

Identificação de um Sistema de Bombeamento Hidráulico utilizando MGGP multi-objetivo [★]

Frederico Lucas de Oliveira Mota ^{*} Henrique Carvalho de Castro ^{*}
Bruno Henrique Groenmer Barbosa ^{**}

^{*} Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e
Automação, Universidade Federal de Lavras, MG (e-mail:
frederico.mota1@estudante.ufla.br, henriquec.castro@outlook.com)

^{**} Departamento de Automática, Universidade Federal de Lavras,
MG, (e-mail: brunohb@ufla.br)

Abstract: The structure selection problem is an essential step in the system identification process. In this work, we seek to model a 15 kW hydraulic pumping system, in static and dynamic regime, using polynomial NARX/NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs) representations. To carry out the structure selection task, an evolutionary MGGP (Multi-Gene Genetic Programming) algorithm is implemented to minimize three objectives, namely: i. the error of the model's static curve, ii. the one step ahead prediction error (dynamic regime error), and iii. the number of regressors in the model. To select the fittest individual in Pareto (decision making process), the results under static and dynamic (validation data) conditions are taken into account. The selected NARX model has 25 regressors, with a static error of 0.0355 [mlc^2], a dynamic error (training data) of 1.349 [mlc^2] and a dynamic error (validation data) of 1.208 [mlc^2]. The NARMAX model selected has 19 process regressors and 2 noise regressors, with a static error of 0.0479 [mlc^2], dynamic error (training data) of 1.869 [mlc^2] and dynamic error (validation data) of 1.238 [mlc^2]. The models found present satisfactory results in dynamic and static regimes when compared to other works (over the same database). It demonstrates that the multi-objective MGGP is a promising tool for selecting structures.

Resumo: O problema de seleção de estrutura é uma etapa essencial do processo de identificação de sistemas. Neste trabalho, busca-se modelar um sistema de bombeamento hidráulico em regime estático e dinâmico utilizando as representações polinomiais NARX/NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*). A fim de realizar a tarefa de seleção de estruturas, um algoritmo evolutivo MGGP (*Multi-Gene Genetic Programming*) é implementado com a finalidade de minimizar três objetivos, sendo eles: i. o erro da curva estática do modelo, ii. o erro de predição um passo à frente (erro em regime dinâmico), e iii. o número de regressores do modelo. Para apoiar a escolha do indivíduo mais apto do conjunto Pareto, é feita uma análise dos resultados em regime estático e em regime dinâmico (dados de validação). O modelo NARX selecionado apresenta 25 regressores, com erro em regime estático de 0,0355 [mlc^2], erro em regime dinâmico (treino) de 1,349 de [mlc^2] e erro em regime dinâmico (validação) de 1,208 [mlc^2]. Já o modelo NARMAX selecionado apresenta 19 regressores de processo e 2 regressores relacionados com o ruído, com erro em regime estático de 0,0479 [mlc^2], erro em regime dinâmico (treino) de 1,869 de [mlc^2] e erro em regime dinâmico (validação) de 1,238 [mlc^2]. Os modelos encontrados apresentam resultados satisfatórios em regimes dinâmico e em estático quando comparados com outros trabalhos (utilizando o mesmo banco de dados). Isso demonstra que o MGGP multi-objetivo é uma boa ferramenta para seleção de estruturas.

Keywords: Nonlinear system identification; Evolutionary algorithms; Polynomial NARMAX models; MGGP;

Palavras-chaves: Identificação de sistemas não-lineares; Algoritmos Evolucionários; Modelos NARMAX polinomiais; MGGP;

1. INTRODUÇÃO

A identificação de sistemas é o processo pelo qual é possível gerar modelos dinâmicos de um sistema real (*e.g.*, processo de manufatura, sistema de produção de energia e mercado de ações) a partir de seus dados de entrada e/ou saída (Ljung, 1999; Söderström e Stoica, 1988). Tais modelos podem ser usados tanto para a previsão do comportamento do sistema real quanto para a implementação de controladores (Garg et al., 2017). O processo de identificação de sistemas possui, de forma geral, cinco etapas, quais sejam (Aguirre, 2015): *i.* testes dinâmicos, *ii.* escolha da representação matemática do modelo, *iii.* determinação da estrutura do modelo, *iv.* estimação de parâmetros, *v.* validação do modelo.

