos para Empreendimentos de Transmissão (Operador Nacional do Sistema - ONS, 2013) e, conseqüentemente, bastante utilizado em estudos de transitórios eletromagnéticos.

Estas sensibilidades podem ser úteis quando existem dúvidas sobre os valores dos parâmetros de determinadas LTs, ou, em estudos envolvendo contingências, quais LTs devem ser prioritariamente consideradas.

O desenvolvimento matemático, necessário para a realização analítica deste cálculo, é apresentado em detalhes. Os resultados analíticos são comparados com os obtidos por aproximações numéricas, mostrando excelentes concordâncias, validando, desta forma, as expressões matemáticas obtidas.

2. CONCEITOS BÁSICOS

O comportamento dinâmico de um sistema MIMO (*Multi-Input Multi-Output*) de ordem n no domínio da frequência complexa s , com p saídas e m entradas, representadas pelos vetores $\mathbf{y}(s)$ e $\mathbf{u}(s)$, respectivamente, pode ser descrito por (Varricchio, et al., 2018; Gomes Jr., et al., 2006; Varricchio, et al., 2004; Varricchio, 2015; Varricchio & Gomes Jr., 2018):

$$\mathbf{Y}(s) \mathbf{x}(s) = \mathbf{B} \mathbf{u}(s) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(s) + \mathbf{D} \mathbf{u}(s) \quad (2)$$

onde $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{x}(s) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{u}(s) \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{y}(s) \in \mathbb{C}^p$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$. O sobrescrito T denota transposição de matrizes ou vetores.

De acordo com (Varricchio, et al., 2018; Gomes Jr., et al., 2006; Varricchio, et al., 2004; Varricchio, 2015; Varricchio & Gomes Jr., 2018), no caso do sistema em consideração ser uma rede elétrica com n_b barras e n_f fontes de tensão, tem-se:

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_{\text{bus}}(s) & -\mathbf{F}^T \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{Z}_f(s) \end{array} \right] \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(s) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}(s) \\ \mathbf{i}_f(s) \end{array} \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(s) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{i}(s) \\ \mathbf{v}_f(s) \end{array} \right] \quad (5)$$

onde $\mathbf{Y}_{\text{bus}}(s) \in \mathbb{C}^{n_b \times n_b}$ é a matriz de admitâncias nodais do sistema desconsiderando as fontes de tensão. A matriz \mathbf{F} é composta por n_f linhas e n_b colunas. As linhas da matriz \mathbf{F} são

compostas por elementos nulos exceto nas posições correspondentes às barras entre as quais as fontes de tensão estão conectadas. Nestas posições, os elementos possuem valores iguais a 1 (correspondente à barra onde a corrente da fonte entra) e -1 (correspondente à barra onde a corrente da fonte sai). Caso uma destas barras seja a de referência, apenas o valor 1 deverá ser colocado na posição correspondente à outra barra. A matriz $\mathbf{Z}_f(s)$ é diagonal, de dimensão igual a n_f e seus elementos são iguais às impedâncias internas das fontes. Os vetores $\mathbf{v}_f(s)$ e $\mathbf{i}_f(s)$ possuem dimensão igual a n_f e são compostos pelas tensões internas e correntes das fontes, respectivamente. Os vetores $\mathbf{v}(s)$ e $\mathbf{i}(s)$ possuem dimensões iguais a n_b e $(m - n_f)$, respectivamente, e são compostos pelas tensões e injeções de correntes nodais.

Resolvendo (1) para $\mathbf{x}(s)$ e substituindo em (2), obtém-se:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}^T \mathbf{Y}(s)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{u}(s) \quad (6)$$

A expressão relacionando o vetor de saídas $\mathbf{y}(s)$ com o de entradas $\mathbf{u}(s)$ é definida como a matriz de funções de transferência (FTs) $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}^T \mathbf{Y}(s)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (7)$$

Para analisar apenas uma entrada $u(s)$ e uma saída $y(s)$ (sistema SISO, *Single-Input Single-Output*), deve-se selecionar as colunas \mathbf{b} e \mathbf{c} apropriadas das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} , respectivamente, e um elemento d da matriz \mathbf{D} , resultando na FT escalar:

$$H(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}(s)^{-1} \mathbf{b} + d \quad (8)$$

3. SENSIBILIDADES DE POLOS E ZEROS

A sensibilidade de polos e zeros é muito útil quando deseja-se identificar quais os parâmetros do sistema que, quando variados, causam um deslocamento significativo de determinados polos ou zeros no plano complexo.

