

# Estabilização e controle do pêndulo Furuta: estudo das técnicas de controle $\mathcal{H}_2$ , controle $\mathcal{H}_\infty$ e LQR via LMI

Ângelo M. F. Moreira\* Bernardo Ordoñez\*\*  
Humberto X. Araújo\*\*\*

\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE),  
Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador-BA, (e-mail:  
angellofernandes@gmail.com).

\*\* PPGEE, UFBA, Salvador-BA, (e-mail: bordonez@ufba.br).

\*\*\* PPGEE, UFBA, Salvador-BA, (e-mail: humberto.araujo@ufba.br).

---

**Abstract:** This article aims to analyse the  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control and linear quadratic regulator (LQR) applied to the rotational inverted pendulum aiming stabilization, reference tracking and disturbance rejection. Firstly it is necessary modeling the pendulum, which was performed using the Euler-Lagrange equations. Then, direct calculations and some tests were used to determine the model parameters. The control techniques  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  and LQR through linear matrix inequalities (LMI) were used for the design of controllers. Finally, the simulated and experimental results are presented and analyzes regarding the performance of the controllers are made.

**Resumo:** Este trabalho tem por finalidade o estudo das técnicas de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e Regulador Linear Quadrático (LQR) aplicadas ao pêndulo invertido rotacional objetivando estabilização, seguimento de referência e rejeição de perturbações. Inicialmente, faz-se a modelagem do pêndulo utilizando as equações de Euler-Lagrange. Cálculos diretos e testes experimentais são realizados para a determinação dos parâmetros do modelo. Foram projetados controladores utilizando as técnicas  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e LQR via desigualdades matriciais lineares (LMI), com especificações de desempenho e seguimento de referência. Resultados simulados e experimentais são apresentados demonstrando a efetividade dos controladores projetados.

*Keywords:*  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control; LQR; LMI; disturbance rejection; pole placement; Furuta pendulum.

*Palavras-chaves:* controle  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , LQR, LMI, rejeição de perturbações, alocação de pólos, pêndulo Furuta.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido rotacional (PIR), ou pêndulo Furuta, foi inventado por volta do ano 1991 por Katsuhisa Furuta e seus colegas, quando o propuseram como um novo aparato voltado a pesquisas de sistemas de controle sem limitação da posição angular do braço, quando comparado ao sistema de pêndulo invertido tradicional (Furuta et al., 1992).

O PIR é um típico exemplo de sistema que sintetiza várias características de sistemas dinâmicos, uma vez que possui configurações com equilíbrios estáveis e instáveis, dinâmica não linear e de fase não mínima e ação de controle subatuada (Bortoff, 1996). Em virtude destas características dinâmicas, o PIR é muito utilizado para análise e projeto de estratégias de controle (Türker et al., 2012). Esse sistema também pode ser considerado uma abstração de sistemas físicos, sejam eles: transportador

peçoal *Segway*®), foguete em lançamento, arranha céus sujeitos a ação do vento, dentre outros.

Na literatura, existem inúmeros trabalhos voltados à modelagem e controle do PIR, alguns focados na modelagem e simulação, como em Gäfvert (1998), Cazzolato e Prime (2011) e Duart et al. (2017), outros, com interesse na aplicação das diferentes técnicas de controle existentes. Em Furuta et al. (1992), Park et al. (2011), Al-Jodah et al. (2013) e Akhtaruzzaman e Shafie (2010), o controle LQR é aplicado para estabilização do PIR. Em Al-Jodah et al. (2013), uma comparação de desempenho entre o LQR e o controle robusto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  é feita. Em Akhtaruzzaman e Shafie (2010), a técnica LQR também é objeto de comparação com outras técnicas, neste caso com um *2DOF PID* e a técnica FSK (*Full State-Feedback*).

Em Rigatos et al. (2017), é aplicada a técnica de controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  para estabilização do PIR. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  também é estudada em Yamakita et al. (1995). Neste caso, é aplicada ao PIR duplo objetivando obter um controlador robusto para o sistema. Em relação ao controle  $\mathcal{H}_2$ , este é

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

aplicado em Argha et al. (2018) juntamente com a técnica de controle por modos deslizantes.

Este artigo tem como objetivo a síntese e análise do desempenho das técnicas de controle LQR,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  implementadas em um PIR. O problema de controle é caracterizado pela estabilização da haste pêndulo na sua posição vertical, adicionalmente, o sistema deve ser capaz de seguir referência para a posição angular do braço, como também deve rejeitar o efeito de perturbações.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, descreve-se o sistema PIR, incluindo questões relativas à modelagem, linearização, representação no espaço de estados e identificação dos parâmetros; na Seção 3, é apresentada a síntese de controladores LQR,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , bem como o procedimento para o seguimento de referência e especificações de desempenho; na Seção 4, apresenta-se o cenário de experimentação, e os resultados são avaliados; na Seção 5, são discutidas as conclusões sobre os resultados alcançados.

## 2. SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

O pêndulo *Furuta*, conforme Figura 1, consiste em um braço mecânico (*link*) que gira no plano horizontal quando é tracionado por uma junta atuada (motor), e uma haste (*link*) que é acoplada ao braço por meio de uma junta rotacional não atuada, permitindo que essa haste gire livremente no plano vertical. Ao final da haste é conectado um corpo de pivô.

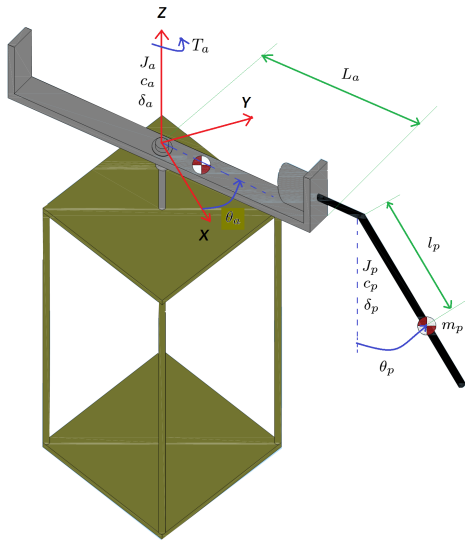


Figura 1. Pêndulo invertido rotacional.

