

# Investigação De Técnicas De Controle De Ordem Fracionária Aplicadas Ao Controle De Um Sistema De Três Tanques Acoplados

Primeiro A. Autor \* Segundo B. Autor \*\* Terceiro C. Autor \*\*\*

\* Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade do Triângulo, MG,  
(e-mail: autor1@faceg@univt.br).

\*\* Faculdade de Engenharia de Controle & Automação, Universidade do Futuro, RJ (e-mail: autor2@feca.unifutu.rj)

\*\*\* Electrical Engineering Department, Seoul National University, Seoul, Korea, (e-mail: author3@snu.ac.kr)

---

**Abstract:** Process control is essential to realize variation in behavior and efficiency of various systems in modern industry. In the Robotics Laboratory of the Faculty of Technology of the Federal University of Amazonas (UFAM), there is a system of three coupled tanks that proves to be an excellent tool for studying control systems, as the plant has a non-linear and multivariable model, with various inputs and outputs of control signals. Therefore, in this work, two fractional order PID controllers (FOPID, *Fractional-order proportional-integral-derivative*) are designed using the Gain Margin and Phase Margin method and apply them to the system simulation of three coupled tanks. In addition, two PID controllers are tuned using classical methodologies in order to compare their performance to the other controllers developed. Therefore, despite the classic controllers presenting satisfactory performances, the FOPID controllers obtained a superior performance.

**Resumo:** O controle de processos é essencial para realizar a variação do comportamento e da eficiência de diversos sistemas da indústria moderna. No Laboratório de Robótica da Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), existe um sistema de três tanques acoplados que se mostra uma excelente ferramenta de estudo em sistemas de controle, pois, a planta apresenta um modelo não linear e multivariável, com várias entradas e saídas de sinais de controle. Portanto, neste trabalho, projetam-se dois controladores PID de ordem fracionária (FOPID, do inglês *Fractional-order proportional-integral-derivative*) através do método de Margem de Ganho e Margem de Fase e, aplica-os ao sistema simulado de três tanques acoplados. Além disso, sintonizam-se dois controladores PID por meio de metodologias clássicas com a finalidade de comparar seus desempenhos aos demais controladores desenvolvidos. Logo, apesar dos controladores clássicos apresentarem desempenhos satisfatórios, os controladores FOPID obtiveram uma performance superior.

**Keywords:** Process control; fractional control; classic control; tank systems; nonlinear model.

**Palavras-chaves:** Controle de processos; controle fracionário; controle clássico; sistemas de tanques; modelo não linear.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Nos anos recentes, os requisitos e a performance de plantas de processos industriais vem se tornando cada vez mais aprimorados, as especificações de qualidade estão sendo incrementadas com o tempo, e além disso, mais ênfase está sendo conferida a rentabilidade e eficiência das plantas (Dale E. Seborg, 2003). Ademais, as plantas modernas incluem processo mais complexos e altamente integrados, com várias entradas, saídas e estados possíveis, aumentando a dificuldade em bloquear as perturbações que possam afetar o sistema. (Richard C. Dorf, 2007)

Em vista dos maiores requisitos necessários para as plantas de processos, bem como do incremento dos padrões de segurança e eficiência, o controle de processos se torna essencial nos dias atuais. Os sistemas de controles de processos baseados no uso de computadores e interfaces digitais são chaves para permitir que os padrões de qualidade exigidos das plantas operacionais sejam satisfeitos (Dale E. Seborg, 2003).

Nesse sentido, o controle de processos tem como objetivo assegurar que o processo desejado opere nas condições designadas, de forma segura, econômica e atendendo as regulações ambientais e de qualidade. O controle de processos é baseado no estudo de como atingir tais objetivos, mesmo com as variações e perturbações que podem surgir na planta (Marlin, 2015; Gene F. Franklin, 2002). Existem

---

\* Reconhecimento do suporte financeiro deve vir nesta nota de rodapé.

variados exemplos de aplicação de controle de processos em plantas industriais de larga escala, como refinarias de petróleo, nas quais centenas de variáveis de processos devem ser controladas ao mesmo tempo, como temperatura e pressão, para isso outras centenas de variáveis podem ser manipuladas para atingir tal objetivo, como fluxo e velocidade (Dale E. Seborg, 2003).

O controle por realimentação se torna essencial e crítico para a operação dessas plantas modernas (Dale E. Seborg, 2003; Gene F. Franklin, 2002). Essa técnica de controle utiliza a saída de um sistema para influenciar as entradas do mesmo, sendo uma ferramenta poderosa que permite manter o valor mensurável de uma saída próximo de um comportamento dinâmico desejado (Marlin, 2015). Além disso, por meio desta técnica de controle é possível inserir variações no valor de referência dinâmico, sendo o controlador capaz de se adaptar para atingir o novo valor. Um sistema de controle de processos necessita de sensores e atuadores, bem como de um elemento capaz de realizar os cálculos a partir dos dados coletados (Marlin, 2015).

Dentre os tipos de controladores presentes, os controladores PID são bem comuns e amplamente estudados e utilizados, baseados em técnicas clássicas de controle. (Dale E. Seborg, 2003; Marlin, 2015). No entanto, outro tipo de controlador também possui características interessantes para análise, os controladores PID de ordem fracionária, que proporcionam uma maior flexibilidade no projeto (Aidan O'Dwyer, 2012).

Os controladores de ordem fracionária utilizam o cálculo fracionário aplicado na teoria de controle de sistemas, na qual o sistema controlado e o controlador são descritos por equações diferenciais fracionadas. O cálculo fracionário é uma ferramenta versátil e poderosa que auxilia na resolução de problemas analíticos (Kenneth S. Miller, 1993), sendo uma área de estudo da matemática focada no uso de derivadas e integrais de ordem não inteira. A partir de meados do século XX, o cálculo fracionário vem sendo indicado como uma alternativa altamente eficaz na descrição das propriedades de alguns materiais, sendo em alguns casos superior a modelagens com o cálculo de ordem inteira.