Os valores de s que tornam $H(s)$, dada em (8), infinita são por definição seus polos, enquanto que os valores de s que tornam $H(s)$ nula são seus zeros. Para que $H(s)$ tenda a infinito, cada um de seus polos deve tornar a matriz $\mathbf{Y}(s)$ singular. Por este motivo, os polos não dependem das variáveis escolhidas para a função de transferência, ou seja, não dependem de \mathbf{b} , \mathbf{c} e d . Os pólos, portanto, dependem apenas da matriz $\mathbf{Y}(s)$. Por outro lado, os zeros dependem da função de transferência escolhida, ou seja, dependem de \mathbf{b} , \mathbf{c} e d . Por este motivo, normalmente utiliza-se a denominação "polos do sistema", ao invés de "polos de $H(s)$ ", porém utiliza-se a denominação "zeros de $H(s)$ " e não "zeros do sistema".

De acordo com (Haley, 1988; Gomes Jr., 2002), um polo atende às seguintes equações, considerando que a matriz \mathbf{Y} do sistema, além de ser função de s (com s tendo o valor λ do polo), também é função de um parâmetro p :

$$\mathbf{Y}(\lambda, p) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{Y}(\lambda, p) = \mathbf{0}^T \quad (10)$$

Além de ser um polo do sistema, λ pode ser interpretado também como um autovalor da matriz \mathbf{Y} (Haley, 1988; Gomes Jr., 2002). Nesta interpretação, \mathbf{v} e \mathbf{w} são os autovetores à direita e à esquerda, respectivamente, associados a λ .

A diferencial total de (9) é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(\lambda, p)}{\partial s} \mathbf{v} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{Y}(\lambda, p)}{\partial p} \mathbf{v} dp + \mathbf{Y}(\lambda, p) d\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Pré-multiplicando (11) por \mathbf{w}^T e considerando (10), obtém-se:

$$\frac{d\lambda}{dp} = - \frac{\mathbf{w}^T \frac{\partial \mathbf{Y}(\lambda, p)}{\partial p} \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \frac{\partial \mathbf{Y}(\lambda, p)}{\partial s} \mathbf{v}} \quad (12)$$

Deve-se observar que o algoritmo de polos dominantes, descrito nas referências (Gomes Jr., 2002; Varricchio, et al., 2001), fornece os valores de λ , \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Se \mathbf{Y} é uma função de s e p , a FT H também será. Logo, (8) pode ser reescrita como:

$$H(s, p) = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}(s, p)^{-1} \mathbf{b} + d \quad (13)$$

Por definição, um zero z de H atende a:

$$H(z, p) = 0 \quad (14)$$

A partir da diferencial total de (14), chega-se a:

$$\frac{dz}{dp} = - \frac{\frac{\partial H(z, p)}{\partial p}}{\frac{\partial H(z, p)}{\partial s}} \quad (15)$$

De acordo com (13), tem-se:

$$\frac{\partial H(z, p)}{\partial p} = \mathbf{c}^T \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)^{-1}}{\partial p} \mathbf{b} \quad (16)$$

Seja Ψ uma matriz quadrada inversível qualquer, função de uma variável α . De (Varricchio, 2015; Varricchio, et al., 2015), tem-se:

$$\frac{d\Psi^{-1}}{d\alpha} = -\Psi^{-1} \frac{d\Psi}{d\alpha} \Psi^{-1} \quad (17)$$

Aplicando (17) em (16), obtém-se:

$$\frac{\partial H(z, p)}{\partial p} = -\mathbf{c}^T \mathbf{Y}(z, p)^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)}{\partial p} \mathbf{Y}(z, p)^{-1} \mathbf{b} \quad (18)$$

Definindo

$$\mathbf{Y}(z, p) \mathbf{x}_b = \mathbf{b} \quad (19)$$

$$\mathbf{Y}(z, p)^T \mathbf{x}_c = \mathbf{c} \quad (20)$$

e substituindo em (18), obtém-se:

$$\frac{\partial H(z, p)}{\partial p} = -\mathbf{x}_c^T \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)}{\partial p} \mathbf{x}_b \quad (21)$$

Realizando procedimento análogo, chega-se a:

$$\frac{\partial H(z, p)}{\partial s} = -\mathbf{x}_c^T \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)}{\partial s} \mathbf{x}_b \quad (22)$$

Substituindo (21) e (22) em (15), obtém-se:

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{\mathbf{x}_c^T \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)}{\partial p} \mathbf{x}_b}{\mathbf{x}_c^T \frac{\partial \mathbf{Y}(z, p)}{\partial s} \mathbf{x}_b} \quad (23)$$

Deve-se observar que o algoritmo de zeros dominantes, descrito nas referências (Gomes Jr., 2002; Varricchio, et al., 2001), fornece os valores de z , \mathbf{x}_b e \mathbf{x}_c .