A descrição dos parâmetros do pêndulo são:  $m_p$ , massa da haste;  $l_p$ , posição do centro de massa da haste;  $L_a$ , comprimento do braço;  $J_p$ , momento de inércia da haste;  $J_a$ , momento de inércia do braço;  $c_p$ , coeficiente de atrito viscoso da haste;  $c_a$ , coeficiente de atrito viscoso do braço;  $k_t$ , constante de torque do motor CC;  $n$ , relação de transmissão;  $K_t$ , constante de torque equivalente;  $g$ , aceleração da gravidade.

### 2.1 Equações dinâmicas de movimento

A modelagem matemática do pêndulo Furuta é feita por meio das equações de Euler-Lagrange, conforme descrito em Gäfvert (1998) e Cazzolato e Prime (2011). Em geral, a modelagem é feita baseando-se no equivalente representativo do sistema físico real (Cazzolato e Prime, 2011). Utilizando-se os parâmetros e as grandezas descritas na Tabela 1, as equações que regem a dinâmica do PIR podem ser reescritas na forma matricial (Spong et al., 2006):

$$H(\theta_a, \theta_p) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} + P(\theta_a, \theta_p, \dot{\theta}_a, \dot{\theta}_p) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + G(\theta_a, \theta_p) = U, \quad (1)$$

em que

$$H(\theta_a, \theta_p) = \begin{bmatrix} J_a + m_p L_a^2 + m_p l_p^2 \text{sen}^2 \theta_p & m_p L_a l_p \text{cos} \theta_p \\ m_p L_a l_p \text{cos} \theta_p & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix},$$

$$P(\theta_a, \theta_p, \dot{\theta}_a, \dot{\theta}_p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta}_p \text{sen}(2\theta_p) + c_a & \lambda \\ -\frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta}_a \text{sen}(2\theta_p) & c_p \end{bmatrix},$$

$$G(\theta_a, \theta_p) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \text{sen} \theta_p \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u_a \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t i_m - \delta_a \text{sign}(\dot{\theta}_a) \\ \tau_p - \delta_p \text{sign}(\dot{\theta}_p) \end{bmatrix},$$

com

$$\lambda = \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta}_a \text{sen}(2\theta_p) - m_p L_a l_p \dot{\theta}_p \text{sen} \theta_p, \quad K_t = n k_t.$$

Tabela 1. Variáveis do pêndulo.

Grandeza física	Símbolo
posição angular da haste	$\theta_p$ (rad)
posição angular do braço	$\theta_a$ (rad)
corrente do motor CC	$i_m$ (A)
torque externo na haste	$T_a$ (N · m)
coeficiente de atrito estático - haste	$\delta_p$ (N · m)
coeficiente de atrito estático - braço	$\delta_a$ (N · m)

É importante salientar que neste trabalho o sinal de controle é a corrente  $i_m$ . Isto é possível devido a uma malha interna de controle de corrente, cujo ganho é considerado unitário conforme feito em Hernández-Guzmán e Silva-Ortigosa (2019). A malha de controle interna não será objeto de discussão neste artigo.

### 2.2 Modelo linearizado do PIR

Definindo-se  $q = [\theta_a \ \theta_p]^T$ ,  $\dot{q} = [\dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_p]^T$ ,  $\ddot{q} = [\ddot{\theta}_a \ \ddot{\theta}_p]^T$ , a equação (1) pode ser reescrita como (Gäfvert, 1998):

$$\ddot{q} = H^{-1}(q) [U - P(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)]. \quad (2)$$

A matriz  $H(q)$  é inversível visto que seu determinante é positivo para qualquer valor de  $\theta_p$ .

Definindo-se o vetor de estados  $x_N = [q \ \dot{q}]^T$  e o vetor de entradas  $u_N = [i_m \ \delta_a \ \text{sign}(\dot{\theta}_a) \ \tau_p - \delta_p \ \text{sign}(\dot{\theta}_p)]^T$  (Gäfvert, 1998), pode-se escrever a partir da equação (2):

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ H^{-1}(q) [U - P(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Linearizando-se a equação (3) em torno do ponto de operação  $x_N^* = [0 \ \pi \ 0 \ 0]^T$  e  $u_N^* = [0 \ 0 \ 0]^T$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t) \\ y(t) &= \bar{C}_y\bar{x}(t) + \bar{D}_y\bar{u}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

com  $\bar{x}(t) = x_N(t) - x_N^*(t)$  e  $\bar{u}(t) = u_N(t) - u_N^*(t)$ , e  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são as matrizes jacobianas em relação a  $x_N(t)$  e a  $u_N(t)$ , determinadas no ponto de operação, e  $\bar{C}_y$  e  $\bar{D}_y$  são matrizes definidas de acordo com as saídas desejadas (Rigatos et al., 2017).

Definindo-se:  $\bar{w} = [\delta_a \text{sign}(\dot{\theta}_a) \ \tau_p - \delta_p \text{sign}(\dot{\theta}_p)]^T = [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2]^T$ , logo  $u_N = [i_m \ w]^T$ , consequentemente, o modelo linearizado pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_u i_m(t) + \bar{B}_w \bar{w}(t) \\ y(t) = \bar{C}_y \bar{x}(t) + \bar{D}_{yu} i_m(t) + \bar{D}_{yw} \bar{w}(t), \end{cases}$$

em que as matrizes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}_u$ ,  $\bar{B}_w$ ,  $\bar{C}_y$ ,  $\bar{D}_{yu}$  e  $\bar{D}_{yw}$  são definidas por:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p^2 l_p^2 L_a g}{\Delta} & -\frac{\lambda_p c_a}{\Delta} & -\frac{l_p m_p L_a c_p}{\Delta} \\ 0 & \frac{\lambda_a m_p l_p g}{\Delta} & -\frac{m_p l_p L_a c_a}{\Delta} & -\frac{\lambda_a c_p}{\Delta} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t \lambda_p}{\Delta} \\ \frac{K_t m_p l_p L_a}{\Delta} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_p}{\Delta} & \frac{m_p l_p L_a}{\Delta} \\ -\frac{m_p l_p L_a}{\Delta} & \frac{\lambda_a}{\Delta} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \bar{D}_{yu} = [0], \quad \bar{D}_{yw} = [0 \ 0],$$

com

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(\pi) = J_p m_p L_a^2 + J_a m_p l_p^2 + J_a J_p, \\ \lambda_a &= m_p L_a^2 + J_a, \quad \lambda_p = m_p l_p^2 + J_p. \end{aligned}$$