Em Patel e Shah (2019) é realizados estudos de simulação para comparar o desempenho de um controlador PID de ordem inteira (FOPID) e um controlador PID de ordem fracionária (IOPID), aplicados a um sistema de controle de nível de tanque cônico acoplado (Patel and Shah, 2019). Já em Gulzar et al. (2020), sintoniza-se um controlador preditivo de modelo adaptativo (AMPC) para controlar a velocidade da válvula, com a finalidade de manter o nível do líquido do tanque cônico. Além disso, para compara-se o desempenho do controlador desenvolvido com um controlador PID de ordem inteira e outro de ordem fracionária (Gulzar et al., 2020).

Em uma pesquisa desenvolvida por Gurumurthy e Das (2019), utilizou-se uma abordagem semi-analítica para sintonizar um controlador FOPID para um sistema de tanque acoplado de duas entradas e duas saídas, sendo os coeficientes fracionários ( $\lambda$  e  $\mu$ ) determinados de forma analítica em seus intervalos estáveis (Gurumurthy and Das, 2019). Enquanto isso, em Wiraszka et al. (2019) aplicou-se uma estratégia de controle PI fracionária de ordem variável

a um modelo físico real de sistema de tanque de água não linear, onde são realizados experimentos numéricos no modelo identificado do sistema de caixa d'água (Wiraszka et al., 2019).

Este trabalho consiste em um estudo da sintonia e simulação de estratégias de controle aplicadas a uma planta de 3 tanques acoplados, presente no Laboratório de Robótica da Faculdade de Tecnologia, na Universidade Federal do Amazonas. Esse tipo de sistema de tanques acoplados, bem como processos industriais envolvendo fluidos, são uma excelente fonte de estudo por apresentarem modelos não lineares e multivariáveis, com diversas entradas e saídas. Esses sistemas exigem técnicas de linearização em torno de regiões de operação ou de técnicas de controle não-linear (Banu and Nasir, 2015).

A planta consiste de 3 tanques para armazenamento de água conectados entre si, capazes de receber um fluxo de água externo por bombas, bem como de escoar água para saídas externas. Além disso, esse sistema permite um estudo com apenas um tanque isolado, formando um sistema com única entrada e saída, bem como com 2 ou 3 tanques acoplados, formando um sistema multivariável com várias saídas para serem observadas. Essa planta possui diversos pontos para monitoramento do fluxo de água, bem como do nível dos tanques, sendo capaz de ajustá-los por meio do controle do fluxo de entrada de líquido. Serão simulados e desenvolvidos dois controladores para a planta, um utilizando técnicas clássicas de controle como PID, e o segundo utilizando o cálculo fracionário aplicado a sistemas de controle, permitindo uma comparação entre o comportamento dos dois controladores (Chuong et al., 2018).

### 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e analisar o desempenho de controladores fracionários por meio de simulações e a implementação no sistema de 3 tanques acoplados presente no Laboratório de Robótica da Universidade Federal do Amazonas. Enquanto os objetivos específicos são:

- Apresentar o modelo do sistema de três tanques acoplados;
- Desenvolver o modelo linearizado;
- Projetar controladores convencionais;
- Projetar controladores fracionários;
- Comparar o desempenho desses controladores.

## 2. CÁLCULO FRACIONÁRIO

O cálculo de ordem fracionário utiliza um operador derivada capaz de receber ordem não somente inteiras, mas também de todo o conjunto dos reais, inclusive para a operação de integração, que equivale a uma derivada de ordem negativa (Duarte Valério, 2013).

O operador generalizado que representa a derivação e integração é apresentado na Equação (1), no qual  $q$  representa a ordem e  $c$  e  $t$  representam os limites utilizados para a operação de integração (Duarte Valério, 2013).

$${}_c D_t^q f(t) = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} f(t), \text{ para } & q > 0 \\ f(t), \text{ para } & q = 0 \\ \int f(t)(dt)^{-q}, \text{ para } & q < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Por outro lado, o operador generalizado de derivada de ordem fracionária é apresentado na Equação 2, com os mesmos parâmetros definidos em 1. Essa definição é a formulada por Caputo.

$${}_c D_t^a f(t) = \begin{cases} {}_c D_t^{a-[a]} \frac{d^{[a]}}{dt^{[a]}} f(t), \text{ para } & a > 0 \\ f(t), \text{ para } & a = 0 \\ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-a-1}}{\Gamma(-a)} f(\tau)(d\tau), \text{ para } & a < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Para a utilização dessa definição é necessário utilizar a função Gamma, cuja definição é apresentada na Equação (3).

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{(x-1)} dy, \quad x > 0. \quad (3)$$

Uma das características do operador derivada fracionário apresentado em (2) é que ele depende os parâmetros  $c$  e  $t$  em todos os casos exceto para ordens inteiras positivas, que equivalem as derivadas comuns, sendo assim é um operador não local na maioria dos casos. Outra característica é que o operador apresentado, se utilizado no domínio do tempo, possui memória, uma vez que o resultado da operação dependerá do intervalo  $c-t$  no qual  $c$  é algum momento anterior. Por fim, como os operadores dependem linearmente de  $f(t)$  tanto para integração como para derivação, esse operador é linear em todo o conjunto dos reais.

### 2.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace do operador  $D$  fracionário, conforme a definição de Caputo, é apresentada na Equação (4). As transformadas de Laplace de ordem fracionária utilizam em algumas situações a função Mittag-Leffler em simplificações, essa função é apresentada na Equação (5). Por fim, um exemplo de transformada de Laplace fracionária é apresentado na Equação (6).

$$\mathcal{L} [{}_0 D_t^a f(t)] = \begin{cases} s^a F(s), \text{ para } a < 0 \\ F(s), \text{ para } a = 0 \\ s^a F(s) - \sum_{k=0}^{[a]-1} s^{a-k-1} D^k f(0), \text{ para } a > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \text{ sendo } \alpha, \beta > 0 \quad (5)$$

$$\mathcal{L} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(ct^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - c} \quad (6)$$

A transformada de Laplace de sistemas diferenciais fracionários pode ser utilizada da mesma forma que em

sistemas diferenciais discretos. Dessa forma, ela é obtida através da relação entre a entrada e a saída de um sistema SISO.