A derivada da matriz $\mathbf{Y}(s, p)$ em relação à frequência complexa s , presente nas equações (12) e (23), é facilmente obtida seguindo as mesmas regras de construção da matriz \mathbf{Y} , mas utilizando, ao invés das admitâncias primitivas, suas derivadas. As expressões analíticas destas derivadas (não incluindo as relativas ao modelo de Bergeron de uma LT) para os diversos componentes de uma rede elétrica são dadas em (Varricchio, 2015). Alternativamente, pode-se determinar a derivada da matriz admitância nodal de cada elemento do sistema. Deve-se, portanto, determinar a derivada da matriz de admitâncias nodais \mathbf{Y}_B do modelo de Bergeron de uma LT em relação à frequência complexa s , conforme descrito na seção 4.

Considerando o parâmetro p como sendo o comprimento l de uma determinada LT, os únicos elementos da matriz $\mathbf{Y}(s, l)$ que dependem de l são as admitâncias própria y_s e de transferência y_m desta LT. Portanto, considerando uma LT conectada entre os nós (barras) i e j , a derivada da matriz $\mathbf{Y}(s, l)$ em relação ao comprimento l desta LT possuirá todos os elementos nulos, com exceção daqueles mostrados em (24). Estes elementos são determinados na seção 5.

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(s, l)}{\partial l} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \frac{\partial y_s}{\partial l} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial l} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \frac{\partial y_m}{\partial l} & \dots & \frac{\partial y_s}{\partial l} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (24)$$

4. DETERMINAÇÃO DE $\partial \mathbf{Y}_B / \partial s$

De acordo com (Varricchio & Campello, 2019), a matriz de admitâncias nodais \mathbf{Y}_B do modelo de Bergeron de uma LT é dada por:

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} y_s & y_m \\ y_m & y_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde:

$$y_s = (4/R)^2 [(R/4) - \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1] \quad (26)$$

$$y_m = -(4/R)^2 \mathbf{e}_4^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1 \quad (27)$$

sendo R a resistência total da LT e:

$$\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (28)$$

$$\mathbf{e}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{M}(s, l) = \begin{bmatrix} m_a & m_b & 0 & 0 \\ m_b & m_c & m_d & 0 \\ 0 & m_d & m_c & m_b \\ 0 & 0 & m_b & m_a \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$m_a = \frac{4}{R} + y_c \coth\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (31)$$

$$m_b = -y_c \operatorname{csch}\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (32)$$

$$m_c = \frac{2}{R} + y_c \coth\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (33)$$

$$m_d = -\frac{2}{R} \quad (34)$$

A admitância característica y_c , a constante de propagação γ e a resistência total R da LT são dadas por:

$$y_c = \sqrt{C_l/L_l} \quad (35)$$

$$\gamma = s \sqrt{C_l L_l} \quad (36)$$

$$R = R_l l \quad (37)$$

onde C_l , L_l e R_l denotam, respectivamente, a capacitância, a indutância e a resistência por unidade de comprimento l da LT.

Derivando (26) em relação à s , obtém-se:

$$\frac{\partial y_s}{\partial s} = -\left(\frac{4}{R}\right)^2 \mathbf{e}_1^T \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial s} \mathbf{e}_1 \quad (38)$$

Aplicando (17) à (38), obtém-se:

$$\frac{\partial y_s}{\partial s} = \left(\frac{4}{R}\right)^2 \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1 \quad (39)$$

Realizando procedimento análogo, chega-se a:

$$\frac{\partial y_m}{\partial s} = \left(\frac{4}{R}\right)^2 \mathbf{e}_4^T \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1 \quad (40)$$

Seja:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \quad (41)$$

onde $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$. De acordo com (41) e considerando que $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, tem-se:

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{x}^T \quad (42)$$

Pode-se demonstrar facilmente que:

$$\mathbf{e}_4^T \mathbf{M}^{-1} = [x_4 \ x_3 \ x_2 \ x_1] = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \quad (43)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz de permutação dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Substituindo (41) e (42) em (39) e (41) e (43) em (40), obtém-se, respectivamente:

$$\frac{\partial y_s}{\partial s} = \left(\frac{4}{R}\right)^2 \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \mathbf{x} \quad (45)$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial s} = \left(\frac{4}{R}\right)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \mathbf{x} \quad (46)$$

Para computar os valores de (45) e (46) é necessário o cálculo da derivada da matriz \mathbf{M} em relação à s , ou seja, é necessário o cálculo da derivada de seus elementos em relação à s . Utilizando a regra da cadeia e algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\frac{\partial m_a}{\partial s} = \frac{\partial m_c}{\partial s} = -\frac{m_b^2 L}{2} \quad (47)$$

$$\frac{\partial m_b}{\partial s} = -\frac{m_b [m_a - (4/R)] L}{2} \quad (48)$$

$$\frac{\partial m_d}{\partial s} = 0 \quad (49)$$

onde $L = L_l l$ é a indutância total da LT.