### 2.3 Estimativa dos parâmetros do sistema

A determinação dos parâmetros é feita em três etapas: uma dos parâmetros elétricos do motor CC, outra dos parâmetros mecânicos do conjunto motor CC e braço mecânico e, por fim, outra da haste do pêndulo.

As dimensões físicas foram medidas diretamente no aparelho. Massas e centros de massa foram calculados com base nas densidades e nas dimensões físicas. O parâmetro  $k_e = k_t$  foi determinado conforme procedimento descrito em Bresciani (2008). Os parâmetros mecânicos  $J_a$  e  $c_a$  foram determinados conforme descrito em Hernández-Guzmán e Silva-Ortigosa (2019) e a relação de transmissão  $n$  conforme retratado em Nise (2011). Os parâmetros da haste foram determinados conforme procedimento experimental descrito em Abelson (1996). Os valores dos parâmetros do pêndulo são descritos na Tabela 2.

## 3. PROJETO DOS CONTROLADORES

Seja o sistema definido pelas seguintes equações no espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_u u(t) + \bar{B}_w \bar{w}(t) \\ y(t) = \bar{C}_y \bar{x}(t) + \bar{D}_{yu} u(t) + \bar{D}_{yw} \bar{w}(t), \end{cases} \quad (5)$$

em que  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^p$  é a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}^q$  é a saída,  $\bar{w} \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de perturbações e as matrizes têm dimensões apropriadas. Supõe-se que o par  $(\bar{A}, \bar{B}_u)$  é controlável.

Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estado  $u(t) = K x(t)$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , utilizando-se diferentes técnicas de controle, para o pêndulo Furuta. A fim de assegurar erro nulo em regime permanente, para entrada e distúrbios constantes, uma nova representação no espaço de estados é utilizada, adicionando-se a integral do erro  $v(t)$  como estado, o que resulta nas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t), \end{cases} \quad (6)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ -\bar{C}_y & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} \bar{B}_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} \bar{B}_w & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$C_z = [\bar{C}_y \ 0], \quad D_{zu} = \bar{D}_{yu}, \quad D_{zw} = [\bar{D}_{yw} \ 0],$$

$$x(t) = [\bar{x}(t) \ v(t)]^T, \quad w(t) = [\bar{w}(t) \ r(t)]^T \quad \text{e} \quad u(t) = K x(t) = K_p \bar{x}(t) + k_i v(t).$$

Para o controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , as matrizes  $C_z$ ,  $D_{zu}$  e  $D_{zw}$  são determinadas conforme as saídas controladas.

### 3.1 Controle LQR via LMI

Seja o sistema descrito pela equação (6), considerando-se  $w(t) = 0$ , o regulador linear quadrático (LQR) é obtido pela minimização do seguinte índice de desempenho de horizonte infinito (Zhou et al., 1996):

$$J_\infty = \int_0^\infty [x(t)^T \ u(t)^T]^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t)^T \\ u(t)^T \end{bmatrix} dt, \quad (7)$$

em que  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \succeq 0$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , e  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $R \succ 0$  são as matrizes de ponderação.

A lei de controle ótima, solução deste problema, pode ser obtida pela resolução do seguinte problema de otimização:

$$\min \rho, \quad W_1, W_2 \quad (8)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \rho I & x(0)^T \\ x(0) & W_1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T & W_1 T_1^T + W_2^T T_2^T \\ T_1 W_1 + T_2 W_2 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (10)$$

Tabela 2. Parâmetros do pêndulo.

Parâmetro físico	Valor	Unidade
$m_p$	0,098	(kg)
$l_p$	0,111	(m)
$L_a$	0,210	(m)
$J_p$	0,00219	(kg · m <sup>2</sup> )
$J_a$	0,00777	(kg · m <sup>2</sup> )
$c_p$	0,000243	(N · m · s/rad)
$c_a$	0,00272	(N · m · s/rad)
$k_t$	0,0522	(N · m/A)
$n$	6,876	
$K_t$	0,3589	(N · m/A)

com:

$$T^T T = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} [T_1 \ T_2] \succeq 0,$$

$W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_1 \succ 0$ ,  $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $x(0)$  é a condição inicial.

A solução ótima é dada por  $u(t) = K x(t)$ , com ganho calculado na solução de (8)  $K = W_2 W_1^{-1}$ , e o valor ótimo do índice é  $J_\infty^* = \rho$ .

### 3.2 Controle $\mathcal{H}_2$ via LMI

Seja o sistema definido pela equação (6), considerando-se  $D_{zw} = 0$ , o controlador por realimentação de estado que minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência estritamente própria entre a perturbação  $w(t)$  e a saída controlada  $z(t)$ ,  $H_{wz}(s)$ , pode ser obtido pela solução do seguinte problema convexo de otimização (Dullerud e Paganini, 2013):

$$\min_{W_1, W_2, W_3} \text{Tr}(W_3), \quad (11)$$

sujeito a:

$$AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T + B_w B_w^T \prec 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1 C_z^T + W_2^T D_{zu}^T \\ C_z W_1 + D_{zu} W_2 & W_3 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (13)$$

com  $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_1 \succ 0$ ,  $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $W_3 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .

O ganho ótimo estabilizante é calculado na solução de (11) por  $K = W_2 W_1^{-1}$ , e o índice ótimo  $\mathcal{H}_2$  é dado por  $\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(W_3)$ .