Dentro do universo de representações existentes, os modelos polinomiais NARMAX (*Non-linear AutoRegressive Moving Average eXogenous variables*) (Leontaritis e Billings, 1985) vêm se destacando como um recurso efetivo na representação de uma ampla gama de modelos não-lineares (Yassin et al., 2016). Nesse contexto, um dos principais desafios é a seleção da estrutura adequada do modelo, ou seja, a escolha dos termos que, juntos, melhor representem o sistema. O ponto chave dessa etapa é a seleção de uma estrutura que seja o mais simples possível, porém complexa o suficiente para capturar a dinâmica subjacente aos dados (Aguirre e Letellier, 2009). Um dos critérios amplamente utilizados para essa tarefa é o critério ERR (*Error Reduction Ratio*) (Billings et al., 1989), que é uma medida da capacidade que cada termo possui, isoladamente, em explicar a variância do sinal de saída. Como exemplo de algoritmos utilizados para seleção de estrutura por meio do critério ERR pode-se citar o FROE (*Forward Regression Orthogonal Estimator*) (Billings et al., 1989) e outros métodos baseados em mínimos quadrados ortogonais (Chen et al., 1989). Estes métodos possuem limitações quando na presença de certas características de sinais de entrada e/ou ruído (Piroddi e Spinelli, 2003). Ademais, tais técnicas sofrem com a chamada *maldição da dimensionalidade* quando se amplia o espaço de busca para elevados graus de não linearidade e dependências de longo prazo.

Alternativamente, a seleção de estrutura em modelos NARMAX pode ser realizada por meio de Algoritmos Evolucionários (AEs), como os Algoritmos Genéticos (GAs) (Holland, 1975; Goldberg e Holland, 1988) e a Programação Genética (GP) (Koza, 1992) — para mais informações veja Li e Jeon (1993) e Madar et al. (2005). Outro algoritmo bastante flexível para ser utilizado em identificação de sistemas é o MGGP (do inglês, *Multi-Gene Genetic Programming*) (Hinchliffe et al., 1996; Hinchliffe, 2001; Hinchliffe e Willis, 2003). Este pode ser visto como um GA no qual cada gene é composto por uma GP. Uma outra ferramenta proposta por Hinchliffe et al. (1996) é o operador *back-shift*, que é capaz de incrementar o atraso de uma variável. O uso dessa ferramenta permite a evolução de programas genéticos sem a necessidade de montar uma matriz com todos os possíveis termos, o que evita a *maldição da dimensionalidade*. Hafiz et al. (2019) apresentou um *framework* multi-objetivo para seleção de

estruturas em sistemas polinomiais não-lineares, onde vários AEs, *e.g.*, *Nondominated Sorting Genetic Algorithm-II* (NSGA-II) (Deb et al., 2002), *Strength Pareto Evolutionary Algorithm-II* (SPEA-II) (Zitzler et al., 2001) e *Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition* (MOEA/D) (Zhang e Li, 2007), são submetidos a diversos testes com parâmetros qualitativos e quantitativos. É constatado que esses algoritmos possuem a capacidade de encontrar estruturas adequadas para sistemas não-lineares.

Este artigo vem como continuação de uma série de trabalhos que buscam estudar a utilização de AEs em identificação de sistemas (Castro e Barbosa, 2019, 2020; Mota et al., 2020). Aqui, é proposto um algoritmo multi-objetivo utilizando o MGGP (MGGPMO) para a identificação de um sistema de bombeamento hidráulico. São utilizados três objetivos a serem minimizados: *i)* o erro de previsão um passo à frente dos dados dinâmicos, *ii)* o erro da curva estática e *iii)* o tamanho do modelo.

O presente trabalho está estruturado como se segue. Na próxima seção serão apresentados os materiais e fundamentação teórica utilizados no trabalho. Na Seção 3 é apresentada a metodologia aplicada para obtenção dos resultados é apresentada. Na Seção 4 são apresentados os resultados e os mesmos são discutidos. Por fim, na Seção 5, as conclusões são dispostas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelos polinomiais NARMAX

Modelos NARMAX têm sua saída obtida a partir de valores de entrada e saída do sistema atrasados. Um modelo polinomial NARMAX (Leontaritis e Billings, 1985) tem sua estrutura definida pela seguinte expressão:

$$y(k) = f^l(y[k-1], \dots, y[k-n_y], u[k-1], \dots, u[k-n_\mu], e[k-1], \dots, e[k-n_e]) + e[k] \quad (1)$$

em que f é uma função polinomial com grau de não linearidade l , $y[k]$, $u[k]$ e $e[k]$ são a saída, entrada e o ruído aditivo do sistema, cujos atrasos máximos são representados por n_y , n_μ e n_e , respectivamente.

Observe que existe uma relação entre o aumento da ordem de não-linearidade, os valores máximos de atrasos da saída e entrada e o aumento, de forma exponencial, do número de termos presentes no modelo. Esse fato é significativo pois, uma estrutura que possui uma quantidade excessiva de termos é um modelo sobreparametrizado e, como apontado por Aguirre e Billings (1995), isso pode acarretar em um custo computacional desnecessário e a representação de dinâmicas não existentes no sistema real. Fica evidente a importância de se manter o modelo parcimonioso, ou seja, com um número reduzido de termos (regressores) porém complexo o suficiente para representar a dinâmica do sistema.

2.2 Mínimos Quadrados Estendido

Modelos NARX são lineares nos parâmetros, logo seus parâmetros podem ser estimados pelo método dos Mínimos Quadrados (MQ), como segue:

* Este trabalho foi financiado pela FAPEMIG, CAPES e CNPq.

$$\hat{\theta}_{MQ} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T y, \quad (2)$$

em que Ψ é a matriz de regressores, y é o vetor de dados de saída e $\hat{\theta}_{MQ}$ são os parâmetros a serem estimados por MQ.

Em certos tipos de problemas, o MQ estima parâmetros polarizados, sendo necessária a identificação de modelo de ruído. A partir desse ponto, modelos NARX se tornam NARMAX e seus parâmetros podem ser estimados por meio do método dos Mínimos Quadrados Estendido (MQE) (Young, 1968; Aguirre, 2015). Nesse caso, a matriz de regressores é estendida utilizando o modelo de ruído no vetor de resíduos (ξ), tal que:

$$\Psi^* = [\Psi \ \Psi_\xi]. \quad (3)$$

Um novo vetor de parâmetros $\theta^* = [\theta \ \theta_\xi]$ é definido e seus valores são estimados via MQ. Este processo deve ser iterativo e o vetor de resíduos calculado a cada iteração.

2.3 Algoritmos Evolucionários

Os AEs são algoritmos de otimização baseados no processo natural da evolução das espécies por meio dos fenômenos de seleção, mutação e reprodução que ocorre em uma população de indivíduos (Barbosa et al., 2019). Apesar de uma grande variedade de algoritmos serem propostos na literatura nessa área, AEs apresentam um comportamento padrão: inicia-se uma população de indivíduos aleatórios (cromossomos) que, a cada geração, tem os indivíduos mais aptos selecionados e recombinados (cruzamento e mutação) a fim de gerar indivíduos ainda melhores. Três AEs são importantes para o entendimento deste artigo: *Algoritmo Genético* (GA) (Holland, 1975; Goldberg e Holland, 1988), *Programação Genética* (GP) (Koza, 1992; Eiben et al., 2003; Poli et al., 2008) e *Programação Genética Multi-Gene* (MGGP) (Hinchliffe et al., 1996).

Na área de identificação de sistemas, GA é tradicionalmente utilizado com representação binária, ou seja, um indivíduo é representado por um vetor binário no qual cada *bit* representa um termo candidato ao modelo. Um *bit* igual a 1 representa a presença daquele termo no modelo, e um *bit* igual a 0 representa a ausência daquele termo no modelo. O tamanho do indivíduo é igual à quantidade de termos candidatos ao modelo. Por exemplo, em um espaço de busca no qual existem quatro candidatos a termos do modelo, quais sejam $y[k-1]$, $y[k-2]$, $u[k-1]$ e $u[k-2]$, um indivíduo I que represente o modelo NARX $y[k] = 0,2y[k-1] + 0,1u[k-1]$ pode ser codificado como $I = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$.

GP é um algoritmo evolucionário que dispensa a necessidade de prévia especificação da estrutura da solução. Os indivíduos da população são programas de computador que sintetizam funções matemáticas e cuja representação mais comum é a representação em *árvore*. Nela, a partir de um nó raiz, a árvore é dividida em vários ramos cujos nós internos possuem funções aritméticas (+, -, *, /) e cujos terminais (ou folhas) possuem constantes e variáveis.

Finalmente, MGGP é baseado em métodos nos quais modelos são construídos por meio da combinação de funções separadas, chamadas de funções de base. MGGP pode ser expresso como:

$$g(\varphi, \Theta) = \sum_{i=1}^m \theta_i g_i(\varphi), \quad (4)$$

em que m é o número de funções de base, g_i representa uma função individual e θ_i representa os parâmetros do modelo. Em termos evolucionários, esse algoritmo pode ser visto como um GA no qual cada gene é composto por um GP como função de base (veja mais em Hinchliffe (2001) e Hinchliffe e Willis (2003)).

Como AEs são algoritmos de otimização, eles podem ser classificados de acordo com o número de objetivos a serem otimizados, podendo ser mono-objetivos (apenas um objetivo a ser maximizado ou minimizado) ou multi-objetivos, isto é, há mais de um objetivo a ser otimizado. Um problema de otimização multi-objetivo é definido da seguinte forma (Aguirre et al., 2010):

$$\begin{aligned} \min \quad & J_1(\theta), J_2(\theta), \dots, J_n(\theta) \\ \text{sujeito a: } & \theta \in \Theta, \end{aligned} \quad (5)$$

em que $J_i(\theta)$, $i=1,2,3\dots n$, são funções custo, θ são parâmetros a serem otimizados e Θ é o conjunto factível. Normalmente, em problemas multi-objetivo as funções custo são conflitantes, isto é, existe uma *trade-off* entre os objetivos e, em vez de se obter uma única solução ótima, um conjunto de soluções é encontrado (Freitas et al., 2021). Nesse conjunto de soluções não existe um modelo único que minimize todos os objetivos de forma ótima. No entanto, existe o conjunto Pareto-ótimo, que é composto pelas soluções não dominadas. Uma solução A é dita dominante sobre uma solução B se cada $J_i(A)$ for menor ou igual ao respectivo $J_i(B)$ e houver pelo menos um $J_i(A)$ menor que o respectivo $J_i(B)$:

$$A \succ B \Rightarrow \{A, B \in \Theta \mid \mathbf{J}(A) \leq \mathbf{J}(B), \exists J_i(A) < J_i(B)\}. \quad (6)$$

Esses processos de otimização podem ser feitos por um grande número de algoritmos de inteligência computacional, incluindo AEs, *i.e.*, NSGA-II (Deb et al., 2000) e SPEA-II (Zitzler et al., 2001), para citar alguns. Após realizar uma otimização e obter a fronteira de Pareto ótima, a próxima etapa é escolher uma das soluções (modelos) da fronteira como mais adequada para a aplicação (critério de decisão). Esta escolha está intimamente relacionada com o problema abordado e o julgamento do projetista.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Banco de dados

A base de dados utilizada neste trabalho, a fim de realizar a modelagem de um sistema de bombeamento hidráulico, foi obtida em Barbosa et al. (2011). Esta possui como entrada a referência de velocidade das bombas, mensuradas em rotações por minuto [rpm], e como saída, a pressão do sistema mensurada em metro de coluna líquida [mlc]. A base de dados possui dois tipos de informação sobre o sistema, isto é, dados de seu comportamento em regime dinâmico e em regime estático.

Para se obter a parte dinâmica dos dados, um sinal de excitação com amplitude variável foi aplicado na entrada do sistema, permitindo que diferentes pontos de operação da bomba sejam atingidos e, posteriormente, modelados pelas técnicas de identificação de sistemas. Foram geradas $N = 4000$ amostras para o conjunto de dados dinâmico, onde $N = 3200$ são utilizadas na modelagem do sistema e $N = 800$ em sua validação. A Figura 1a apresenta os dados

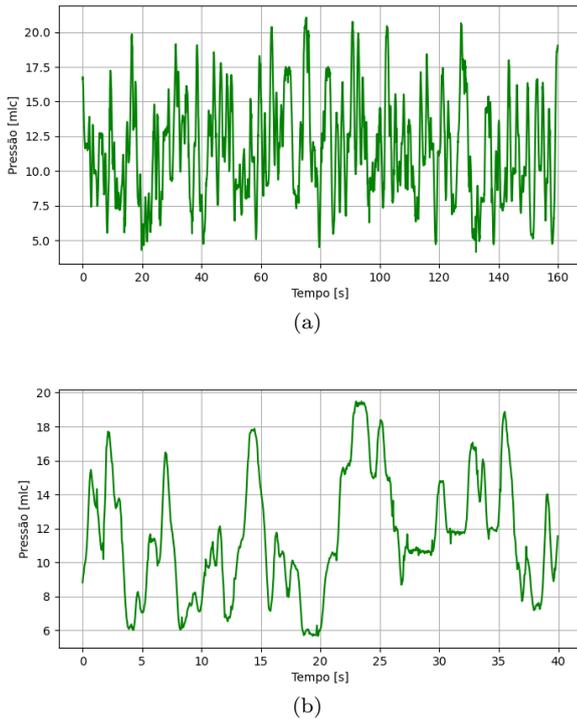


Figura 1. Dados do ensaio dinâmico para (a) modelagem e para (b) validação.

utilizados durante a modelagem do sistema e a Figura 1b apresenta os dados de validação.

Já a parte estática das amostras é formada por dez ensaios que representam diferentes pontos de operação do sistema. Nesses ensaios, a velocidade aplicada na entrada do sistema varia de 750 [rpm] a 1650 [rpm], com um passo de 100 [rpm] entre os ensaios. É importante ressaltar que durante a execução de cada um dos ensaios, o valor de entrada da bomba é mantido constante de modo que, após um período de tempo, o sistema entre em estabilidade e sua saída não possua mais nenhum componente transiente. Sendo assim, a pressão de saída do sistema foi registrada para cada um dos pontos de operação. Por fim, o mapeamento entre valores de entrada e saída do sistema de bombeamento em regime estático pode ser visualizado na Tabela 1 e, de forma gráfica, a curva resultante pode ser observada na Figura 2.

Tabela 1. Dados dos ensaios estáticos.

Velocidade [rpm]	Pressão [mlc]
750	3.92
850	5.18
950	6.58
1050	8.26
1150	9.94
1250	11.90
1350	14.00
1450	16.10
1550	18.48
1650	20.86

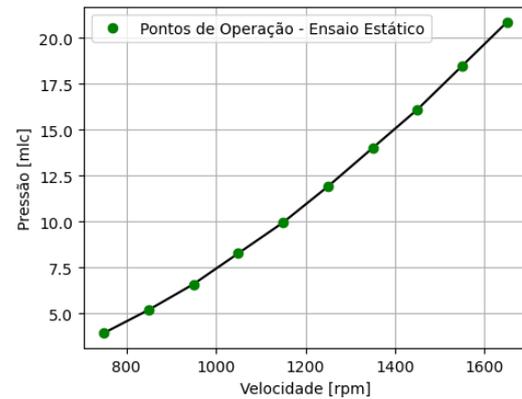


Figura 2. Dados do ensaio estático.

3.2 Algoritmo proposto

Objetivando encontrar um modelo NARX/NARMAX que represente o sistema de bombeamento hidráulico, tanto em regime dinâmico quanto em regime estático, é proposto o uso do algoritmo MGGP (Hinchliffe et al., 1996) em uma abordagem multi-objetiva. São três objetivos propostos: *i.* minimizar o erro em regime dinâmico (erro de predição um passo a frente), *ii.* minimizar erro da curva estática (simulação livre) e *iii.* minimizar o número de termos (regressores) do modelo.

Para que o MGGP seja capaz de buscar por modelos polinomiais, o conjunto de funções primitivas (correspondentes aos nós internos de um GP) é restrito ao operador *back-shift* e ao operador de multiplicação, de tal forma que cada gene represente um único termo do polinômio cujo grau de não linearidade é determinado pela multiplicação entre variáveis. O operador *back-shift* é uma função que realiza atrasos temporais em uma variável (Hinchliffe e Willis, 2003). A Figura 3 apresenta um indivíduo MGGP que representa a função $y[k] = \theta_1 y[k-1] + \theta_2 y[k-2] + \theta_3 y[k-2]u[k-1]$. Note que o operador *back-shift* q^{-1} realiza um atraso temporal de uma amostra sobre a variável terminal.

Todos os parâmetros utilizados na implementação do MGGP estão dispostos na Tabela 2. Dentre eles, destacam-se a altura máxima do GP, que restringe o máximo grau de não-linearidade e atrasos máximos, o número máximo de termos e o conjunto de funções de atraso. Diferentemente do Algoritmos Genéticos, o MGGP não possui um tamanho fixo para o cromossomo e, desta forma, é necessário que o projetista defina o número máximo de termos que o modelo pode alcançar, visando evitar um custo computacional desnecessário. Já o conjunto de funções de atraso possibilita diferentes configurações de atraso que um termo pode possuir, dada uma mesma altura de programa. Por exemplo, caso a altura máxima do GP for definida como 3 e o conjunto de funções de atraso ser formado apenas por q^{-1} , então os modelos encontrados representaram no máximo um termo com atraso de 4, isto é, $q^{-1}q^{-1}q^{-1}x[k-1] = x[k-4]$.

3.3 Critério de seleção e validação

Após a execução do algoritmo proposto são obtidos dois Pareto ótimos, um com modelos NARX e outro com mo-

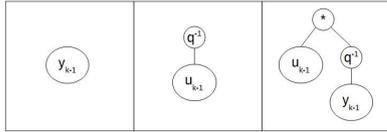


Figura 3. Representação de um indivíduo MGPP.

delos NARMAX. É importante mencionar que é impossível distinguir os valores de erro dos modelos abaixo de $0,031 [mlc^2]$ do valor nulo, pois a incerteza do sensor de pressão do sistema de bombeamento é de $\pm 0.175 [mlc]$ (Barbosa et al., 2011; Mota et al., 2020).

A seleção do indivíduo mais apto no Pareto é feita a partir da análise dos resultados em regime estático e de simulação livre com dados de validação em regime dinâmico. Em que, primeiramente, todos os modelos do Pareto ótimo são ordenados de forma crescente com relação ao erro estático e são descartados todos os modelos que possuem valores de erro superiores a duas vezes o erro do sensor ($0,062 [mlc^2]$) — critério definido pelos autores como maior erro estático aceitável. A partir disso, é escolhido o modelo que possui o menor erro dinâmico dentre os modelos restantes.

4. RESULTADOS

A Tabela 3 apresenta os erros dos modelos NARX (equação (7)) e NARMAX (equação (8)) selecionados após a execução do algoritmo implementado, além de modelos encontrados em outros trabalhos para fim de comparação. Os modelos referenciados como Barbosa (15) e Barbosa (17), são retirados de Barbosa et al. (2011), sendo que ambos os modelos tiveram sua estrutura encontrada por meio de OLS/ERR. Já o modelo referido como Castro (11) foi retirado de Castro e Barbosa (2020), em que foi utilizado uma hibridização MGPP/ERR. Por fim, também foi utilizado o modelo referido como Mota (7), que teve sua estrutura encontrada por uma abordagem multi-objetiva por meio do algoritmo NSGA-II, com os mesmos três objetivos utilizados neste trabalho, porém com representação binária. Os valores identificados como J_S (Ident.), J_S (Val.), J_{SF} e N_P são respectivamente o erro médio quadrático (EMQ) em simulação livre do regime dinâmico, utilizando dados de treinamento, o EMQ em simulação livre do regime dinâmico, utilizando dados de validação, o EMQ em simulação livre do regime estático e o número de termos dos modelos. Este último é apresentado com dois índices $i + j$, em que i é a quantidade de termos no modelo NARX e j é a quantidade de termos MA no modelo.

Tabela 2. Parâmetros do algoritmo.

População	100
Probabilidade de cruzamento	0,9
Probabilidade de mutação	0,1
Nº de gerações	500*
Altura máxima do PG	5
Nº máximo de termos	20
Elitismo	10%
Funções de atraso	$q1, q2, q3$
Funções primitivas	multiplicação

* Ao final de cada ciclo de 50 gerações, a elite da população é salva e incluída na população inicial do próximo ciclo.

$$\begin{aligned}
 y_{NARX}[k] = & \theta_1 y[k-7] + \theta_2 u[k-4] + \theta_3 y[k-7]u[k-6] \\
 & + \theta_4 u[k-6] + \theta_5 y[k-1]y[k-3] \\
 & + \theta_6 y[k-1]y[k-2] + \theta_7 y[k-1]u[k-4] \\
 & + \theta_8 y[k-4]u[k-7] + \theta_9 y[k-6]u[k-4] \\
 & + \theta_{10} y[k-6]y[k-3] \\
 & + \theta_{11} y[k-3]u[k-5]y[k-4] \\
 & + \theta_{12} y[k-1]^2 y[k-2] \\
 & + \theta_{13} y[k-3]^2 u[k-4] \\
 & + \theta_{14} y[k-2]y[k-4]y[k-7] \\
 & + \theta_{15} y[k-1]y[k-4]u[k-6] \\
 & + \theta_{16} u[k-6]y[k-6] \\
 & + \theta_{17} y[k-1]u[k-5]u[k-12] \\
 & + \theta_{18} u[k-4]^3 \\
 & + \theta_{19} u[k-5]y[k-4]u[k-10] \\
 & + \theta_{20} y[k-3]^2 u[k-4]^2 \\
 & + \theta_{21} y[k-3]y[k-4]y[k-7]u[k-10] \\
 & + \theta_{22} y[k-2]y[k-3]y[k-5]u[k-4] \\
 & + \theta_{23} y[k-2]y[k-3]^2 u[k-6] \\
 & + \theta_{24} y[k-4]y[k-5]u[k-5]y[k-6] \\
 & + \theta_{25} y[k-1]^3 y[k-5]u[k-4]
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 y_{NARMAX}[k] = & \theta_1 y[k-2]u[k-4] + \theta_2 y[k-1]u[k-7] \\
 & + \theta_3 y[k-1]u[k-4] + \theta_4 y[k-6]u[k-10] \\
 & + \theta_5 u[k-11] + \theta_6 u[k-10] \\
 & + \theta_7 y[k-1]y[k-3] + \theta_8 u[k-5] \\
 & + \theta_9 y[k-1]u[k-5]u[k-12] + \theta_{10} u[k-4] \\
 & + \theta_{11} y[k-5]^2 + \theta_{12} y[k-3]^2 u[k-4] \\
 & + \theta_{13} y[k-5]y[k-10]u[k-5] \\
 & + \theta_{14} u[k-5]^2 u[k-10] \\
 & + \theta_{15} y[k-6]y[k-9]u[k-12] \\
 & + \theta_{16} y[k-1]^2 y[k-2] \\
 & + \theta_{17} y[k-3]^2 u[k-4] + \theta_{18} y[k-3]^2 y[k-4] \\
 & + \theta_{19} u[k-4]^3 + \theta_{20} y[k-6]e[k-1]^2 \\
 & + \theta_{21} y[k-7]u[k-4]^2 e[k-6]
 \end{aligned} \tag{8}$$

O modelo NARX e o modelo NARMAX se apresentam competitivos com os pares apresentado na Tabela 3, tanto em regime estático quanto em regime dinâmico, excetuando-se nesta comparação o modelo Mota (7), o qual possui valores de erro em simulação livre, em dados de validação, 1,79 e 1,74 vezes maiores que os valores encontrados para os modelos NARX e NARMAX, respectivamente, e o modelo Barbosa (15), que também possui um desempenho inferior em ambos os regimes, apresentando um erro em regime estático 45 vezes maior, com relação ao modelo NARX, e 33,48 vezes maior, com relação ao modelo NARMAX, e um erro em regime dinâmico para dados de validação 1,75 vezes maior, quando comparado ao modelo NARX, e 1,70 vezes maior, quando comparado ao modelo NARMAX. Outro modelo que se destaca ao observar os resultados apresentados é o modelo Castro (11), o qual possui o menor erro em regime dinâmico, para ambos os dados de treinamento e validação, porém possui um número elevado de termos (25 NARX e 20 MA) quando comparado aos demais. Mota (7) apresenta o menor erro em regime estático e o menor número de regressores, porém com um erro em regime dinâmico mais elevado. Além disso, há de se lembrar da incerteza do sensor ($\pm 0.175 [mlc]$), o que **não garante** a superioridade de Mota (7), em regime estático, sobre os modelos *narx* (7) ou *narmax* (8).

Tabela 3. Resultados - J_S representa erros de simulação livre em regime dinâmico (treino e validação), J_{SF} representa erro em regime estático e NP representa o números de termos no modelo.

Modelo	$J_S(\text{Ident.})$	$J_S(\text{Val.})$	J_{SF}	N_P
Barbosa (15)	2,611	2,116	1,6040	17 + 2
Barbosa (17)	1,510	1,104	0,0603	23 + 2
Castro (11)	1,221	0,997	0,1542	25 + 20
Mota (7)	2,668	2,165	0,0066	6 + 4
narrx (7)	1,349	1,208	0,0355	25 + 0
narmax (8)	1,869	1,238	0,0479	19 + 2

Comparando os modelos NARX e NARMAX, obtidos por meio do MGPP, é possível observar que o modelo sem regressores MA tem um desempenho em regime dinâmico, para dados de treinamento, 27,8% melhor, porém para os dados de validação apresentam comportamento tecnicamente semelhantes, fato que também ocorre em regime estático. Além disso, o modelo NARMAX apresenta uma quantidade inferior de regressores (19 NARX e 2 MA) quando comparado ao modelo NARX (25 NARX e 0 MA).

Os resultados em simulação livre em regime dinâmico (com dados de validação), que estão expostos na Tabela 3, para ambos os modelos encontrados neste trabalho (NARX e NARMAX), são apresentados graficamente na Figura 4, para melhor entendimento.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo encontrar modelos NARX e NARMAX que representem um sistemas de bombeamento hidráulico por meio de um algoritmo MGPP multi-objetivo. Para resolver o problema de otimização de estruturas, três objetivos foram utilizados: *i) o erro de predição um passo a frente dos dados dinâmicos, ii) o erro da curva estática e iii) o tamanho do modelo.* Os resultados são comparados com modelos de outros trabalhos que utilizaram o mesmo banco de dados. O algoritmo proposto se mostrou competitivo com relação aos modelos obtidos por meio de outras técnicas.

Importante ressaltar que este trabalho apresenta quatro critérios de desempenho, quais sejam: erro em simulação livre de treinamento ($J_S(\text{Ident.})$), erro em simulação livre de validação ($J_S(\text{Val.})$), erro estático (J_{SF}) e quantidade de termos no modelo (N_P). Os critérios a serem levados em consideração para a escolha do modelo dependem dos objetivos e restrições de cada problema. Por exemplo, podem haver situações em que o erro estático reduzido é mais importante que o dinâmico. Além disso, se o usuário não possui limitações em seus recursos computacionais, a quantidade de termos presente no modelo pode ser insignificante. Sendo assim, a ponderação entre os critérios apresentados que foi utilizada neste trabalho podem ser ainda mais explorada em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

Aguirre, L.A. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares: Teoria e Aplicação*. Editora UFMG, 4ª edição.
 Aguirre, L.A., Barbosa, B.H.G., e Braga, A.P. (2010). Prediction and simulation errors in parameter estimation

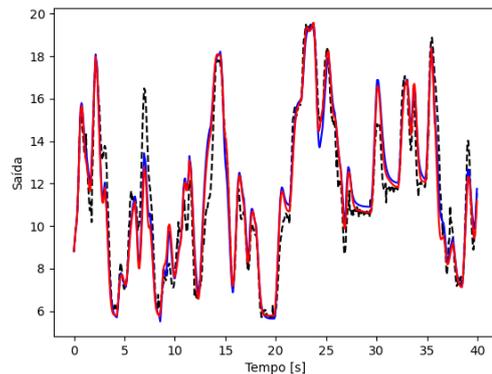


Figura 4. Comparação entre dados reais (em preto tracejado), Modelo NARX (em azul) e Modelo NARMAX (em vermelho) para os dados dinâmicos de validação (Simulação Livre).

for nonlinear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(8), 2855 – 2867.
 Aguirre, L.A. e Billings, S. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International journal of control*, 62(3), 569–587.
 Aguirre, L.A. e Letellier, C. (2009). Modeling nonlinear dynamics and chaos: a review. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
 Barbosa, B.H.G., Aguirre, L.A., e Braga, A.P. (2019). Piecewise affine identification of a hydraulic pumping system using evolutionary computation. *IET Control Theory & Applications*, 13(9), 1394–1403.
 Barbosa, B.H.G., Aguirre, L.A., Martinez, C.B., e Braga, A.P. (2011). Black and gray-box identification of a hydraulic pumping system. *IEEE Transactions on control systems technology*, 19(2), 398–406. . Data Set: <http://www.aia.ufla.br/home/filesdatasets/> -Accessed:2019-11-15.
 Billings, S., Chen, S., e Korenberg, M. (1989). Identification of mimo non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International journal of control*, 49(6), 2157–2189.
 Castro, H.C. e Barbosa, B.H.G. (2019). Algoritmos multi-objetivos para detecção de estruturas em modelos NARX utilizando técnicas PEM e SEM. *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
 Castro, H. e Barbosa, B.H.G. (2020). Multi-gene genetic programming for structure selection of polynomial NARMAX models. *Anais da Sociedade Brasileira de Automática*.
 Chen, S., Billings, S.A., e Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of control*, 50(5), 1873–1896.
 Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., e Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. In *International conference on parallel problem solving from nature*, 849–858. Springer.
 Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., e Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2), 182–197.

- Eiben, A.E., Smith, J.E., et al. (2003). *Introduction to evolutionary computing*, volume 53. Springer.
- Freitas, L., Barbosa, B.H.G., e Aguirre, L.A. (2021). Including steady-state information in nonlinear models: An application to the development of soft-sensors. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 102, 104253.
- Garg, A., Tai, K., e Panda, B. (2017). System identification: Survey on modeling methods and models. In *Artificial Intelligence and Evolutionary Computations in Engineering Systems*, 607–615. Springer.
- Goldberg, D.E. e Holland, J.H. (1988). Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, 3(2), 95–99.
- Hafiz, F., Swain, A., e Mendes, E. (2019). Multi-objective evolutionary framework for non-linear system identification: A comprehensive investigation. *Neurocomputing*.
- Hinchliffe, M.P. (2001). *Dynamic modelling using genetic programming*. Ph.D. thesis, University of Newcastle upon Tyne, UK.
- Hinchliffe, M.P. e Willis, M.J. (2003). Dynamic systems modelling using genetic programming. *Computers & Chemical Engineering*, 27(12), 1841 – 1854.
- Hinchliffe, M., Willis, M., Hiden, H., Tham, M., McKay, B., e Barton, G. (1996). Modelling chemical process systems using a multi-gene genetic programming algorithm. In *Genetic Programming: Proceedings of the First Annual Conference (late breaking papers)*, 56–65.
- Holland, J.H. (1975). Adaptation in natural and artificial systems. *The University of Michigan Press*.
- Koza, J.R. (1992). *Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection*, volume 1. MIT press.
- Leontaritis, I. e Billings, S.A. (1985). Input-output parametric models for non-linear systems part i: deterministic non-linear systems. *International journal of control*, 41(2), 303–328.
- Li, C.J. e Jeon, Y. (1993). Genetic algorithm in identifying non linear auto regressive with exogenous input models for non linear systems. In *1993 American Control Conference*, 2305–2309. IEEE.
- Ljung, L. (1999). System identification. *Wiley encyclopedia of electrical and electronics engineering*, 1–19.
- Madar, J., Abonyi, J., e Szeifert, F. (2005). Genetic programming for the identification of nonlinear input - Output models. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 44(9), 3178–3186.
- Mota, F., Carvalho, G., Castro, H., e Barbosa, B.H.G. (2020). Identificação de um sistema de bombeamento hidráulico com algoritmo evolucionário multi-objetivo. *Anais da Sociedade Brasileira de Automática*.
- Piroddi, L. e Spinelli, W. (2003). An identification algorithm for polynomial NARX models based on simulation error minimization. *International Journal of Control*, 76(17), 1767–1781.
- Poli, R., Langdon, W.B., e McPhee, N.F. (2008). A field guide to genetic programming. Published via <http://lulu.com> and freely available at <http://www.gp-field-guide.org.uk>.
- Söderström, T. e Stoica, P. (1988). *System identification*. Prentice-Hall, Inc.
- Yassin, I.M., Zabidi, A., Ali, A.M., Syahirul, M., Md Tahir, N., Zainol Abidin, H., e Rizman, Z.I. (2016). Binary particle swarm optimization structure selection of nonlinear autoregressive moving average with exogenous inputs (NARMAX) model of a flexible robot arm. *International Journal on Advanced Science, Engineering and Information Technology*, 6(5), 630–637. doi:10.18517/ijaseit.6.5.919.
- Young, P.C. (1968). The use of linear regression and related procedures for the identification of dynamic processes. In *Seventh Symposium on Adaptive Processes*, 53–53. IEEE.
- Zhang, Q. e Li, H. (2007). MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 11(6), 712–731.
- Zitzler, E., Laumanns, M., e Thiele, L. (2001). SPEA-II: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, 103.