5. DETERMINAÇÃO DE $\partial \mathbf{Y}_B / \partial l$

De (34), tem-se que:

$$4m_d^2 = \left(\frac{4}{R}\right)^2 \quad (50)$$

Substituindo (50) em (26) e (27), obtém-se, respectivamente:

$$y_s = 4m_d^2 [(R/4) - \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1] \quad (51)$$

$$y_m = -4m_d^2 \mathbf{e}_4^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1 \quad (52)$$

Derivando (51) em relação à l , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_s}{\partial l} &= 8 m_d \frac{dm_d}{dl} \left[\frac{R}{4} - \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_1 \right] \\ &+ 4m_d^2 \left[\frac{d(R/4)}{dl} - \mathbf{e}_1^T \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial l} \mathbf{e}_1 \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Utilizando (17), (41) e (42), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_s}{\partial l} &= 8 m_d \frac{dm_d}{dl} \left[\frac{R}{4} - x_1 \right] \\ &+ 4m_d^2 \left[\frac{d(R/4)}{dl} + \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial l} \mathbf{x} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Tem-se que:

$$\frac{d(R/4)}{dl} = \frac{R_l}{4} \quad (55)$$

Substituindo (55) em (54), obtém-se:

$$\frac{\partial y_s}{\partial l} = 8 m_d \frac{dm_d}{dl} \left[\frac{R}{4} - x_1 \right] + 4m_d^2 \left[\frac{R_l}{4} + \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial l} \mathbf{x} \right] \quad (56)$$

Realizando procedimento análogo, chega-se a:

$$\frac{\partial y_m}{\partial l} = -8 m_d \frac{dm_d}{dl} x_4 + 4m_d^2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial l} \mathbf{x} \quad (57)$$

Para computar os valores de (56) e (57) é necessário o cálculo da derivada da matriz \mathbf{M} em relação à l , ou seja, é necessário o cálculo da derivada de seus elementos em relação à l . Utilizando a regra da cadeia e algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\frac{\partial m_a}{\partial l} = -\left(2 \frac{dm_d}{dl} + \frac{1}{2} s L_l m_b^2\right) \quad (58)$$

$$\frac{\partial m_b}{\partial l} = -\frac{1}{2} s L_l m_b (m_a + 2m_d) \quad (59)$$

$$\frac{\partial m_c}{\partial l} = \frac{\partial m_a}{\partial l} + \frac{dm_d}{dl} \quad (60)$$

$$\frac{dm_d}{dl} = \frac{2R_l}{R^2} \quad (61)$$

6. SISTEMA TESTE

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos utilizando o sistema de transmissão mostrado na Fig. 1. Este sistema possui 34 barras, 25 LTs, 12 ramos “shunts” representando bancos de capacitores ou de indutores, 16 transformadores, 16 cargas e 10 geradores (fontes ideais de tensão). Os dados dos parâmetros de sequência positiva deste sistema estão apresentados na referência (Varricchio & Campello, 2019). A função de transferência selecionada para os experimentos numéricos e testes é a impedância própria da barra 21, destacada em vermelho na Fig. 1.

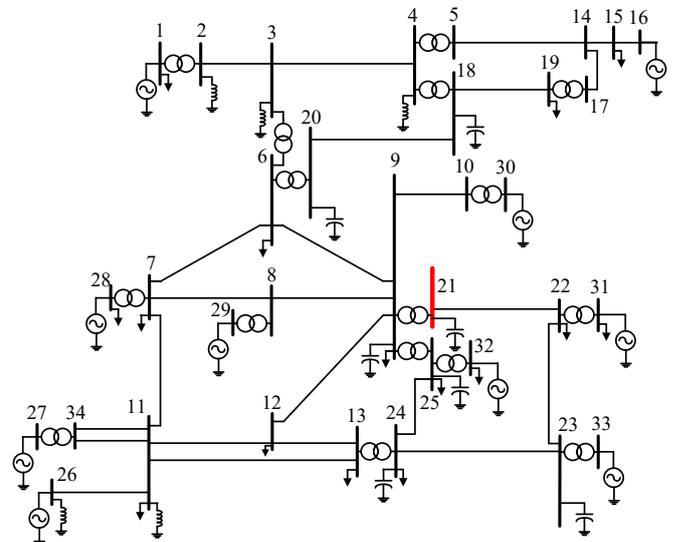


Fig. 1. Sistema de Transmissão.