### 3.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ via LMI

Para o sistema definido pela equação (6), o ganho por realimentação de estado que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado pela solução do seguinte problema convexo (Chilali et al., 1999):

$$\min_{W_1, W_2} \gamma, \quad (14)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \otimes & B_w & W_1 C_z^T + W_2^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C W_1 + D_{zu} W_2 & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (15)$$

em que

$$\otimes = AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T,$$

com  $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_1 \succ 0$ ,  $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

O ganho  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo é calculado na solução de (14) por  $K = W_2 W_1^{-1}$ , e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é dada por  $\|H_{wz}(s)\|_\infty = \gamma$ .

### 3.4 Alocação de polos via LMI

Na síntese  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , e no controle LQR via LMI, também é possível levar em consideração restrições de desempenho adicionais relacionadas com a localização do polos de malha fechada. O projeto pode ser feito de tal forma que os polos de malha fechada resultantes pertençam a uma região pré-definida contida no semiplano esquerdo.

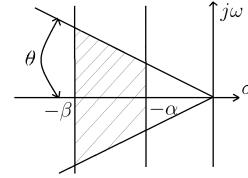


Figura 2. Região de alocação dos polos no plano s.

Assim, pode-se adicionar ao desempenho definido pelas normas ou índice LQR especificações de regime transitório que sabidamente estão intimamente relacionadas com a localização dos polos.

Para alocar os polos de malha fechada, com um controlador por realimentação de estado de ganho  $K = W_2 W_1^{-1}$ , dentro da região especificada na Figura 2, as seguintes LMIs devem ser satisfeitas (Gahinet, 1996), com  $W_1 \succ 0$ :

- faixa vertical entre  $-\beta$  e  $-\alpha$ :

$$\begin{aligned} AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T + 2\alpha W_1 &\prec 0, \\ -AW_1 - W_1 A^T - B_u W_2 - W_2^T B_u^T - 2\beta W_1 &\prec 0; \end{aligned} \quad (16)$$

- setor cônico centrado na origem com ângulo interno  $2\theta$ :

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \oplus_1 & \cos(\theta) \oplus_2 \\ \text{sen}(\theta) \oplus_3 & \cos(\theta) \oplus_4 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (17)$$

com

$$\begin{aligned} \oplus_1 &= AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T, \\ \oplus_2 &= AW_1 - W_1 A^T + B_u W_2 - W_2^T B_u^T, \\ \oplus_3 &= -AW_1 + W_1 A^T - B_u W_2 + W_2^T B_u^T, \\ \oplus_4 &= AW_1 + W_1 A^T + B_u W_2 + W_2^T B_u^T. \end{aligned}$$

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Características dos equipamentos utilizados

Para a realização dos experimentos foi usado o pêndulo da Figura 3, composto por um motor CC de 12 V, dois encoders de 2 canais e 600 pulsos/revolução, um drive condicionador de sinal e controlador de corrente, arduíno Mega 2560 rev3 e computador com o software MATLAB.

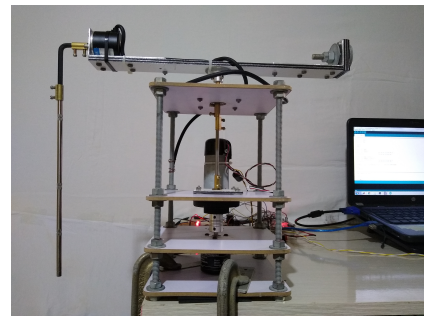


Figura 3. Pêndulo invertido rotacional.

### 4.2 Swing-Up

Para elevação da haste do pêndulo, foi implementado um controlador de *swing-up* que tem ação baseada no controle da energia do sistema, conforme o método descrito em

Aström e Furuta (2000). O sinal de controle de *swing-up* é dado por:

$$u_s = \text{sat} \left[ k_s (E - E_0) \text{sign} \left( \dot{\theta}_p \cos \theta_p \right) \right], \quad (18)$$

$$E = \left( \frac{1}{2} \right) J_p \dot{\theta}_p^2 + m_p l_p g (\cos(\theta_p) - 1),$$

sendo  $E_0$  a energia no ponto de equilíbrio. O valor de  $k_s = 200$  foi definido empiricamente e  $u_s$  foi saturado propositalmente em  $u_s = 0,250$  A por questões de segurança e integridade do pêndulo.

#### 4.3 Estudos de caso

Para o controle do pêndulo são definidas as seguintes especificações de desempenho: tempo de acomodação  $t_s = 5$  s (critério de 2 %) e sobressinal máximo  $M_p = 5$  %. Desta forma, têm-se  $\zeta = 0,69$  e  $\alpha = 0,8$ . Adota-se também um limite para a região de alocação dos polos definido pela reta vertical em  $-\beta = -15\alpha$ , de forma a evitar sinais de controle elevados. Essa região de alocação foi adotada em todos os projetos dos controladores.

A saída controlada para os controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:  $z(t) = [\theta_a(t) \ \theta_p(t) \ i_m(t)]^T$ , logo:

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_m(t). \quad (19)$$

- Caso 01: Controlador LQR, com matrizes de ponderação

$Q = \text{diag}(0, 1013; 8, 2070; 0, 0044; 0, 0044; 0, 0162)$ ,  $R = 2,0408$  e condição inicial

$$x_0 = \left[ \frac{\pi}{4} \ \frac{\pi}{9} \ 15 \ 15 \ \frac{5\pi}{2} \right]^T;$$

- Caso 02: Controlador  $\mathcal{H}_2$ ;
- Caso 03: Controlador  $\mathcal{H}_\infty$ ;
- Caso 04: Controlador  $\mathcal{H}_2$ , sujeito a norma  $\mathcal{H}_\infty < \varepsilon$ ;
- Caso 05: Controlador  $\mathcal{H}_\infty$ ; sujeito a norma  $\mathcal{H}_2 < \varepsilon$ .