### 3. CONTROLE FRACIONÁRIO

O controle fracionário traz consigo a aplicação das derivadas fracionárias no controle de sistemas, com isso o controlador PID utilizado no controle convencional passar a ser composto por um integrador e um derivador fracionário, podendo ser generalizado na Equação (7):

$$c(t) = P e(t) + I_0 D_t^{-\lambda} e(t) + D_0 D_t^\mu e(t) \quad (7)$$

Nessa situação o controlador possui 5 parâmetros a serem ajustados, os ganhos  $P$ ,  $I$  e  $D$  (comuns ao controlador PID convencional), e os coeficientes  $\lambda$  e  $\mu$  que representam a ordem da integral fracionária e da derivada fracionária respectivamente. A função de transferência do controlador no domínio de Laplace é mostrada em (8), bem como a adaptação necessária ao integrador para assegurar o erro zero.

$$C(s) = P + \frac{I}{s^\lambda} + D s^\mu = P + \frac{I}{s} s^{1-\gamma} + D s^\mu \quad (8)$$

A presença de operadores de ordem diferente de um confere características peculiares a esse controlador, a sua resposta em frequência apresenta a ação de vários polos e zeros dependendo da ordem do controlador, permitindo inclinações superiores a 20 dB/década na resposta em frequência. Uma das formas de sintonizar um controlador desse tipo é por meio da margem de fase e margem de ganho do sistema, que se combinadas com os valores desejados para o sistema em malha fechada permitem determinar os 5 parâmetros do controlador.

As Equações 9 apresentam o sistema de equações não lineares utilizadas para a sintonia de um PID fracionário, é importante ressaltar que as 5 equações só terão solução se todos as 5 variáveis forem livres, com isso para a sintonia de um PID com apenas parte derivativa fracionaria apenas 4 das equações devem ser utilizadas (Duarte Valério, 2013).

$$\begin{aligned} K_p + a \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + b \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\cos(\phi)}{|G(j\omega_{cg})|} &= 0 \\ -a \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\sin(\phi)}{|G(j\omega_{cg})|} &= 0 \\ K_p + c \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + d \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\cos(\pi - \angle G(j\omega_{cf}))}{g_m |G(j\omega_{cf})|} &= 0 \\ -c \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + d \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - \frac{\sin(\pi - \angle G(j\omega_{cf}))}{g_m |G(j\omega_{cf})|} &= 0 \\ \frac{d\angle(C(j\omega)G(j\omega))}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{cg}} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Sendo que:  $a = \frac{k_I}{\omega_{cg}^\lambda}$ ;  $b = K_D \omega_{cg}^\lambda$ ;  $\phi = -\pi + \phi_m - \angle G(j\omega_{cg})$ ;  $c = \frac{k_I}{\omega_{cf}^\lambda}$ ;  $d = K_D \omega_{cf}^\lambda$ .

Com o sistema de equações resolvido é possível obter os valores dos ganhos de cada componente do controlador bem como os expoentes de suas componentes fracionarias, no

entanto, a aplicação do controlador exige que a parte fracionária seja aproximada de uma função de transferência de ordem inteira. A adaptação do controlador é feita por meio da aproximação de Oustaloup, conforme apresentado na Equação 10. Nessa aproximação a componente fracionária é aproximada de uma função de transferência de ordem inteira garantindo a confiabilidade em um intervalo de frequência.

$$s^\alpha \approx C \prod_{m=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z,m}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p,m}^{\frac{2m-1-\alpha}{2N}}}} \quad (10)$$

$$\omega_{z,m} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1+\alpha}{2N}}$$

$$\omega_{p,m} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1+\alpha}{2N}}$$

Em que  $\omega_z$  são os zeros e  $\omega_p$  são os polos da função aproximada,  $N$  é a ordem da aproximação,  $\omega_a$  e  $\omega_b$  são os limites da alta e baixa frequência e  $C$  é o valor de correção necessário para que o ganho seja unitário em 1rad/s.

#### 4. MODELO DO SISTEMA DE TRÊS TANQUES

O sistema de tanques presente utilizado nesse projeto permite diversos tipos de conexões entre os tanques, com isso foi escolhido a forma apresentada na Figura 1. Nessa situação o tanque 1 recebe um fluxo de água como entrada  $q_e(t)$ , o objetivo do controlador é obter a altura desejada na coluna de tanques.

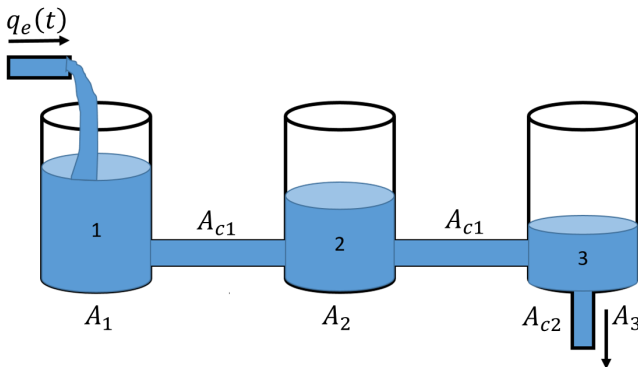


Figura 1. Representação do sistema de tanques

Os tanques principais apresentados na Figura 1 possuem áreas de seção transversal  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , contudo todas as três são iguais e serão denominadas como  $A_t$ . Os canais entre os tanques possuem seção  $A_{c1}$  para os canos que comunicam os tanques e  $A_{c2}$  para o canal de descarga de água. Outras variáveis e parâmetros que serão utilizados são: as alturas individuais da coluna de líquido nos tanques ( $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ ) bem como as variações de altura ( $\delta h_1$ ,  $\delta h_2$  e  $\delta h_3$ ). Com isso é possível obter o sistema de Equações (11) que representa a dinâmica não-linear do sistema.

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{q_e(t)}{A_t} - \frac{A_{c1}}{A_t} \sqrt{2g\sqrt{h_1 - h_2}} \\ \dot{h}_2 &= \frac{A_{c1}}{A_t} \sqrt{2g\sqrt{h_1 - h_2}} - \frac{A_{c1}}{A_t} \sqrt{2g\sqrt{h_2 - h_3}} \\ \dot{h}_3 &= \frac{A_{c1}}{A_t} \sqrt{2g\sqrt{h_2 - h_3}} - \frac{A_{c2}}{A_t} \sqrt{2g\sqrt{h_3}} \end{aligned} \quad (11)$$

O sistema dinâmico apresentado na equação (11) é linearizado em torno de um ponto de operação através do polinômio de Taylor, estando o sistema linearizado contido na equação (12). Portanto, para uma pequena região em torno deste ponto de operação o sistema apresentará características de acordo com o sistema linearizado.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{h}_1 \\ \delta \dot{h}_2 \\ \delta \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 & C_1 & 0 \\ C_1 & -C_1 - C_2 & C_2 \\ 0 & C_2 & -C_2 - C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \delta h_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sendo:  $C_1 = \frac{A_{c1}}{A_t} \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}$ ;  $C_2 = \frac{A_{c1}}{A_t} \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}-h_{30}}}$  e  $C_3 = \frac{A_{c2}}{A_t} \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{30}}}$

Para o desenvolvimento do modelo considerou-se o estado permanente obtido por meio de uma entrada  $q_e(t) = 80\text{cm}^3/\text{s}$  para determinar as altura iniciais ( $h_{10} = 17,70\text{cm}$ ,  $h_{20} = 8,346\text{cm}$  e  $h_{30} = 0,996\text{cm}$ ) e os demais parâmetros da planta são apresentados como  $A_{c1} = 0,4663\text{cm}^2$ ,  $A_{c2} = 1,2668\text{cm}^2$  e  $A_t = 78,5398\text{cm}^2$ .

A altura do nível de água do tanque 1 foi a escolhida como a saída da planta e a partir dela foi obtida a função de transferência do sistema. Desse modo a função  $G$ , apresentada na Equação (13), possui como entrada um valor de 0 a 1 correspondendo ao valor da abertura da válvula e produz uma saída equivalente à altura da água em  $\text{cm}$ . O valor para entrada da função foi normalizado para facilitar a implementação, já que é mais simples controlar o servo motor da abertura da válvula com um sinal percentual.

$$G(s) = \frac{1,019s^2 + 0,5128s + 0,03776}{s^3 + 0,5519s^2 + 0,05913s + 0,0008419} \quad (13)$$

#### 5. PROJETO DOS CONTROLADORES

Inicialmente, projetam-se os controladores para o nível do primeiro tanque. Nesta situação, analisando o mapa de polos e zeros (Figura 2) e a resposta ao degrau do sistema em malha aberta (Figura 3), verifica-se que o sistema é estável e desenvolve um comportamento subamortecido com um tempo de acomodação superior a 300 segundos, logo, opta-se por utilizar os valores de tempo de assentamento de  $t = 200\text{ s}$  e de máximo sobressinal de 10% para a sintonia dos controladores clássicos e fracionários.

Portanto, projetou-se 2 controladores PID de ordem inteira com técnicas de controle clássicas, Lugar geométrico das raízes (LGR) e Alocação de Polos e, 2 controladores PID de ordem fracionários com metodologia analítica de margem de ganho e margem de fase. Um dos controladores FOPID possui apenas a parte derivativa fracionária, enquanto o outro também apresenta o integrador fracionário. Os requisitos de projeto, bem como os parâmetros escolhi-

dos para a sintonia dos controladores são apresentados na Tabela 1 a seguir.

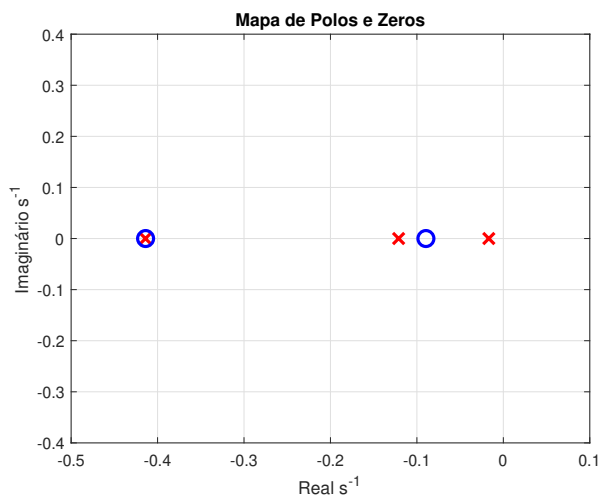


Figura 2. Mapa de polos e zeros da função de transferência do sistema.

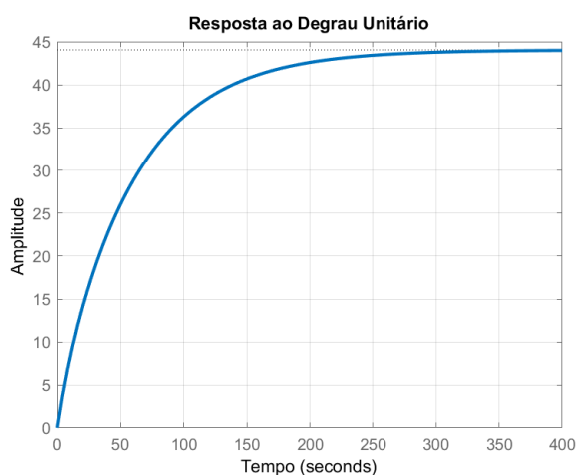


Figura 3. Resposta ao degrau apresentando o comportamento superamortecido

Tabela 1. Especificações do projeto.

Especificações		FOPID 1	FOPID 2	PIDs
Erro ao degrau unitário	$e(\%)$	2	2	2
Tempo de acomodação	$t_s(s)$	200	200	200
Máximo Sobressinal	$M_{ss}(\%)$	10	10	10
Fator de amortecimento	$\zeta$	0,5912	0,5912	0,5912
Frequência natural	$\omega_n(rad/s)$	0,0331	0,0331	0,0331
Margem de ganho	$M_g(dB)$	26	20	-
Margem de fase	$M_p$	70	59	-
Frequência de cruzamento de ganho	$\omega_{cg}(rad/s)$	0,0331	0,0331	-
Frequência de cruzamento de fase	$\omega_{cf}(rad/s)$	0,3640	0,2647	-

O primeiro controlador PID clássico foi sintonizado através do método LGR (Lugar Geométrico das Raízes) onde, observa-se a posição dos polos do sistema em malha fechada e variam-se os ganhos do controlador até atingir a região desejada de acordo com os requisitos da Tabela 1. O segundo controlador PID foi desenvolvido pela metodologia de alocação de polos onde, por meio da equação

diófantina, iguala-se o polinômio característico do sistema em malha fechada com um polinômio que assegurou que as especificações da Tabela 1 fossem atendidas. Em ambos os casos foi adicionado um polo auxiliar em  $-0,6$  para permitir a implementação real da componente derivativa. Os valores dos ganhos obtidos estão contidos na Tabela 2 e, ambos os controladores PID clássicos são apresentados nas Equações (14) e (15).

Conforme já mencionado, os controladores PID de ordem fracionárias foram desenvolvidos utilizando as especificações da Tabela 1. No primeiro caso, igualou-se o coeficiente da parte integrativa do controlador FOPID a 1 ( $\lambda = 1$ ) e obteve-se os demais parâmetros através do método de margem de ganho e margem de fase. No segundo caso, todos os valores de ganhos e os coeficientes foram calculados pela mesma metodologia analítica. Os valores dos ganhos obtidos, assim como a ordem do derivador e do integrador dos controladores FOPID são apresentados na Tabela 2 e as equações que representam os controladores são mostradas em (16) e (17).

Tabela 2. Parâmetros dos controladores.

Parâmetros	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$\mu$	$\lambda$
LGR	0,0606	0,0026	0,3093	-	-
Aloc.Polos	0,0385	0,0019	0,2910	-	-
$PID^\mu$	0,0303	0,0013	0,3144	2,2057	1
$PI^\lambda D^\mu$	0,0195	0,0015	0,4314	2,2486	0,8983

$$C_{LGR}(s) = 0,0606 + \frac{0,0026}{s} + 0,3093 \frac{0,6}{s+0,6} \quad (14)$$

$$C_{Aloc}(s) = 0,0385 + \frac{0,0019}{s} + 0,2910 \frac{0,6}{s+0,6} \quad (15)$$

$$C_{FOPID_1} = 0,0303 + \frac{0,0013}{s} + 0,3144s^{2,2057} \quad (16)$$

$$C_{FOPID_2} = 0,0195 + \frac{0,0015}{s} s^{1-0,8983} + 0,4314s^{2,2486} \quad (17)$$

Apesar de existirem métodos numéricos que solucionam equações diferenciais de ordem fracionária, para a implementação em ambiente computacional Matlab/Simulink deve-se utilizar componentes de ordem inteira, logo, as componentes fracionárias dos controladores foram convertidas para ordem inteira através do método de aproximação de Oustaloup, usando os parâmetros para convergência mostrados na Tabela 3. Portanto, as funções  $s^\alpha$  são substituídas por funções de transferência que apresentem um comportamento similar nos limites de frequência especificados.

Tabela 3. Critérios de aproximação para ordem inteira.

Parâmetros		Valor
Frequência Baixa	$\omega_b(rad/s)$	0,0041
Frequência alta	$\omega_a(rad/s)$	0,2647
Ordem de aproximação	N	4

## 6. RESULTADOS

Inicialmente, o sistema de três tanques controlado é levado ao ponto de operação  $h_{10} = 15,70 \text{ cm}$ . A Figura 4 apresenta a resposta de saída do primeiro tanque onde, nota-se que os sistemas com controladores fracionários possuem um tempo de acomodação maior que os controladores convencionais, entretanto, inferior ao valor desejado de  $t = 200 \text{ s}$ . Porém, o sobressinal desenvolvido pelos sistemas com controlador FOPID são menores que os controladores PID clássicos.

O esforço de controle necessário para se obter a resposta da Figura 4 é mostrado na Figura 5. Observe que o sinal de controle desenvolvido pelo controlador FOPID 2 apresenta um maior *undershoot*, porém, um menor *overshoot*. Os esforços de controle dos controladores clássicos possuem um menor tempo de acomodação, entretanto, um maior sobressinal.

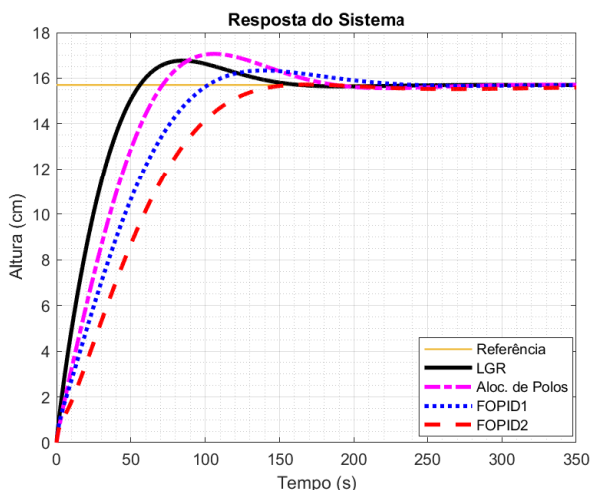


Figura 4. Resposta de saída do tanque 1 do sistema no ponto de operação 15,70 cm de altura.

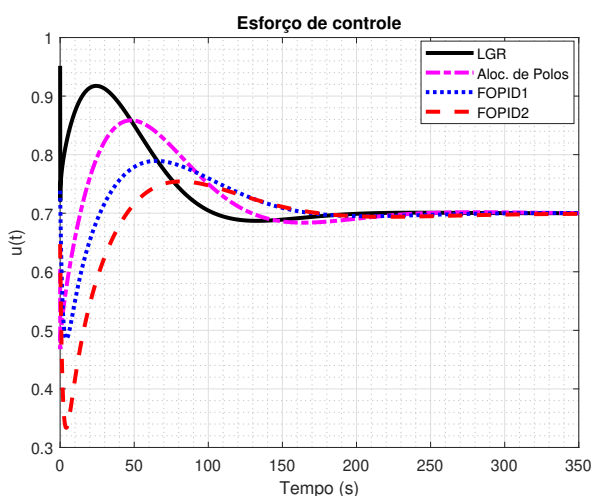


Figura 5. Esforço de controle no ponto de operação 15,70 cm de altura.

Após  $t = 400 \text{ s}$  realiza-se um aumento de  $4 \text{ cm}$  na variação da referência de altura, conforme observado na Figura 6, e o sistema passa a operar com uma altura de  $19,7 \text{ cm}$ .

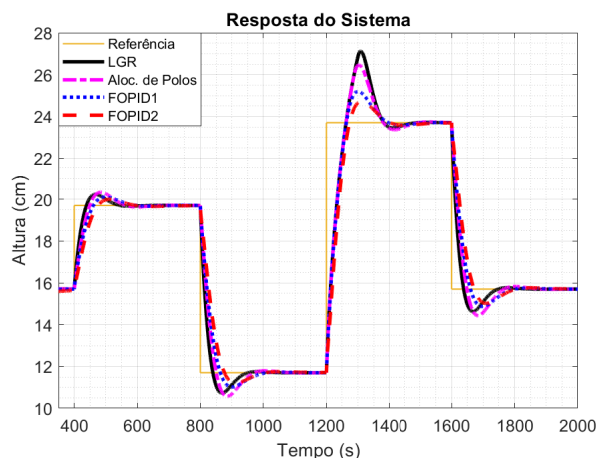


Figura 6. Resposta de saída do tanque 1 do sistema de três tanques.

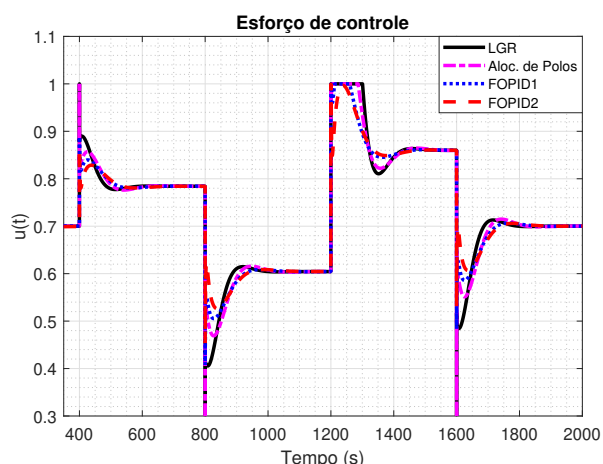


Figura 7. Esforço de controle do sistema.

Na Tabela 4 verificamos que ao realizarmos o acréscimo de  $4 \text{ cm}$  na altura do tanque, o sistema com o segundo controlador FOPID desenvolve um *overshoot* que atinge uma amplitude de  $20 \text{ cm}$ , ou seja, um sinal  $1,52\%$  maior que a referência de  $19,7 \text{ cm}$ , acomodando-se  $t = 146,90 \text{ s}$  após a variação, considerando um erro de apenas  $1\%$ . Enquanto isso, o sistema com o controlador PID clássico sintonizado pela metodologia LGR precisa de apenas  $t = 113,00 \text{ s}$  para se acomodar, porém desenvolve um máximo sobressinal com um percentual de  $2,69\%$  maior que a altura de referência, atingindo um pico de  $20,33 \text{ cm}$ .

O sinal de controle dos sistemas com os controladores clássicos apresentam uma grande saturação ao realizarmos a variação, além disso, desenvolvem um *overshoot* maior, diferentemente dos sistemas com controladores fracionários.

Em  $t = 800 \text{ s}$  realiza-se uma outra variação do ponto de operação e o sistema passa a operar com uma altura de  $11,7 \text{ cm}$ . Neste caso, conforme pode-se observar na

Figura 6, os sistemas apresentam *undershoot* e, de acordo com a Tabela 4, o controlador FOPID 2 possui a menor resposta inversa com um percentual de 4,27%, enquanto o controlador LGR apresenta a maior, com um percentual de 8,29% menor que o sinal de referência.

Após  $t = 400\text{ s}$  realiza-se uma nova variação da referência e acrescenta-se 12cm a altura do tanque, logo, o sistema passa a operar com 23,7cm. Neste caso, a resposta do sistema com os controladores PID convencionais desenvolvem um máximo sobressinal com amplitude superior a desejada de 10%, sendo de 14,43% com o controlador LGR e 11,65% com controlador via Alocação de polos. Enquanto isso, a resposta do sistema com controlador FOPID 1 e FOPID2 atingiram, respectivamente, um *overshoot* 6,33% e 4,35% maior que o sinal de referência. Porém, nota-se que todos os controladores se acomodaram entre  $t = 170\text{ s}$  e  $t = 180\text{ s}$ , de acordo com o apresentado na Tabela 4.

Analisando os esforços de controle necessários para que se tenham as respostas dos sistemas controlados no ponto de operação  $h = 23,70\text{ cm}$ , é possível perceber que nas três transições de nível o atuador é saturado por um breve período, exceto o sinal do controlador FOPID2, mas retorna a valores permitidos. Esse esforço de controle será convertido em um sinal de PWM a controlar um servo responsável pela abertura e fechamento da válvula de entrada.

Em seguida, após  $t = 400\text{ s}$ , em  $t = 1.600\text{ s}$ , realizou-se uma nova variação do sinal de referência do sistema, para que o mesmo retornasse ao seu ponto de operação inicial de 15,7 cm. Os valores de *overshoot*, *undershoot* e tempo de acomodação alcançado por cada um dos sistemas com controladores PID clássicos ou fracionários são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Resposta de saída do tanque 1 do sistema

H(cm)	Controlador	Overshoot		Undershoot		$T_s$ s
		Valor	%	Valor	%	
15,7	LGR	16,70	6,37	-	-	144,80
	Aloc.Polos	17,06	8,66	-	-	174,10
	FOPID 1	16,34	4,08	-	-	204,40
	FOPID 2	15,72	0,13	-	-	157,70
19,7	LGR	20,23	2,69	-	-	113,00
	Aloc.Polos	20,33	3,20	-	-	138,40
	FOPID 1	20,11	2,08	-	-	149,40
	FOPID 2	20	1,52	-	-	146,90
11,7	LGR	-	-	10,73	8,29	133,70
	Aloc.Polos	-	-	10,56	9,74	157,70
	FOPID 1	-	-	11,01	5,90	179,20
	FOPID 2	-	-	11,20	4,27	177,30
23,7	LGR	27,12	14,43	23,45	1,05	173,00
	Aloc.Polos	26,46	11,65	23,37	1,39	171,00
	FOPID 1	25,20	6,33	23,58	0,51	174,00
	FOPID 2	24,73	4,35	23,58	0,51	177,00
15,7	LGR	-	-	14,63	6,82	128,00
	Aloc.Polos	-	-	14,43	8,09	152,00
	FOPID 1	-	-	14,87	5,28	171,00
	FOPID 2	-	-	15,01	4,40	177,00

Para quantificar o erro da resposta do sistema em função da variação da altura, utilizam-se os critérios baseados na integral do erro, sendo ele: ISE (integral dos erros ao quadrado), ITSE (integral do erro ao quadrado vezes o

tempo), IAE (integral do módulo do erro) e ITAE (integral do módulo do erro vezes o tempo). A equação referente a cada um dos índices é mostrado em 18.

$$\begin{aligned}
 ISE &= \int_0^T e^2(t)dt \\
 IAE &= \int_0^T |e(t)|dt \\
 ITSE &= \int_0^T te^2(t)dt \\
 ITAE &= \int_0^T t|e(t)|dt
 \end{aligned} \tag{18}$$

Analisando os índices de desempenho do erro IAE, ITSE e ITAE, mostrados na Tabela 5, nota-se que ao realizarmos uma variação muito grande do ponto de operação, os controladores fracionários apresentam um menor erro, porém, nos demais casos, esses índices se encontram maiores ou próximos aos valores de erro obtidos pelos controladores convencionais. Isto ocorre pelo fato dos controladores FOPID necessitarem de um tempo maior para sua acomodação, entretanto, dentro do limite desejado de  $t = 200\text{ s}$ .

Tabela 5. índices de desempenho do erro

H(cm)	Controlador	ISE	ITSE	IAE	ITAE
19,7	LGR	0,15.10 <sup>3</sup>	2,02.10 <sup>3</sup>	92,09	3,46.10 <sup>3</sup>
	Aloc.Polos	0,22.10 <sup>3</sup>	3,98.10 <sup>3</sup>	127,24	6,03.10 <sup>3</sup>
	FOPID 1	0,23.10 <sup>3</sup>	3,79.10 <sup>3</sup>	125,79	5,40.10 <sup>3</sup>
	FOPID 2	0,31.10 <sup>3</sup>	5,21.10 <sup>3</sup>	143,91	5,65.10 <sup>3</sup>
11,7	LGR	0,61.10 <sup>3</sup>	7,66.10 <sup>3</sup>	180,08	6,54.10 <sup>3</sup>
	Aloc.Polos	0,87.10 <sup>3</sup>	14,61.10 <sup>3</sup>	245,38	10,97.10 <sup>3</sup>
	FOPID 1	0,92.10 <sup>3</sup>	14,14.10 <sup>3</sup>	243,25	9,75.10 <sup>3</sup>
	FOPID 2	1,17.10 <sup>3</sup>	19,15.10 <sup>3</sup>	274,09	10,09.10 <sup>3</sup>
23,7	LGR	2,61.10 <sup>3</sup>	86,76.10 <sup>3</sup>	520,95	32,68.10 <sup>3</sup>
	Aloc.Polos	2,48.10 <sup>3</sup>	69,25.10 <sup>3</sup>	495,22	29,78.10 <sup>3</sup>
	FOPID 1	2,27.10 <sup>3</sup>	42,04.10 <sup>3</sup>	416,14	19,41.10 <sup>3</sup>
	FOPID 2	2,71.10 <sup>3</sup>	47,31.10 <sup>3</sup>	435,43	17,98.10 <sup>3</sup>
15,7	LGR	0,61.10 <sup>3</sup>	8,09.10 <sup>3</sup>	183,65	6,95.10 <sup>3</sup>
	Aloc.Polos	0,88.10 <sup>3</sup>	15,69.10 <sup>3</sup>	252,12	11,90.10 <sup>3</sup>
	FOPID 1	0,91.10 <sup>3</sup>	14,75.10 <sup>3</sup>	248,50	10,68.10 <sup>3</sup>
	FOPID 2	1,15.10 <sup>3</sup>	19,53.10 <sup>3</sup>	280,70	11,45.10 <sup>3</sup>

A fim de avaliar o esforço sobre os elementos atuadores, utiliza-se a média do sinal de controle. Porém, nem sempre a estabilidade relativa de um sistema de controle é capaz de ser avaliado pela média, logo, utiliza-se a variância do sinal de controle para verificar a dispersão do sinal em relação à sua média. Ambas as equações, da média e da variância do sinal de controle, são mostradas em 19.

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) \\
 \sigma_{u(t)}^2 &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^N (u(k) - \bar{u})^2
 \end{aligned} \tag{19}$$

Nas quatro variações do ponto de operação realizadas, os sinais de controle se acomodaram em 0,7, 0,7862, 0,604 e 0,86 e, em todos os casos, a média dos controladores FOPID encontraram-se mais próximos a esses valores. Esta afirmação é confirmada ao avaliarmos os valores da variância do sinal de controle mostrados na Tabela 6, onde as maiores variações ocorreram com o sinal do controlador LGR e as menores com o controlador FOPID 2.



Tabela 6. Índices de desempenho do sinal de controle  $u(t)$

H(cm)	Controlador	Média	Variância
19,7	LGR	0,7964	0,0126
	Aloc. Polos	0,7956	0,0091
	FOPID 1	0,7943	0,0066
	FOPID 2	0,7922	0,0049
11,7	LGR	0,5793	0,0407
	Aloc. Polos	0,5812	0,027
	FOPID 1	0,5846	0,0165
	FOPID 2	0,5892	0,0106
23,7	LGR	0,8962	0,0647
	Aloc. Polos	0,8939	0,0576
	FOPID 1	0,8907	0,0437
	FOPID 2	0,8854	0,0315
15,7	LGR	0,6742	0,0465
	Aloc. Polos	0,6756	0,0326
	FOPID 1	0,6783	0,0218
	FOPID 2	0,6819	0,0151

## 7. CONCLUSÃO

Ao longo desse trabalho, foram apresentados o modelo do sistema de três tanques acoplados. Inicialmente foi determinado o modelo não linear utilizado nas simulações e em seguida foi obtido o modelo linear utilizado no projeto dos controladores fracionários e convencionais.

Foram projetados dois controladores de ordem inteira e dois controladores de ordem fracionária. Os controladores convencionais foram obtidos por meio da metodologia LGR e alocação de polos e foram comparados com controladores fracionário FOPID1 e FOPID2 sintonizados pelo método de Margem de Ganho e Margem de Fase, sendo que, o primeiro possui apenas o componente derivativo fracionário e o segundo possuía a componente integral e derivativa.

Apesar do tempo de acomodação dos controladores desenvolvidos pela metodologia convencional serem menores, a resposta do sistema com os controladores de ordem fracionária desenvolveram picos de *overshoot* e *undershoot* menores, acomodando-se dentro do tempo desejado.

Além disso, os sinais de controle dos controladores clássicos apresentaram picos de saturação em todas as variações de referência realizadas, equanto apenas um dos casos, quando realiza-se uma variação de 12 cm do ponto de operação, o sinal do controlador FOPID 1 satura. Porém, em todos os demais casos, o esforço de controle desenvolvido pelos controladores fracionários foi mínimo ao compararmos com os de ordem inteira.

Sendo assim, através dos resultados apresentados neste artigo, conclui-se que os controladores fracionários se apresentam como uma ferramenta em potencial para melhorar o desempenhos de processos químicos e industriais.

## REFERÊNCIAS

Aidan O'Dwyer, Ramon Vilanova, A.V. (2012). *PID Control in the Third Millennium: Lessons Learned and New Approaches*. Advances in industrial control. Springer-Verlag London, 1 edition.

Banu, U.S. and Nasir, A.W. (2015). Design, analysis and performance evaluation of fractional order

proportional integral for three interacting tank process in frequency domain considered as third order system. *IFAC-PapersOnLine*, 48(30), 179–184. doi:https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.12.374. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315030165>. 9th IFAC Symposium on Control of Power and Energy Systems CPES 2015.

Chuong, V.L., Vu, T.N.L., and Linh, L. (2018). Fractional pi control for coupled-tank mimo system. In *2018 4th International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD)*, 347–352. doi:10.1109/GTSD.2018.8595675.

Dale E. Seborg, Thomas F. Edgar, D.A.M. (2003). *Process Dynamics and Control*. Wiley, 2 edition.

Duarte Valério, J.S.d.C. (2013). *An Introduction to Fractional Control*. IET Control Engineering Series 91. The Institution of Engineering and Technology.

Gene F. Franklin, J. David Powell, A.E.N. (2002). *Feedback Control of Dynamic Systems [Solutions]*. Prentice Hall, 4 edition.

Gulzar, M.M., Munawar, M., Dewan, Z., Salman, M., and Iqbal, S. (2020). Level control of coupled conical tank system using adaptive model predictive controller. 236–240. doi:10.1109/HONET50430.2020.9322842. 2020 IEEE 17th International Conference on Smart Communities: Improving Quality of Life Using ICT, IoT and AI (HONET).

Gurumurthy, G. and Das, D. (2019). A semi-analytical approach to design a fractional order proportional-integral-derivative (fopid) controller for a tito coupled tank system. 233–236. doi:10.1109/APCCAS47518.2019.8953172. 2019 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems (APCCAS).

Kenneth S. Miller, B.R. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1 edition.

Marlin, T.E. (2015). *Process Control- Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. McGraw-Hill Education, 2 edition.

Patel, H.R. and Shah, V.A. (2019). Comparative study between fractional order pi  $\lambda d \mu$  and integer order pid controller: A case study of coupled conical tank system with actuator faults. 390–396. doi:10.1109/SYSTOL.2019.8864772. 2019 4th Conference on Control and Fault Tolerant Systems (SysTol).

Richard C. Dorf, R.H.B. (2007). *Modern control systems*. Prentice Hall, 11 edition.

Wiraszka, M., Wierchowski, M., and M., W. (2019). State-dependent fractional-order pi control strategy for a nonlinear water tank system. 1–6. doi:10.1109/CarpathianCC.2019.8765922. 2019 20th International Carpathian Control Conference (ICCC).