Considerando a limitação de espaço e a grande similaridade entre as expressões de $d\lambda/dl$ e dz/dl (dependem basicamente

do cálculo de $\partial \mathbf{Y}(s, l)/\partial l$ e de $\partial \mathbf{Y}(s, l)/\partial s$, dadas por (12) e (23), respectivamente, se julgou necessário apresentar somente resultados relativos a $d\lambda/dl$. Observa-se, no entanto, que as conclusões e análise relacionadas à precisão no cálculo de $d\lambda/dl$ são válidas também para dz/dl .

7. VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DE $d\lambda/dl$

Na Fig. 2 está mostrado o módulo da impedância própria da barra 21 do sistema de transmissão mostrado na Fig. 1. O pico de maior magnitude ocorre para a frequência de 1108 Hz, conforme indicado na figura.

A frequência de localização deste pico máximo indica que a parte imaginária do polo λ de maior dominância de $z_{21,21}$ está próxima a $j \times 2 \times \pi \times 1108 = j6961.8$ rad/s. Utilizando este valor como estimativa inicial para o algoritmo de polos dominantes, obtém-se o valor convergido do polo igual a $\lambda = (\sigma + j\omega) = (-56.171 \text{ s}^{-1} + j6966.4 \text{ rad/s})$.

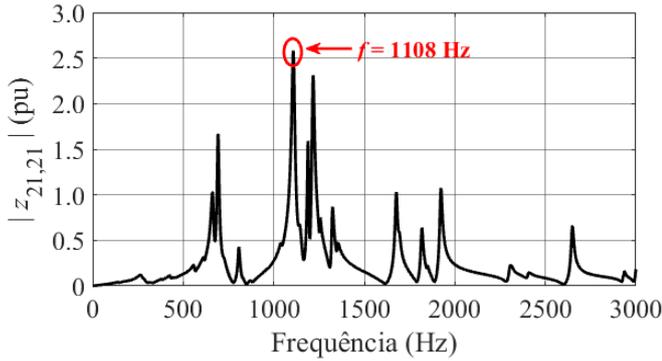


Fig. 2. Módulo da impedância própria da barra 21.

Na Tabela 1 estão apresentadas as partes real e imaginária das sensibilidades deste polo em relação aos comprimentos das LTs do sistema de transmissão representadas pelo modelo de Bergeron, denotadas por $\Re(d\lambda/dl)$ e $\Im(d\lambda/dl)$, respectivamente.

O cálculo analítico de $\frac{d\lambda}{dl}$, realizado utilizando (12), pode ser verificado numericamente pela fórmula da diferença central, dada por (Kiusalaas, 2005):

$$\left. \frac{d\lambda(l)}{dl} \right|_{l=l_k} = \frac{d\lambda(l_k)}{dl} \cong \frac{\lambda(l_{k+1}) - \lambda(l_{k-1})}{2\Delta l} \quad (62)$$

onde $\Delta l = (l_{k+1} - l_k) = (l_k - l_{k-1})$.

Na Fig. 3 estão mostrados os erros entre os valores das sensibilidades do polo $\lambda = -56.171 + j6966.4$ em relação aos comprimentos das LTs obtidos analítica e numericamente. Estes erros são definidos por:

$$\epsilon = \left| \frac{\left(\frac{d\lambda}{dl} \right)_{\text{Analítico}} - \left(\frac{d\lambda}{dl} \right)_{\text{Numérico}}}{\left(\frac{d\lambda}{dl} \right)_{\text{Analítico}}} \right| \times 100\% \quad (63)$$

O maior erro de sensibilidade encontrado foi de $\epsilon_{\max} = 0.1015 \%$ para a LT 16 (conectada entre as barras 15 e 16).