Os controladores são obtidos a partir da solução dos problemas de otimização descritos na Seção 3. Os valores dos ganhos projetados estão apresentados na Tabela 3. Para os Casos 04 e 05, o valor de  $\varepsilon$  usado é igual a 120% das normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  calculadas nos casos 03 e 02, respectivamente.

Tabela 3. Controladores e Normas.

Caso	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_i$	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$
01	0,770	-11,568	0,646	-1,956	-0,396		
02	1,805	-15,506	1,064	-2,627	-1,193	413,4	
03	2,843	-18,049	1,330	-3,103	-1,757		119,2
04	2,595	-17,630	1,269	-2,972	-1,639	465,1	143,1
05	2,885	-18,460	1,355	-3,117	-1,848	496,2	128,6

#### 4.4 Resultados simulados

Nas simulações, a entrada de referência é um degrau de  $45^\circ$ , aplicado em  $t = 10$  s. Uma perturbação em degrau de  $\bar{w}_1 = 0,1723$  N · m ocorre em  $t = 30$  s, e uma perturbação

em pulso de amplitude  $\bar{w}_2 = 0,0057$  N · m e duração de 0,09 s acontece em  $t = 50$  s. As simulações são feitas com o modelo não linear descrito pela equação (1).

Os resultados das posições angulares simulados podem ser vistos nas Figuras 4, 5, 6 e 7. Os sinais de controle podem ser vistos nas Figuras 8 a 10, para os Casos 01 a 03, respectivamente. Em relação aos gráficos dos sinais de controle dos Casos 04 e 05, devido à semelhança desses gráficos com o do Caso 03, optou-se por não mostrá-los.

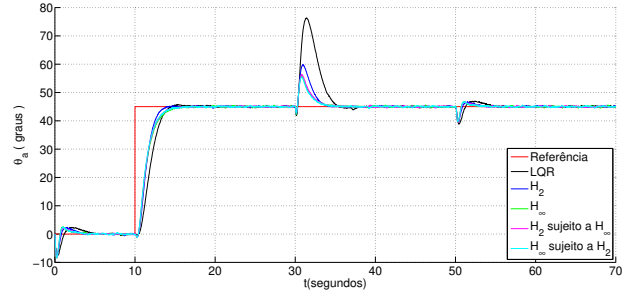


Figura 4. Posição angular do braço.

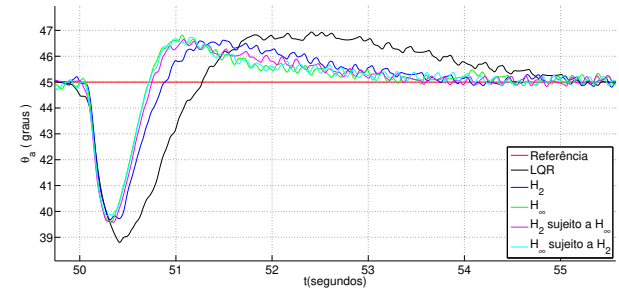


Figura 5. Detalhe da posição angular do braço.

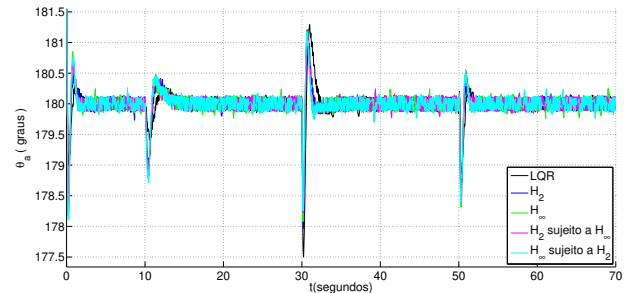


Figura 6. Posição angular da haste.

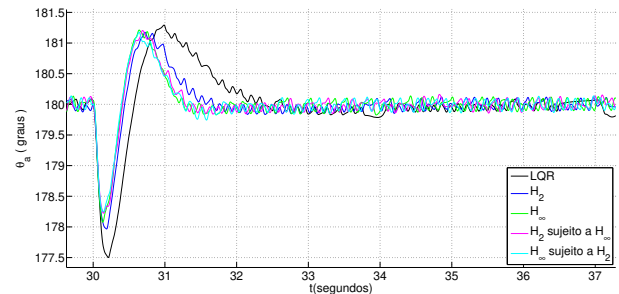


Figura 7. Detalhe da posição angular da haste.

Para comparação do desempenho dos diferentes controladores é usado o critério da integral do erro quadrático

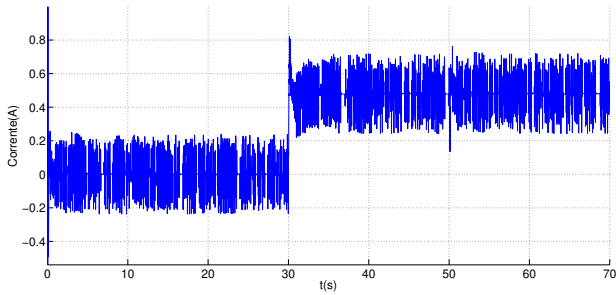


Figura 8. Caso 01 - sinal de controle.

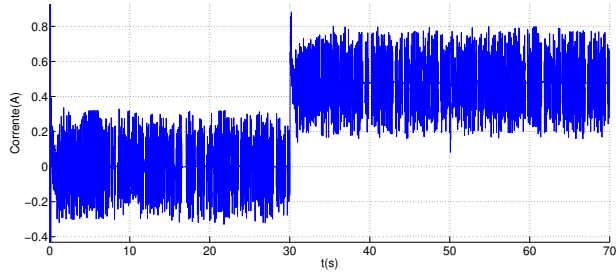


Figura 9. Caso 02 - sinal de controle.