Tabela 1: Partes real e imaginária das sensibilidades de $\lambda = -56.171 + j6966.4$ em relação ao comprimento das LTs

Nº LT	Barra		$\Re(d\lambda/dl)$ $\text{s}^{-1} [\Delta l (\%)]^{-1}$	$\Im(d\lambda/dl)$ $\text{rad s}^{-1} [\Delta l (\%)]^{-1}$
	de	para		
1	2	3	0.00070813	0.00030737
2	3	4	0.00066074	0.000466
3	5	14	1.2608e-05	9.6955e-06
4	6	7	0.0066747	-0.072498
5	8	7	0.0023743	-0.015606
6	8	9	0.001569	-0.014986
7	9	6	0.0057057	-0.070101
8	9	12	0.0083418	-0.096944
9	10	9	0.00044126	-0.0055218
10	11	7	0.01431	-0.13071
11	12	11	0.0037096	-0.046423
12	12	13	0.032179	-0.48155
13	13	11	0.01353	-0.092031
14	14	15	2.8831e-06	2.5847e-06
15	14	17	5.9359e-07	3.8419e-07
16	15	16	6.4227e-07	5.5647e-07
17	18	19	6.8907e-07	1.3116e-07
18	18	20	0.00069995	-0.00041304
19	21	22	1.3452	-13.979
20	23	22	-0.42104	-20.937
21	23	24	-1.0015	-9.4091
22	25	24	-1.4453	-6.8851
23	26	11	0.028343	-0.14266
24	34	11	5.7061e-05	-0.00050547
25	34	11	5.7061e-05	-0.00050547

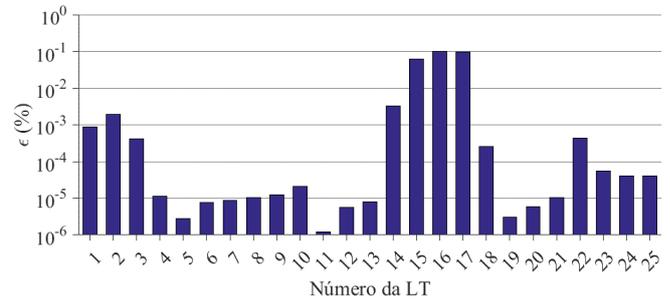


Fig. 3. Erros entre os valores das sensibilidades do polo $\lambda = -56.171 + j6966.4$ calculados analítica e numericamente.

8. APLICAÇÃO PRÁTICA DE $d\lambda/dl$

De acordo com a Tabela 1, observa-se que o polo $\lambda = -56.171 + j6966.4$ possui altos valores de sensibilidades em relação aos comprimentos das LTs 19, 20, 21 e 22 (destacados em amarelo) e menores em relação aos comprimentos das demais LTs.

Tomando como exemplo a LT 20, se seu comprimento for diminuído, as partes real e imaginária de λ irão aumentar, uma vez que os valores de sensibilidades destas partes são negativos. Uma consequência óbvia do aumento da parte

imaginária de λ é que a frequência de ressonância paralela localizada em 1108 Hz irá aumentar. O efeito do aumento da parte real não é tão óbvio, sendo analisado mais adiante. Por outro lado, se, por exemplo, o comprimento da LT 13 for dobrado, pouca alteração deverá ocorrer no valor de λ .

Supondo uma alteração de $\Delta l = -20\%$ no comprimento da LT 20, pode-se estimar a conseqüente variação $\Delta\lambda$ como:

$$\Delta\lambda \cong \frac{d\lambda}{dl} \times \Delta l = -(0.42104 + j20.937) \times -20 \quad (64)$$

$$= 8.4208 + j418.74$$

Desta forma, a estimativa para o novo valor de λ é:

$$\lambda_{\text{estimado}} = \lambda + \Delta\lambda = -47.750 + j7385.1 \quad (65)$$

Considerando, agora, uma variação de $\Delta l = 100\%$ no comprimento da LT 13, tem-se:

$$\Delta\lambda \cong \frac{d\lambda}{dl} \times \Delta l = (0.01353 - j0.092031) \times 100 \quad (66)$$

$$= 1.353 - j9.2031$$

Logo:

$$\lambda_{\text{estimado}} = \lambda + \Delta\lambda = -54.818 + j6957.2 \quad (67)$$

As respostas em frequência do módulo da impedância própria da barra 21 estão mostradas na Fig. 4, considerando:

- Sistema original;
- Sistema com uma variação de -20% no comprimento da LT 20 ($\Delta l_{20} = -20\%$);
- Sistema com uma variação de 100% no comprimento da LT 13 ($\Delta l_{13} = 100\%$).

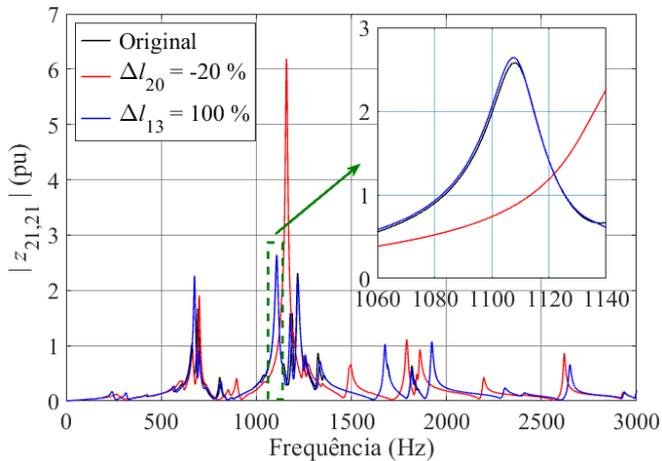


Fig. 4. Respostas em frequência do módulo de $z_{21,21}$, considerando o sistema original e com alterações nos comprimentos das LTs 20 e 13.

Como previsto, a variação de -20% no comprimento da LT 20 aumentou significativamente a frequência de ressonância paralela originalmente localizada em 1108 Hz. Por outro lado, a variação de 100% no comprimento da LT 13 não alterou o valor desta frequência.

Na Tabela 2 está apresentado um resumo das características do polo mais dominante do sistema de transmissão original e modificado.

Tabela 2: Características do polo mais dominante do sistema de transmissão original e modificado

Sistema	Pico (Hz)	Estimativa de λ	Valor Final de λ	Resíduo de λ	$\hat{R}(\lambda)$
Original	1108	$j6961.8$	$-56.171 + j6966.4$	$137.34 + j12.718$	2.4555
$\Delta l_{20} = -20\%$	1159	$-47.750 + j7385.1$	$-40.371 + j7283.0$	$240.75 - j10.571$	5.9693
$\Delta l_{13} = 100\%$	1108	$-54.818 + j6957.2$	$-55.583 + j6964.1$	$140.45 + j12.267$	2.5365

Os aumentos no valor da magnitude de $z_{21,21}$, na frequência de ressonância paralela originalmente localizada em 1108 Hz, devidos às variações de -20% e 100% nos comprimentos das LTs 20 (aumento significativo) e 13 (ligeiro aumento), respectivamente, serão justificados a seguir utilizando as informações contidas na coluna designada por $\hat{R}(\lambda)$ (índice de dominância de λ).

De acordo com (Schilders, et al., 2008), se $\lambda = \sigma + j\omega$ é dominante, a seguinte aproximação é válida:

$$|z_{21,21}(j\omega)| \cong \left| \frac{R}{\sigma} \right| \quad (68)$$

De acordo com (68) e considerando que a frequência de ressonância ω_r é aproximadamente igual a ω , conclui-se que quanto maior for o módulo de R/σ maior será a contribuição (dominância) do polo λ para a magnitude de $z_{21,21}(j\omega)$ e, conseqüentemente, para a magnitude de $z_{21,21}(j\omega_r)$. Por esta razão, uma das definições do índice de dominância \hat{R} do polo λ é (Schilders, et al., 2008):

$$\hat{R} = \left| \frac{R}{\sigma} \right| \quad (69)$$

Como se observa na última coluna da Tabela 2, houve aumento nos valores do índice de dominância de λ devidos às variações de -20% e 100% nos comprimentos das LTs 20 (aumento significativo) e 13 (ligeiro aumento), respectivamente, refletindo os aumentos que ocorreram no valor da magnitude de $z_{21,21}$.

9. CONCLUSÕES

Neste trabalho é descrito em detalhes o desenvolvimento matemático necessário para o cálculo analítico de sensibilidades de polos e zeros em relação ao comprimento de LTs representadas pelo modelo de Bergeron, recentemente implementado no programa HarmZs do CEPEL, para estudos de comportamento harmônico e análise modal de redes elétricas.

Utilizando um sistema teste consistindo em um sistema de transmissão de médio porte, foi possível comparar os resultados analíticos com os obtidos por aproximações numéricas, mostrando excelentes concordâncias, validando, desta forma, as expressões matemáticas obtidas.

REFERÊNCIAS

As sensibilidades $d\lambda/dl$ do polo mais dominante λ da impedância própria de uma das barras do sistema teste em relação aos comprimentos de suas 25 LTs foram calculadas. Mostrou-se que uma variação de -20% no comprimento da LT com o maior valor de magnitude de $d\lambda/dl$ resultou em uma variação significativa nos valores da frequência de ressonância e da magnitude desta impedância associados a λ . Por outro lado, uma variação de 100% no comprimento de uma das LTs com um baixo valor de $d\lambda/dl$ praticamente não alterou estes valores.