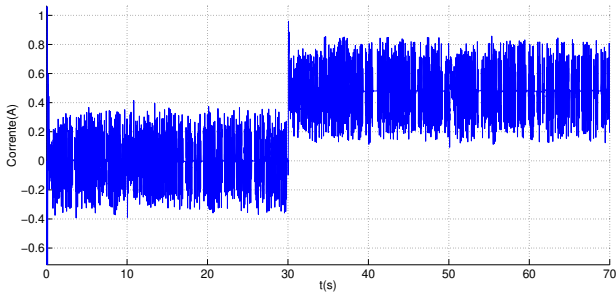


Figura 10. Caso 03 - sinal de controle.

(ver Tabelas 4, 5 e 6). Três intervalos de tempo distintos são definidos, de maneira que a análise do seguimento de referência e do efeito de cada uma das perturbações possa ser feita separadamente. Esses intervalos são: de 10 a 30 s, para o seguimento de referência; de 30 a 50 s, para a perturbação  $\bar{w}_1$ ; e de 50 a 70 s, para a perturbação  $\bar{w}_2$ .

Tabela 4. Integral do erro quadrático para  $\theta_a$ .

Caso	(10 → 30)	(30 → 50)	(50 → 70)
01	$903,79 \cdot 10^{-3}$	$487,92 \cdot 10^{-3}$	$7,675 \cdot 10^{-3}$
02	$684,42 \cdot 10^{-3}$	$73,57 \cdot 10^{-3}$	$3,901 \cdot 10^{-3}$
03	$666,58 \cdot 10^{-3}$	$32,15 \cdot 10^{-3}$	$3,252 \cdot 10^{-3}$
04	$666,32 \cdot 10^{-3}$	$37,00 \cdot 10^{-3}$	$3,515 \cdot 10^{-3}$
05	$653,62 \cdot 10^{-3}$	$30,12 \cdot 10^{-3}$	$3,220 \cdot 10^{-3}$

Tabela 5. Integral do erro quadrático para  $\theta_p$ .

Caso	(10 → 30)	(30 → 50)	(50 → 70)
01	$83,96 \cdot 10^{-6}$	$802,86 \cdot 10^{-6}$	$148,41 \cdot 10^{-6}$
02	$190,87 \cdot 10^{-6}$	$440,28 \cdot 10^{-6}$	$202,13 \cdot 10^{-6}$
03	$217,41 \cdot 10^{-6}$	$374,85 \cdot 10^{-6}$	$257,28 \cdot 10^{-6}$
04	$214,48 \cdot 10^{-6}$	$361,00 \cdot 10^{-6}$	$242,37 \cdot 10^{-6}$
05	$230,80 \cdot 10^{-6}$	$334,25 \cdot 10^{-6}$	$244,12 \cdot 10^{-6}$

Pela análise dos gráficos das Figuras 4, 5 e 7, percebe-se que o controlador LQR é o mais lento em relação à rejeição de perturbações e tem o sinal de controle menos agressivo (ver Figuras 8 a 10). O controlador  $\mathcal{H}_2$  é o segundo mais

lento em relação à rejeição de perturbações. Os outros três controladores têm as respostas muito semelhantes.

Com base na integral do erro quadrático, nota-se que os controladores  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  são os que têm melhor desempenho em relação à rejeição das perturbações  $\bar{w}_1$  e  $\bar{w}_2$  na saída  $\theta_a$ , embora tenham pior desempenho em relação a saída  $\theta_p$ .

Usando-se o erro quadrático total (ver Tabela 6), o controlador que teve o melhor desempenho foi  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ , pois teve o menor índice entre todos os controladores, tanto para o seguimento de referência como também para a rejeição das perturbações.

#### 4.5 Resultados experimentais

Para o *setup* experimental, a entrada de referência é um degrau de  $45^\circ$  aplicado em  $t = 47$  s, levando-se em consideração o tempo necessário para se fazer o *swing-up*. Considera-se uma perturbação em degrau de  $\bar{w}_1 = 0,1723$  N · m em  $t = 87$  s, emulada por uma perturbação no sinal de controle.

Os resultados experimentais obtidos para as posições angulares da haste podem ser vistos nas Figuras 11 e 12. Para a posição angular do braço, os resultados podem ser vistos nas Figuras 13, 15, 17, 18 e 19, para os Casos 01 a 05, respectivamente. Os sinais de controle podem ser vistos nas Figuras 14 e 16, para os Casos 01 e 02, respectivamente. Em relação aos gráficos dos sinais de controle dos Casos 03 a 05, devido à semelhança desses gráficos com o do Caso 02, optou-se por não mostrá-los

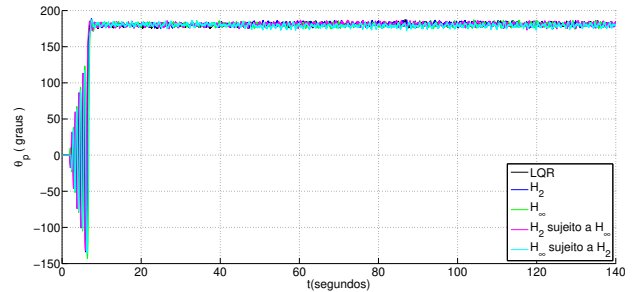


Figura 11. Posição angular da haste.

Pelos gráficos da Figura 11, observa-se que todos os controladores projetados estabilizam o pêndulo. Nota-se pelos gráficos da Figuras 12, que ao aplicar a perturbação  $\bar{w}_1$ , a posição angular  $\theta_p$  sofre um pequeno distúrbio para os controladores LQR,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , mas o mesmo efeito não é visível para os outros dois controladores. Observa-se também o efeito dessa perturbação na variável  $\theta_a$  nas Figuras 13 e 15, para os controladores LQR e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente.

Para os resultados experimentais, a integral do erro quadrático, para cada caso, é apresentada nas Tabelas 7, 8 e

Tabela 6. Integral do erro quadrático total.

Caso	(10 → 30)	(30 → 50)	(50 → 70)
01	$903,0 \cdot 10^{-3}$	$488,7 \cdot 10^{-3}$	$7,823 \cdot 10^{-3}$
02	$684,6 \cdot 10^{-3}$	$74,01 \cdot 10^{-3}$	$4,103 \cdot 10^{-3}$
03	$666,8 \cdot 10^{-3}$	$32,52 \cdot 10^{-3}$	$3,509 \cdot 10^{-3}$
04	$666,5 \cdot 10^{-3}$	$37,36 \cdot 10^{-3}$	$3,757 \cdot 10^{-3}$
05	$653,9 \cdot 10^{-3}$	$30,45 \cdot 10^{-3}$	$3,464 \cdot 10^{-3}$

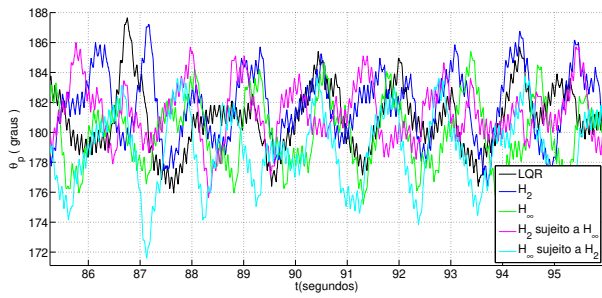


Figura 12. Detalhe da posição angular da haste.

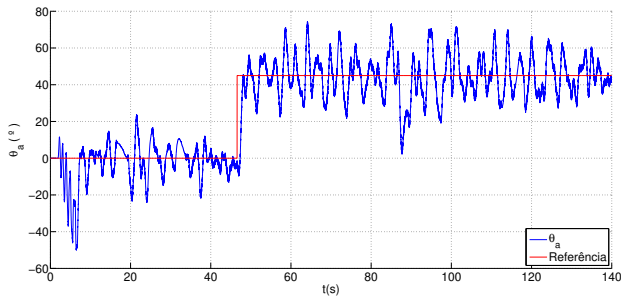


Figura 13. Caso 01 - posição angular do braço (LQR).

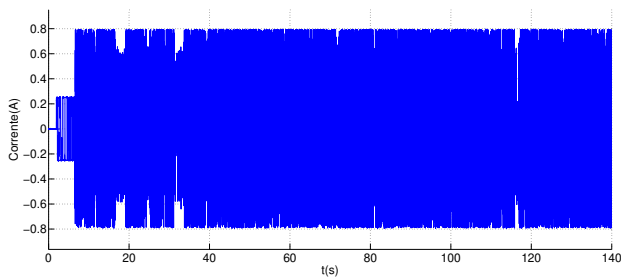


Figura 14. Caso 01 - sinal de controle (LQR).

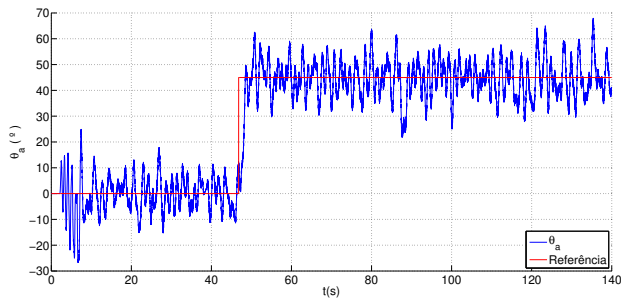


Figura 15. Caso 02 - posição angular do braço ( $\mathcal{H}_2$ ).

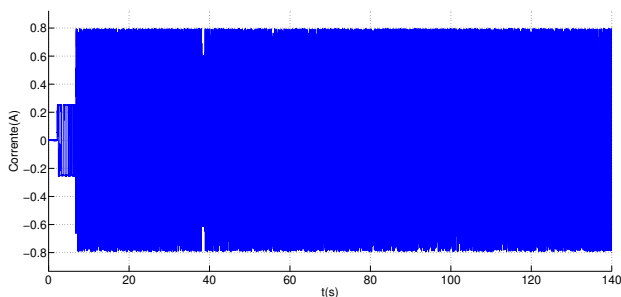


Figura 16. Caso 02 - sinal de controle ( $\mathcal{H}_2$ ).

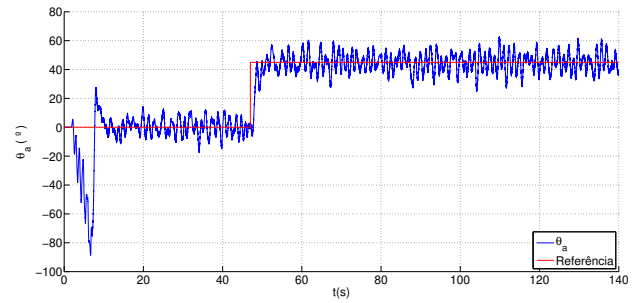


Figura 17. Caso 03 - posição angular do braço ( $\mathcal{H}_\infty$ ).

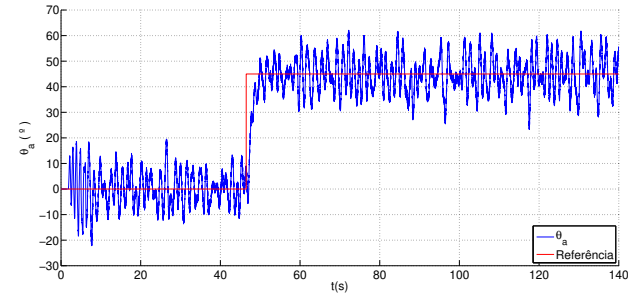


Figura 18. Caso 04 - posição angular do braço ( $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ).

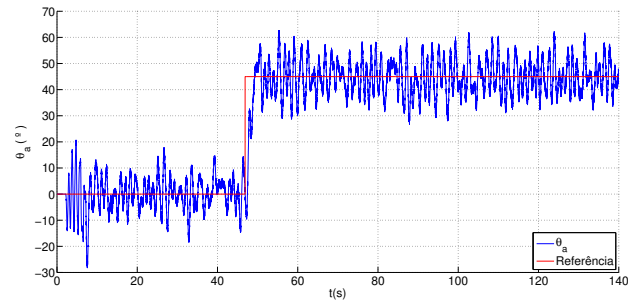


Figura 19. Caso 05 - posição angular do braço ( $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ ).

9. Dois intervalos de tempo distintos são definidos: de 47 a 87 s, para o seguimento de referência; e de 87 a 127 s, para a perturbação  $\bar{w}_1$ .

Tabela 7. Integral do erro quadrático para  $\theta_a$ .

Caso	(47 → 87)	(87 → 127)
01	2,0819	2,25170
02	1,0710	0,74379
03	1,1336	0,58365
04	1,1254	0,60967
05	1,2105	0,61401

Tabela 8. Integral do erro quadrático para  $\theta_p$ .

Caso	(47 → 87)	(87 → 127)
01	0,0394767	0,0530430
02	0,0798945	0,0838989
03	0,0496991	0,0679328
04	0,0725154	0,0689894
05	0,0840042	0,0738959

Com base nos resultados experimentais, pode-se observar que o controlador LQR é o que apresenta melhor desempenho em relação à rejeição da perturbação  $\bar{w}_1$  na saída  $\theta_p$ , conforme nota-se nos valores de integral de erro quadrático da Tabela 8, por outro lado tem o pior desempenho em

Tabela 9. Integral do erro quadrático total.

Caso	(47 → 87)	(87 → 127)
01	2,12138	2,30474
02	1,15089	0,82769
03	1,18329	0,65158
04	1,19791	0,67866
05	1,29450	0,68791

relação da saída  $\theta_a$  (Tabela 7). O controlador que apresentou melhor desempenho nos experimentos em relação à rejeição da perturbação  $\bar{w}_1$  na saída  $\theta_a$  foi o  $\mathcal{H}_\infty$ , visto que apresentou menor integral de erro quadrático. Se considerado a integral de erro quadrático total, o controlador  $\mathcal{H}_2$  tem melhor desempenho para o seguimento de referência e o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  tem melhor desempenho para a rejeição da perturbação  $\bar{w}_1$ .

Cabe salientar que o sistema real tem limitações físicas e dinâmicas não modeladas que exigem que o controlador tenha sinais de controle superiores aos esperados pelos resultados simulados, resultando em saturação do sinal de controle, como pode ser notado nas Figuras 14 e 16, de forma que os resultados experimentais não são iguais ao simulados. Além disso, notou-se uma folga no acoplamento motor - braço que também influencia nos resultados.

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, os controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  e LQR foram projetados para o controle do pêndulo Furuta. Os resultados são considerados satisfatórios, visto que os controladores projetados equilibraram o pêndulo e o braço segue a referência desejada, além de rejeitar perturbações simuladas e experimentais. Verificou-se que a síntese de controladores por meio de LMI é um método flexível, permitindo a inclusão das especificações de desempenho diretamente no problema de controle. A efetividade dos controladores  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  e LQR foi comprovada pelos resultados simulados e experimentais, visto que os controladores se mostraram satisfatórios em relação ao desempenho esperado, mesmo com saturação no sinal de controle e folgas (*backlash*) no acoplamento motor-braço do pêndulo. Uma sugestão para futuros trabalhos é a aplicação dessas técnicas via LMI voltadas especificamente para o tratamento da saturação e das folgas.

## REFERÊNCIAS

Abelson, C.F. (1996). The effect of friction on stabilization of an inverted pendulum. *MSc Theses*.  
 Akhtaruzzaman, M. and Shafie, A.A. (2010). Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. In *2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 1342–1347. IEEE.  
 Al-Jodah, A., Zargarzadeh, H., and Abbas, M.K. (2013). Experimental verification and comparison of different stabilizing controllers for a rotary inverted pendulum. In *2013 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering*, 417–423. IEEE.  
 Argha, A., Li, L., and Su, S.W. (2018).  $\mathcal{H}_2$ -based optimal sparse sliding mode control for networked control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(1), 16–30.

Åström, K.J. and Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2), 287–295.  
 Bortoff, S.A. (1996). Robust swing-up control for a rotational double pendulum. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1), 2810–2815.  
 Bresciani, T. (2008). Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter. *MSc Theses*.  
 Cazzolato, B.S. and Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, 2011, 3.  
 Chilali, M., Gahinet, P., and Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in lmi regions. *IEEE transactions on Automatic Control*, 44(12), 2257–2270.  
 Duart, J., Montero, B., Ospina, P., and González, E. (2017). Dynamic modeling and simulation of a rotational inverted pendulum. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 792, 012081. IOP Publishing.  
 Dullerud, G.E. and Paganini, F. (2013). *A course in robust control theory: a convex approach*, volume 36. Springer Science & Business Media.  
 Furuta, K., Yamakita, M., Kobayashi, S., and Nishimura, M. (1992). A new inverted pendulum apparatus for education. In *Advances in Control Education 1991*, 133–138. Elsevier.  
 Gäfvert, M. (1998). *Modelling the furuta pendulum*. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).  
 Gahinet, P. (1996).  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An lmi approach. *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, 45(3), 358–367.  
 Hernández-Guzmán, V.M. and Silva-Ortigoza, R. (2019). Velocity control of a permanent magnet brushed direct current motor. In *Automatic Control with Experiments*, 605–644. Springer.  
 Nise, N.S. (2011). *Control system engineering*. John Wiley & Sons.  
 Park, M., Kim, Y.J., and Lee, J.J. (2011). Swing-up and lqr stabilization of a rotary inverted pendulum. *Artificial Life and Robotics*, 16(1), 94–97.  
 Rigatos, G., Siano, P., Abbaszadeh, M., and Ademi, S. (2017). Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control for the rotary pendulum. In *2017 11th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo)*, 217–222. IEEE.  
 Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., et al. (2006). *Robot modeling and control*.  
 Türker, T., Görgün, H., and Cansever, G. (2012). Lyapunov's direct method for stabilization of the furuta pendulum. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 20(1), 99–110.  
 Yamakita, M., Iwashiro, M., Sugahara, Y., and Furuta, K. (1995). Robust swing up control of double pendulum. In *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95*, volume 1, 290–295. IEEE.  
 Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K., et al. (1996). *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice hall New Jersey.