Conclui-se, portanto, que incorreções nos comprimentos das LTs com altos valores de $d\lambda/dl$, causam maior impacto nos valores da frequência de ressonância e da magnitude da impedância associados a λ . Como o comprimento determina os valores totais da resistência, capacitância e indutância da LT, pode-se estender esta conclusão a incorreções nos valores destes parâmetros por unidade de comprimento. Portanto, em estudos de comportamento harmônico, estas sensibilidades podem ser utilizadas para se determinar quais LTs são as mais responsáveis pela existência de ressonâncias paralelas próximas a frequências harmônicas importantes, como as de 5ª e 7ª ordens. Os parâmetros elétricos destas LTs com altos valores de sensibilidades devem ser conferidos e, eventualmente, recalculados e corrigidos no arquivo de entrada de dados para que os resultados de distorções harmônicas sejam precisos e confiáveis. É possível também se levantar dados relativos ao perfil da torre, aos condutores e ao solo (ao invés de aproveitar dados provenientes de arquivos de fluxo de potência), objetivando utilizar modelos mais precisos para estas LTs com altos valores de sensibilidades.

Outro possível exemplo de aplicação das sensibilidades de polos em relação ao comprimento de LTs, reside em estudos de comportamento harmônico envolvendo contingências. Neste caso, estas sensibilidades podem indicar quais LTs devem ser prioritariamente consideradas.

- CEPEL, 2016. *Manual de Utilização do Programa HarmZs Versão 3.0.*, s.l.: s.n.
- Gomes Jr., S., 2002. *Modelagem e Métodos Numéricos para Análise Linear de Estabilidade Eletromecânica, Ressonância Subsíncrona, Transitórios Eletromagnéticos e Desempenho Harmônico de Sistemas de Potência*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica pela COPPE/UFRJ.
- Gomes Jr., S. et al., 2006. *Equivalência entre as Modelagens do PacDyn e HarmZs para Análise de Ressonância Subsíncrona, Ressonâncias de Redes e Harmônicos*. Florianópolis, SC, Brasil, X SEPOPE - Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica.
- Haley, S. B., 1988. The Generalized Eigenproblem: Pole-Zero Computation. *Proceedings of the IEEE*, Volume 76.
- Kiusalaas, J., 2005. *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. New York, NY, USA: Cambridge University Press.
- Leuven EMTP Center, 1990. *ATP Rule Book*, s.l.: s.n.
- Operador Nacional do Sistema – ONS, 2013. *Diretrizes para a Elaboração de Projetos Básicos para Empreendimentos de Transmissão*, s.l.: s.n.
- Operador Nacional do Sistema – ONS, 2017. *Submódulo 18.2 dos Procedimentos de Rede - Relação dos Sistemas e Modelos Computacionais*, s.l.: s.n.
- Schilders, W. H., Vander, H. A. V. & Rommes, J., 2008. *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*. New York, NY, USA: pringer.
- Varricchio, S. L., 2015. *Modelagem e Análise de Redes Elétricas e Métodos de Redução da Ordem de Modelos Dinâmicos de Baixa e Alta Frequência*, Brasília, DF, Brasil: Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica pela UnB.
- Varricchio, S. L. & Campello, T. M., 2019. Compatibility Among Electrical Network Component Models of Computational Power System Analysis Programs. *IEEE Latin America Transactions*, Volume 17, pp. 833-842.
- Varricchio, S. L., Freitas, F. D., Martins, N. & Véliz, F. C., 2015. Computation of Dominant Poles and Residue Matrices for Multivariable Transfer Functions of Infinite Power System Models. *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 30, pp. 1313-1142.
- Varricchio, S. L. & Gomes Jr., S., 2018. Electrical Network Dynamic Models with Application to Modal Analysis of Harmonics. *Electric Power Systems Research*, Volume 154, pp. 433-443.
- Varricchio, S. L., Jr., S. G. & Martins, N., 2001. *s-Domain Approach to Reduce Harmonic Voltage Distortions Using Sensitivity Analysis*. Columbus, Ohio, USA, IEEE Winter Meeting.
- Varricchio, S. L. et al., 2004. *Advanced Tool for Harmonic Analysis of Power Systems*. Rio de Janeiro, RJ, Brazil, IX SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning.
- Varricchio, S. L., Rossi, J., Costa, C. O. & Taranto, G. N., 2018. *Transient Short-Circuit Calculations Using Time Shifts and Rational Models – Preliminary Results*. Niterói, RJ, Brasil, VII SBSE – Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos.