Sociedade Brasileira de Automática (SBA)
XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2021, 17 a 20 de outubro de 2021

Busca Extremal baseada em Eventos

Victor Hugo Pereira Rodrigues * **Tiago Roux Oliveira** ** **Liu Hsu** *

* *Programa de Engenharia Elétrica (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), RJ, Brasil (e-mail: rodrigues.vhp@gmail.com, liu@coep.ufrj.br).*
** *Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil (e-mail: tiagoroux@uerj.br)*

Abstract: The extremum seeking is a control strategy able to reach and keep the output of an unknown mapping into a vicinity of its extremum while event-trigger is important to deal with the management of the finite bandwidth in communication channels of the networked systems. Despite the vast number of publications on both subjects, the event-triggered extremum seeking control based on perturbation method still remains as an open problem in literature and this paper proposes a solution for this issue. The stability analysis is carried out by using the Lyapunov criteria as well as the averaging theory for discontinuous systems to a multivariable extremum seeking control for static maps into a event-triggered framework. The closed-loop exhibits the advantages of each of the individual approaches and simulation results illustrate the advantages of the proposed control strategy.

Resumo: O controle por busca extremal é capaz de alcançar e manter a saída de um mapeamento desconhecido em uma vizinhança de seu extremo enquanto o controle baseado em eventos é uma estratégia importante para lidar com o gerenciamento da largura de banda finita nos canais de comunicação dos sistemas em rede. Apesar do vasto número de publicações sobre ambos os assuntos, a busca extremal baseada em eventos ainda é tópico de pesquisa aberto na literatura e este artigo propõe uma solução para esse problema. Neste artigo, considera-se a busca extremal multivariável baseada em eventos cuja análise de estabilidade é realizada usando os critérios de Lyapunov, bem como a teoria de média para sistemas descontínuos. A malha fechada exibe as vantagens de cada uma das abordagens individuais e os resultados de simulação ilustram as vantagens da estratégia de controle proposta.

Keywords: Extremum Seeking; Event-triggered control; Network control; Averaging of Discontinuous Systems.

Palavras-chaves: Busca Extremal; Controle baseado em Eventos; Controle em Rede; Média de Sistemas Descontínuos.

1. INTRODUÇÃO

A busca de extremal é uma estratégia de controle importante que permite ao projetista alcançar e manter a saída de um mapeamento não-linear nas proximidades de seu extremo. Se os parâmetros do mapeamento não-linear estiverem disponíveis, a busca extremal torna-se uma tarefa de controle fácil, pois é possível obter exatamente o gradiente da não-linearidade e o objetivo do controle pode ser definido como a estabilização desse gradiente. Infelizmente, devido a incertezas paramétricas, o gradiente exato não pode ser obtido diretamente e a tarefa de controle não é simples.

Apesar das diversas estratégias de controle por busca extremal, *extremum seeking control* (ESC), encontradas na literatura, os métodos baseados em perturbações (sinais de dither) são os mais antigos e, ainda hoje, os mais populares em todo o mundo. Embora a concepção do ESC tenha sido creditada ao engenheiro francês Maurice Leblanc (1922), foram os Professores Krstić and Wang (2000) que forneceram pela primeira vez uma prova de estabilidade rigorosa para a busca extremal em mapeamentos não-lineares, estáticos e dinâmicos. Em poucas palavras, o ESC baseado no método de perturbação (Sternby, 1980) adiciona um sinal periódico de pequena amplitude (sinal de dither) à entrada do mapeamento não-linear e estima o gradiente usando um processo de demodulação apropriado. Finalmente, esta estimativa é utilizada no projeto de controle por realimentação.

Atualmente, o rápido progresso tecnológico no campo das redes levou os pesquisadores e engenheiros a se concentrarem na diminuição dos custos, através do projeto de sistemas de comunicação velozes e viáveis nos quais a planta e o controlador podem não estar fisicamente conectados ou mesmo em locais diferentes. Algumas vantagens dessas redes são a diminuição do custo financeiro de instalação e manutenção (Zhang et al., 2020) enquanto a principal desvantagem é o congestionamento do tráfego de dados. O congestionamento do tráfego pode levar a atrasos na rede e, pior ainda, a perdas de pacotes, ou seja, os dados podem ser perdidos durante a transmissão (Hespanha et al., 2007). Esses problemas estão altamente relacionados à restrição de largura de banda finita nos canais de comunicação dos sistemas em rede. Para superar ou pelo menos mitigar tais problemas, pode-se empregar uma estratégia de controle baseado em eventos, *event-triggered controller* (ETC).

O ETC executa a tarefa de controle aperiodicamente conduzida por uma condição de disparo projetada com o estado ou a saída (Coutinho and Palhares, 2021; Moreira et al., 2019). Dessa forma, além das propriedades de estabilidade assintótica Tabuada (2007), a estratégia garante o menor esforço dos recursos da rede uma vez que a atualização do controle e a transmissão dos dados só ocorrem se forem realmente necessários (Borgers and Heemels, 2013). Apesar das vantagens, a busca extremal baseada em eventos ainda é um tópico de pesquisa em aberto na literatura e este artigo propõe uma solução para esse problema. Neste artigo, considera-se a busca extremal multivariável baseada em eventos cuja análise de estabilidade é realizada usando os critérios de Lyapunov, bem como a teoria de média para sistemas descontínuos. A malha fechada exibe as vantagens de cada uma das abordagens individuais e os resultados da simulação ilustram as vantagens da estratégia de controle proposta.

O artigo está organizado da seguinte forma. A seção 2 apresenta as notações e definições empregadas no artigo. A seção 3 formula o problema de controle a ser resolvido. Os resultados de estabilidade e convergência são apresentados na Seção 4. Os resultados da simulação são apresentados na Seção 5. A seção 6 apresenta as conclusões deste manuscrito.

2. PRELIMINARES

Ao longo do manuscrito, a norma 2 (euclidiana) de vetores e a norma induzida de matrizes são denotadas por barras duplas $\|\cdot\|$ enquanto o valor absoluto das variáveis escalares são denotados por barras simples $|\cdot|$ e $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ denotam os autovalores mínimo e máximo de uma dada matriz, respectivamente. Dado $\varepsilon \in [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \subset \mathbb{R}$, o mapeamento $\delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon)$ onde $\delta_1 : [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ e $\delta_2 : [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$, afirma-se que $\delta_1(\varepsilon)$ possui magnitude de ordem de $\delta_2(\varepsilon)$, $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$, se existem constantes positivas k e c tal que $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|$, para todo $|\varepsilon| < c$ (Khalil, 2002).

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 1 mostra um diagrama de blocos da busca extremal baseada em eventos para o mapeamento estático e não-linear

$$Q(\theta(t)) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t)-\theta^*)^T H^*(\theta(t)-\theta^*)\,, \quad (1)$$

onde $H^* = H^{*T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz Hessiana, $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ é a entrada otimizadora (desconhecida), o vetor $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$ é projetado com a estimativa em tempo real $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$ de θ^* e o vetor de *dither* aditivo $S(t)$,

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)\,. \quad (2)$$

A variável t_k denota uma sequência ilimitada e monotonamente crescente de instantes de evento, *i.e.*,

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots\,, \quad k \in \mathbb{Z}^+\,, \lim_{k\to\infty} t_k = \infty\,, \quad (3)$$

com intervalos de amostragem variáveis $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$.

Supõe-se que o sensor sempre atua instantaneamente, enquanto o controlador e o atuador atuam de uma maneira acionada por evento (ou seja, eles respondem instantaneamente aos dados recém-chegados). O atuador transforma a entrada de controle de tempo discreto U_k em uma entrada de controle contínua $u(t)$. Ao assumir que não há atrasos nos ramos Sensor-Controlador e Controlador-Atuador,

$$u(t) = U_k = U(t_k)\,, \quad t \in \; [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{Z}^+\,, \quad (4)$$

e a função linear por partes $\tau(t)$ com derivada temporal $\dot{\tau}(t) = 1$, $\forall t \neq t_k$ (ver Figura 2) é

$$\tau(t) = t - t_k\,, \quad t \in [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{Z}^+\,. \quad (5)$$

Então, da Figura 1, a saída do mapeamento não-linear (1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= Q(\theta(t)) \\ &= Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t)-\theta^*)^T H^*(\theta(t)-\theta^*)\,. \end{aligned} \quad (6)$$

Define-se o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*\,, \quad (7)$$

e a estimativa do Gradiente

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t)\,, \quad (8)$$

com vetores de dither

$$S(t) = \left[a_1 \sin(\omega_1 t)\,, \ldots\,, a_n \sin(\omega_n t)\right]^T\,, \quad (9)$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1}\sin(\omega_1 t)\,, \ldots\,, \frac{2}{a_n}\sin(\omega_n t)\right]^T\,, \quad (10)$$

com amplitudes $a_i > 0$. As frequências de sondagem ω_i são selecionadas como

$$\omega_i = \omega_i'\omega\,, \quad i \in \{1, \ldots, n\}\,, \quad (11)$$

onde ω é uma constante positiva e ω_i' é um número racional.

De (2) e (7),

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + S(t) + \theta^*\,, \quad (12)$$

e, portanto, substituindo (12) em (6), a saída $y(t)$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned} y(t) &= Q^* + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}(t)+S(t))^T H^*(\tilde{\theta}(t)+S(t)) \\ &= Q^* + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T(t)H^*\tilde{\theta}(t) + S^T(t)H^*\tilde{\theta}(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2}S^T(t)H^*S(t)\,. \end{aligned} \quad (13)$$

Então, a estimativa do Gradiente é

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &= M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t)H^*\tilde{\theta}(t) + \\ &\quad + M(t)S^T(t)H^*\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}M(t)S^T(t)H^*S(t)\,. \end{aligned} \quad (14)$$

Definindo

$$\begin{aligned} H(t) &:= M(t)S^T(t)H^* \\ &= H^* + \Delta(t)H^*\,, \end{aligned} \quad (15)$$

onde os elementos de $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são dados por

$$\Delta_{ii}(t) = -\cos(2\omega_i t)\,, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(t) &= 2\frac{a_j}{a_i}\sin(\omega_i t)\sin(\omega_j t) \\ &= \frac{a_j}{a_i}\cos((\omega_i-\omega_j)t) - \frac{a_j}{a_i}\cos((\omega_i+\omega_j)t)\,, \quad \forall i \neq j\,. \end{aligned} \quad (17)$$

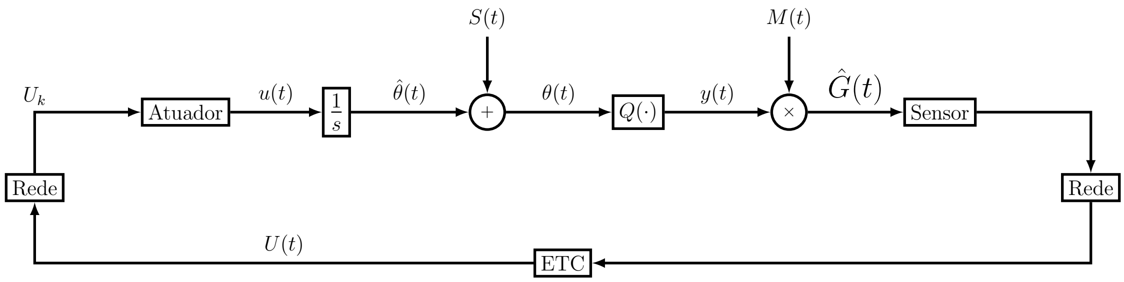


Figura 1. Diagrama de blocos da Busca Extremal em Rede

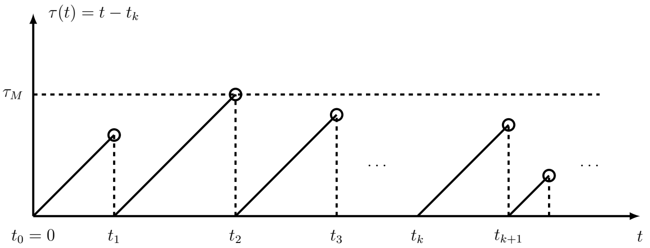


Figura 2. Piecewise-continuous function $\tau(t)$.

Então, a equação (14) torna-se

$$\hat{G}(t) = H(t)\tilde{\theta}(t) + M(t)Q^* + \frac{1}{2}H(t)S(t) + \vartheta(t)\,, \quad (18)$$

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t)H^*\tilde{\theta}(t)\,. \quad (19)$$

O termo $\vartheta(t)$ dado por (19) e mostrado em (18) é quadrático em $\tilde{\theta}(t)$ e, portanto, não é importante para uma análise local Ariyur and Krstić (2003). Dessa forma, daqui por diante, o mesmo será negligenciado e a estimativa do gradiente é apresentada como

$$\hat{G}(t) = H(t)\tilde{\theta}(t) + M(t)Q^* + \frac{1}{2}H(t)S(t)\,. \quad (20)$$

Por outro lado, da derivada temporal de (7), a dinâmica que governa $\hat{\theta}(t)$, assim como $\tilde{\theta}(t)$, é

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) = u(t)\,. \quad (21)$$

Tomando-se a derivada temporal de (20) e considerando as equações (15) e (21), chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{\hat{G}}(t) &= f(t, \tilde{\theta}(t), u(t)) \\ &= H(t)u(t) + w(t, \tilde{\theta}(t))\,, \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(t, \tilde{\theta}(t)) = \dot{\Delta}(t)H^*\tilde{\theta}(t) + \dot{M}(t)Q^* + \frac{1}{2}\dot{\Delta}(t)H^*S(t) + \\ + \frac{1}{2}H^*\dot{S}(t) + \frac{1}{2}\Delta(t)H^*\dot{S}(t)\,. \quad (23)\end{aligned}$$

A lei de controle é projetada como

$$U(t) = K\hat{G}(t_k)\,, \quad \forall t \in [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \quad (24)$$

e se introduz o vetor de erro

$$e(t) := \hat{G}(t_k) - \hat{G}(t)\,, \quad \forall t \in [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \quad (25)$$

Ao se utilizar a lei de controle baseada em eventos (24), adicionando e subtraindo o termo $H(t)K\hat{G}(t)$ em (22) e adicionando e subtraindo o termo $K\hat{G}(t)$ em (21), chega-se a uma representação *Input-to-State Stable* (ISS) das dinâmicas $\hat{G}(t)$ e $\tilde{\theta}$ com relação ao vetor de erro $e(t)$ apresentado na equação (25) e perturbação variante no tempo $w(t, \tilde{\theta}(t))$, em outras palavras,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{G}}(t) &= H(t)K\hat{G}(t_k) + H(t)K\hat{G}(t) - H(t)K\hat{G}(t) + w(t, \tilde{\theta}(t)) \\ &= H(t)K\hat{G}(t) + H(t)Ke(t) + w(t, \tilde{\theta}(t))\,, \quad (26)\end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = -\,H(t)K\hat{G}(t) - H(t)Ke(t) - w(t, \tilde{\theta}(t))\,, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}(t) &= K\hat{G}(t_k) + K\hat{G}(t) - K\hat{G}(t) \\ &= KH(t)\tilde{\theta}(t) + Ke(t) + KM(t)Q^* + \frac{1}{2}KH(t)S(t)\,. \quad (28)\end{aligned}$$

Em uma implementação convencional de dados amostrados, os tempos de transmissão são distribuídos equidistantemente no tempo, o que significa que $t_{k+1} = t_k + h$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e algum intervalo $h > 0$. No controle baseado em eventos essas transmissões são orquestradas por um mecanismo que invoca as transmissões quando a diferença entre o valor atual da saída e seu valor transmitido anteriormente se torna muito grande em um sentido apropriado (Heemels et al., 2012). Nas seções subsequentes, dois mecanismos de execução são analisados usando o vetor auxiliar

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{G}(t) \\ e(t) \end{bmatrix}\,, \quad (29)$$

cuja dinâmica é

$$\dot{z}_1(t) = H(t)Kz_1(t) + H(t)Kz_2(t) + w(t, \tilde{\theta}(t))\,, \quad (30)$$

$$\dot{z}_2(t) = -H(t)Kz_1(t) - H(t)Kz_2(t) - w(t, \tilde{\theta}(t))\,, \quad (31)$$

A ideia principal é estabelecer os instantes acionados por eventos,

$$t_{k+1} = \min\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_k \;\wedge\; z^T(t)\Psi z(t) = 0\right\}\,, \quad (32)$$

$$t_0 = 0\,, \quad (33)$$

onde Ψ é uma matriz apropriada, para recalcular a lei de controle (24) e atualizar o atuador na Figura 3 de modo que a estabilidade assintótica do sistema de malha fechada seja alcançada.

3.1 Escalamento temporal do Sistema

Da equação (11), as frequências de *dither* em (9) e (10), bem como suas combinações em (16) e (17), são racionais e, então, existe o período

$$T = 2\pi \times \mathrm{MMC}\left\{\frac{1}{\omega_i}\right\}\,, \quad \forall i\,\{1\,, 2\,, \ldots\,, n\}\,, \quad (34)$$

onde MMC denota o mínimo múltiplo comum tal que é possível escalonar temporalmente as dinâmicas (26)–(28), (30) e (31) com a transformação $\bar{t} = \omega t$, assim

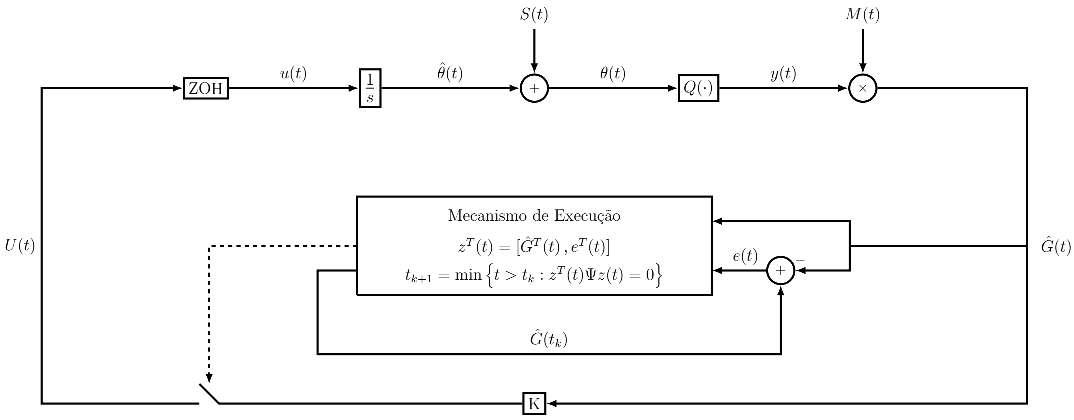


Figura 3. Diagrama de blocos da busca extremal baseada em eventos.

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \,. \tag{35}$$

Então,

$$\frac{d\hat{G}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{36}$$

$$\frac{de(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathcal{E}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{37}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\tilde{\Theta}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{38}$$

$$\frac{dz_1(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathcal{Z}_1\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{39}$$

$$\frac{dz_2(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathcal{Z}_2\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{40}$$

nas quais

$$\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) = H(\bar{t})K\hat{G}(\bar{t}) + H(\bar{t})Ke(\bar{t}) + \\ + w(\bar{t}, \tilde{\theta}(\bar{t})) , \tag{41}$$

$$\mathcal{E}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) = -\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{42}$$

$$\tilde{\Theta}\left(\bar{t}, \hat{G}, e, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) = KH(\bar{t})\tilde{\theta}(\bar{t}) + Ke(\bar{t}) + \\ + KM(\bar{t})Q^* + \frac{1}{2}KH(\bar{t})S(\bar{t}) , \tag{43}$$

$$\mathcal{Z}_1\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) = \hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{44}$$

$$\mathcal{Z}_2\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) = \mathcal{E}\left(\bar{t}, z_1, z_2, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega}\right) . \tag{45}$$

3.2 Sistema Médio

Agora, definindo o estado aumentado

$$X^T(\bar{t}) := \left[\hat{G}^T(\bar{t}) \,, e^T(\bar{t}) \,, \tilde{\theta}^T(\bar{t}) \,, z^T(\bar{t})\right] , \tag{46}$$

chega-se à dinâmica

$$\frac{dX(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathcal{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right) , \tag{47}$$

$$\mathcal{F}^T = \left[\hat{\mathcal{G}}^T \,, \mathcal{E}^T \,, \tilde{\Theta}^T \,, \mathcal{Z}_1^T \,, \mathcal{Z}_2^T\right] . \tag{48}$$

O sistema aumentado (47) tem um pequeno parâmetro $1/\omega$ assim como uma função T-periódica $\mathcal{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ em $\bar{t}$, portanto, admite-se o teoria de média para análise de estabilidade calculando-se $\mathcal{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ at $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{1}{\omega} = 0$, conforme apresentado nas referências (Plotnikov, 1980; Khalil, 2002), *i.e.*,

$$\frac{dX_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathcal{F}_{\rm av}\left(X_{\rm av}\right) , \tag{49}$$

$$\mathcal{F}_{\rm av}\left(X_{\rm av}\right) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{F}\left(\delta, X_{\rm av}, 0\right) d\delta \,. \tag{50}$$

Basicamente, a teoria de média determina em que sentido o comportamento do sistema não-autônomo (47) se aproxima do comportamento do sistema autônomo (49) de modo que (47) pode ser representado como uma perturbação de (49) (Khalil, 2002).

Agora, nota-se que os termos médios são

$$S_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T S(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{51}$$

$$\dot{S}_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{S}(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{52}$$

$$M_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T M(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{53}$$

$$\dot{M}_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{M}(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{54}$$

$$\Delta_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T \Delta(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{55}$$

$$\dot{\Delta}_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\Delta}(\delta)d\delta = 0 \,, \tag{56}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} H_{\rm av}(\bar{t}) &= \frac{1}{T}\int_0^T H(\delta)d\delta \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T H^*d\delta + \frac{1}{T}\int_0^T \Delta(\delta)H^*d\delta \\ &= H^* + \Delta_{\rm av}(\bar{t})H^* = H^* \,, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\rm av}(\bar{t}) &= \frac{1}{T}\int_0^T \dot{H}(\delta)d\delta \\ &= \dot{\Delta}_{\rm av}(\bar{t})H^* = 0 \,. \end{aligned} \tag{58}$$

Portanto, tratando o estado aumentado $X(\bar{t})$ como constante em (47) e (48), e usando os valores médios (51)–(58), chega-se a

$$\frac{d\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}H^*K\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}H^*Ke_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{59}$$

$$\frac{de_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\frac{1}{\omega}H^*Ke_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{1}{\omega}H^*K\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{60}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}KH^*\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}Ke_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{61}$$

$$\frac{dz_{1_{\rm av}}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}H^*Kz_{1_{\rm av}}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}H^*Kz_{2_{\rm av}}(\bar{t})\,, \tag{62}$$

$$\frac{dz_{2_{\rm av}}(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\frac{1}{\omega}H^*Kz_{2_{\rm av}}(\bar{t}) - \frac{1}{\omega}H^*Kz_{1_{\rm av}}(\bar{t})\,, \tag{63}$$

uma vez que o valor médio de $w(t,\tilde{\theta}(t))$ em (23) é

$$\begin{aligned} w_{\rm av}(\bar{t},\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})) &= \dot{\Delta}_{\rm av}(\bar{t})H^*\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t}) + \dot{M}_{\rm av}(\bar{t})Q^* + \\ &+ \frac{1}{2}\dot{\Delta}_{\rm av}(\bar{t})H^*S_{\rm av}(\bar{t}) + \\ &+ \frac{1}{2}H^*\dot{S}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{2}\Delta_{\rm av}(\bar{t})H^*\dot{S}_{\rm av}(\bar{t}) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{64}$$

Portanto, a partir de (59) é fácil verificar a relação ISS de $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ com respeito ao erro médio de medição $e_{\rm av}(\bar{t})$. Além do mais, a média das equações (20), (25) e (29), gera

$$\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) = H^*\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{65}$$

$$\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t}) = H^{*-1}\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{66}$$

$$e_{\rm av}(\bar{t}) = \hat{G}_{\rm av}(\bar{t}_k) - \hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{67}$$

$$z_{\rm av}(\bar{t}) = \begin{bmatrix} z_{1_{\rm av}}(\bar{t}) \\ z_{2_{\rm av}}(\bar{t}) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) \\ e_{\rm av}(\bar{t}) \end{bmatrix}. \tag{68}$$

Na escala de tempo $\bar{t}$, versão média da lei de execução baseada em eventos torna-se

$$\bar{t}_{k+1} = \min\left\{\bar{t} \in \mathbb{R}^+ : \bar{t} > \bar{t}_k \ \wedge \ z_{\rm av}^T(\bar{t})\Psi z_{\rm av}(\bar{t}) = 0\right\}\,, \tag{69}$$

$$\bar{t}_0 = 0\,, \tag{70}$$

deve ser capaz de garantir a convergência exponencial de $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ e, consequentemente, de $\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})$ para a origem invocando a teoria da média Khalil (2002).

3.3 Hipóteses

As seguintes hipóteses são consideradas ao longo do artigo:

(H1) O vetor otimizador $\theta^* \in R^n$ e o escalar Q^* mostrados no mapeamento não-linear (1) são parâmetros desconhecidos pelo projetista.

(H2) A matriz Hessiana H^* é simétrica, tem sinal definido (tem posto completo) e conhecido.

(H3) O produto matricial H^*K é Hurwitz tal que para qualquer matriz $Q = Q^T > 0$ existe $P = P^T > 0$ que satisfaz a equação de Lyapunov

$$K^TH^{*T}P + PH^*K = -Q\,. \tag{71}$$

(H4) A soma das normas induzidas das matrizes $K^TH^{*T}P$ e PH^*K é majorada por uma constante conhecida β,

$$\|K^TH^{*T}P\| + \|PH^*K\| \le \beta\,. \tag{72}$$

(H5) O menor autovalor da matriz Q é limitado inferiormente por uma constante positiva, e conhecida, α,

$$\lambda_{\min}(Q) \ge \alpha\,. \tag{73}$$

(H6) As frequências de sondagem satisfazem

$$\omega_i' \notin \left\{\omega_j'\,,\ \frac{1}{2}(\omega_j' + \omega_k')\,,\ \omega_j' + 2\omega_k'\,,\ \omega_k' \pm \omega_l'\right\}\,, \tag{74}$$

para todo i, j, k e l.

(H7) Apenas $\hat{G}(t)$ está disponível para o projeto da execução baseada em eventos.

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

4.1 Busca Extremal baseada em Eventos com Matriz Hessiana Conhecida

Esta seção assume um conhecimento parcial do mapa não-linear (1) tal que a matriz Hessiana H^* seja um parâmetro conhecido. Embora essa hipótese pareça simplificar o problema, deve-se notar que a estratégia de busca extremal ainda se justifica uma vez que o vetor otimizador θ^* e o parâmetro Q^* são desconhecidos.

O Teorema 1 mostra como a matriz de eventos

$$\Psi = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} (\sigma-1)Q & PH^*K \\ K^TH^{*T}P & 0_{n\times n} \end{bmatrix}\,, \tag{75}$$

na qual $\sigma \in]0,1[$, pode ser empregada em malha fechada para garantir a estabilidade assintótica da busca extremal baseada em eventos.

Teorema *1.* Considere a dinâmica média de malha fechada da estimativa do gradiente (59) e o mecanismo execução por evento médio dado por (69). Suponha que as Hipóteses (H1)–(H8) sejam satisfeitas e que a matriz Hessiana H^* seja um parâmetro conhecido. Se a matriz de eventos Ψ é dada por (75) e ω em (35) é uma constante suficientemente grande para os parâmetros de (59), a versão média da estimativa do gradiente, $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$, dada por (59) é localmente exponencialmente estável e, consequentemente, $\tilde{\theta}_{\rm av}(t)$ converge exponencialmente para zero. Portanto, existem constantes $\omega^* \in \ ]0\,,\omega[$ e $m\,, M_{\hat{G}}\,, M_\theta\,, M_y > 0$ tal que

$$\|\hat{G}(t)\| \le M_{\hat{G}}\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{76}$$

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \le M_\theta\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{77}$$

$$|y(t) - Q^*| \le M_y\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right)\,, \tag{78}$$

nas quais $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, e as constantes $M_{\hat{G}}$, M_θ e M_y dependem da condição inicial $\tilde{\theta}_{\rm av}(0)$. Além do mais, existe um limitante inferior τ^* para o intervalo entre execuções $t_{k+1} - t_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ evitando o comportamento Zeno.

Prova. Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov,

$$V_{\rm av} = \hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{79}$$

cuja derivada temporal, satisfeita a Hipótese (H3), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\rm av} = &-\frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}e_{\rm av}^T(\bar{t})K^TH^{*T}P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \\ &+ \frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})PH^*Ke_{\rm av}(\bar{t})\,. \end{aligned} \tag{80}$$

De (80), a ausência do erro de medição $e(t)$, $e(t) \equiv 0\ \forall t > 0$, implica na implementação clássica da busca extremal e, neste caso, a equação (80) torna-se

$$\dot{V}_{\rm av} = -\frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})\,. \tag{81}$$

Por outro lado, na abordagem baseada em eventos, o mecanismo de execução responsável pela atualização e transmissão do sinal de controle através da rede é dado pela equação (69) com matriz de eventos Ψ em (75). A abordagem proposta neste artigo garante o decaimento exponencial de $V_{\rm av}$ com majorante pré-especificado dado por uma fração da taxa de decaimento ideal (81), de modo que

$$\dot{V}_{\rm av} \leq -\frac{\sigma}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) \quad \text{com} \quad \sigma \in \,]0\,,1[\,. \tag{82}$$

Agora, substituindo o lado esquerdo da desigualdade (83) pela equação (80), chega-se a

$$-\frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}e_{\rm av}^T(\bar{t})K^T H^{*T}P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \\ + \frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})PH^*Ke_{\rm av}(\bar{t}) \leq -\frac{\sigma}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,. \tag{83}$$

Adicionando o termo $\frac{\sigma}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ em ambos lados da desigualdade (83),

$$+\frac{\sigma}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \\ + \frac{1}{\omega}e_{\rm av}^T(\bar{t})K^T H^{*T}P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})PH^*Ke_{\rm av}(\bar{t}) \leq 0\,, \tag{84}$$

que tem forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t}) & e_{\rm av}^T(\bar{t})\end{bmatrix}}_{z_{\rm av}^T(\bar{t})} \underbrace{\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix}(\sigma-1)Q & PH^*K \\ K^T H^{*T}P & 0\end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) \\ e_{\rm av}(\bar{t})\end{bmatrix}}_{z_{\rm av}(\bar{t})} \leq 0\,. \tag{85}$$

Observe que a matriz de eventos Ψ em (75) não possui sinal definido, de modo que a desigualdade (102) fornece apenas uma condição para especificar o instante de execução t_{k+1}. Na prática, o mecanismo de execução baseado em eventos supervisiona a derivada temporal da função Lyapunov (80) e seu limite superior pré-especificado em (83) para definir o momento em que esses sinais se encontram como o instante para enviar dados pela rede e atualizar o atuador. Tal condição, $z_{\rm av}^T(\bar{t})\Psi z_{\rm av}(\bar{t}) = 0$ é dada por (69) e (70). Este processo pode ocorrer por um número indefinido de vezes, ou seja, sempre que necessário, e garante em malha fechada a convergência exponencial assintótica de $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ para a origem com majorante de $\dot{V}_{\rm av}(\hat{G}_{\rm av})$ dado por (83).

Portanto, usando a desigualdade de Rayleigh-Ritz,

$$\lambda_{\min}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2 \leq V_{\rm av} \leq \lambda_{\max}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2\,, \tag{86}$$

um majorante para (83) é

$$\dot{V}_{\rm av} \leq -\frac{\sigma}{\omega}\lambda_{\min}(Q)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2 \\ \leq -\frac{\sigma}{\omega}\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V_{\rm av}\,. \tag{87}$$

Invocando-se o Critério de Estabilidade de Lyapunov (Khalil, 2002, Teorema 4.1), conclui-se que a estimativa média do gradiente, $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$, é assintoticamente estável e, através do Princípio da Comparação (Khalil, 2002, Lema da Comparação 4.1) e a desigualdade de Rayleigh-Ritz, é possível garantir que

$$\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\| \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{2\omega\lambda_{\max}(P)}\bar{t}\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|\hat{G}_{\rm av}(0)\|\,. \tag{88}$$

Então, ao se aplicar a desigual de Cauchy-Schwarz (Apostol, 1957) e o majorante (88) na equação (66), chega-se a

$$\|\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})\| \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{2\omega\lambda_{\max}(P)}\bar{t}\right) \times \\ \times \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|\,. \tag{89}$$

Como as equações (36) e (38) possuem lado direito descontínuo, o termo $\frac{1}{\omega}$ tem valor pequeno, $\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ e $\tilde{\Theta}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ em (41) e (43), respectivamente, são funções T-periódicas em $\bar{t}$ com $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ e $\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})$ exponencial estáveis, ver desigualdades (88) e (89), invocando-se o Teorema da Média para Sistemas Descontínuos (Plotnikov, 1980, Theorem 2) e com auxílio da Desigualdade Triangular Apostol (1957),

$$\|\hat{G}(\bar{t})\| \leq \|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{90}$$

$$\|\tilde{\theta}(\bar{t})\| \leq \|\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\,. \tag{91}$$

Revertendo-se a escala de tempo ($\bar{t} = \omega t$) e com os majorantes (88) e (89), as desigualdades (90) e (91) tornam-se

$$\|\hat{G}(t)\| \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}t\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|\hat{G}_{\rm av}(0)\| + \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{92}$$

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}t\right) \times \\ \times \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{93}$$

Agora, de (12),

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)\,, \tag{94}$$

e, empregando-se o majorante (93), sua norma satisfaz

$$\|\theta(t) - \theta^*\| = \|\tilde{\theta}(t) + S(t)\| \leq \|\tilde{\theta}(t)\| + \|S(t)\| \\ \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}t\right)\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \times \\ \times \|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\| + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\,. \tag{95}$$

Nota-se que a equação (6) pode ser reescrita como

$$y(t) - Q^* = (\theta(t) - \theta^*)^T H^*(\theta(t) - \theta^*)\,, \tag{96}$$

e, depois de algumas manipulações matemáticas utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz (Apostol, 1957), (95) e de Young (Khalil, 2002), chega-se a

$$|y(t) - Q^*| \leq \exp\left(-\frac{\sigma\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}t\right) \times \\ \times \left[\frac{\lambda_{\max}(P)\|H^{*-1}\|^2\|H^*\|^3\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} + \right. \\ \left. +2\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|^2}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\right] + \\ + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right)\,. \tag{97}$$

Portanto, definindo-se as constantes

$$m = \frac{\sigma \lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}\,, \tag{98}$$

$$M_{\hat{G}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|H^*\|\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|\,, \tag{99}$$

$$M_\theta = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|\,, \tag{100}$$

$$\begin{aligned} M_y = {} & \frac{\lambda_{\max}(P)\|H^{*-1}\|^2\|H^*\|^3\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} + \\ & + 2\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|H^{*-1}\|\|H^*\|^2}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|\tilde{\theta}_{\rm av}(0)\|\mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\,, \end{aligned} \tag{101}$$

e com (92), (95) e (97), as desigualdades (76)–(78) são satisfeitas.

Agora, nota-se que no instante de execução de um novo evento a desigualdade (83) tonar-se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}e_{\rm av}^T(\bar{t})K^TH^{*T}P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}) + \\ & + \frac{1}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})PH^*Ke_{\rm av}(\bar{t}) = -\frac{\sigma}{\omega}\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \end{aligned} \tag{102}$$

consequentemente,

$$2\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})PH^*Ke_{\rm av}(\bar{t}) = (1-\sigma)\hat{G}_{\rm av}^T(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,. \tag{103}$$

Logo,

$$e_{\rm av}(\bar{t}) = \frac{(1-\sigma)}{2}K^{-1}H^{*-1}P^{-1}Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{104}$$

e

$$\|e_{\rm av}(\bar{t})\| \leq \frac{(1-\sigma)}{2}\|(H^*K)^{-1}\|\|P^{-1}\|\|Q\|\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|\,, \tag{105}$$

ou

$$\frac{\|e_{\rm av}(\bar{t})\|}{\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|} \leq \frac{(1-\sigma)}{2}\|(H^*K)^{-1}\|\|P^{-1}\|\|Q\|\,. \tag{106}$$

Invocando-se (Tabuada, 2007, Corolário IV.1), os intervalos de tempo inter-execução são limitados inferiormente pelo intervalo $\bar{\tau}^*$ gasto para a solução da dinâmica

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} &= \frac{1}{\omega}\|H^*K\| + \frac{2}{\omega}\|H^*K\|\phi(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\|H^*K\|\phi^2(\bar{t}) \\ &= \frac{1}{\omega}\|H^*K\|(1 + 2\phi(\bar{t}) + \phi^2(\bar{t})) \\ &= \frac{1}{\omega}\|H^*K\|(1+\phi(\bar{t}))^2\,, \quad \phi(0) = 0\,, \end{aligned} \tag{107}$$

alcançar $\phi(\bar{\tau}^*) = \frac{(1-\sigma)}{2}\|(H^*K)^{-1}\|\|P^{-1}\|\|Q\|$. Então, resolvendo o problema do valor inicial (107) usando os métodos da separação das variáveis,

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(\bar{\tau}^*)} \frac{1}{(1+\phi(\bar{t}))^2}d\phi(\bar{t}) = \frac{1}{\omega}\|H^*K\|\int_0^{\bar{\tau}^*} d\bar{t}\,, \tag{108}$$

$$\left[-\frac{1}{1+\phi(\bar{t})}\right]_{\phi(0)}^{\phi(\bar{\tau}^*)} = \frac{1}{\omega}\|H^*K\|\,[\bar{t}]_0^{\bar{\tau}^*}\,, \tag{109}$$

$$\frac{1}{1+\phi(0)} - \frac{1}{1+\phi(\bar{\tau}^*)} = \frac{1}{\omega}\|H^*K\|\bar{\tau}^*\,, \tag{110}$$

$$\frac{(1-\sigma)\|Q\|}{2\|H^*K\|\|P\| + (1-\sigma)\|Q\|} = \frac{1}{\omega}\|H^*K\|\bar{\tau}^*\,. \tag{111}$$

De fato $\bar{t} = \omega t$ implica em $\bar{\tau}^* = \omega\tau^*$, portanto, de (111), na escala de tempo t, um limite inferior para a inter-execução $\tau^* \leq t_{k+1} - t_k$ pode ser encontrado como

$$\tau^* = \frac{1}{\|H^*K\|}\frac{(1-\sigma)\|Q\|}{2\|H^*K\|\|P\| + (1-\sigma)\|Q\|}\,, \tag{112}$$

e o comportamento de Zeno é evitado, o que completa a prova. □

4.2 Busca Extremal baseada em Eventos com Matriz Hessiana Desconhecida

Esta seção assume o desconhecimento total do mapeamento não-linear (1), ou seja, tal que a matriz Hessiana H^*, o vetor otimizador θ^* e o parâmetro Q^* são todos parâmetros desconhecidos.

O Teorema 2 mostra como a matriz de eventos

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma^2\alpha^2}{\beta^2}I_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix}\,, \tag{113}$$

na qual $\sigma \in]0,1[$, pode ser empregada em malha fechada para garantir a estabilidade assintótica da busca extremal baseada em eventos.

Teorema 2. Considere a dinâmica média de malha fechada da estimativa do gradiente (59) e o mecanismo execução por evento médio dado por (69). Suponha que as Hipóteses (H1)–(H8) sejam satisfeitas e que a matriz Hessiana H^* seja um parâmetro desconhecido. Se a matriz de eventos Ψ é dada por (113) e ω em (35) é uma constante suficientemente grande para os parâmetros de (59), a versão média da estimativa do gradiente, $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$, dada por (59) é localmente exponencialmente estável e, consequentemente, $\tilde{\theta}_{\rm av}(t)$ converge exponencialmente para zero. Portanto, existem constantes $\omega^* \in \ ]0\,,\omega[$ e $m\,, M_{\hat{G}}\,, M_\theta\,, M_y > 0$ tal que

$$\|\hat{G}(t)\| \leq M_{\hat{G}}\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{114}$$

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \leq M_\theta\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{115}$$

$$|y(t) - Q^*| \leq M_y\exp(-mt) + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right)\,, \tag{116}$$

nas quais $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, e as constantes $M_{\hat{G}}$, M_θ e M_y dependem da condição inicial $\tilde{\theta}_{\rm av}(0)$. Além do mais, existe um limitante inferior τ^* para o intervalo entre execuções $t_{k+1} - t_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ evitando o comportamento Zeno.

Prova. A prova do Teorema 2 segue passos similares aos que foram dados na demonstração do Teorema 1 e, devido a limitação de espaço, será oportunamente apresentada em uma futura publicação em periódico. □

5. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

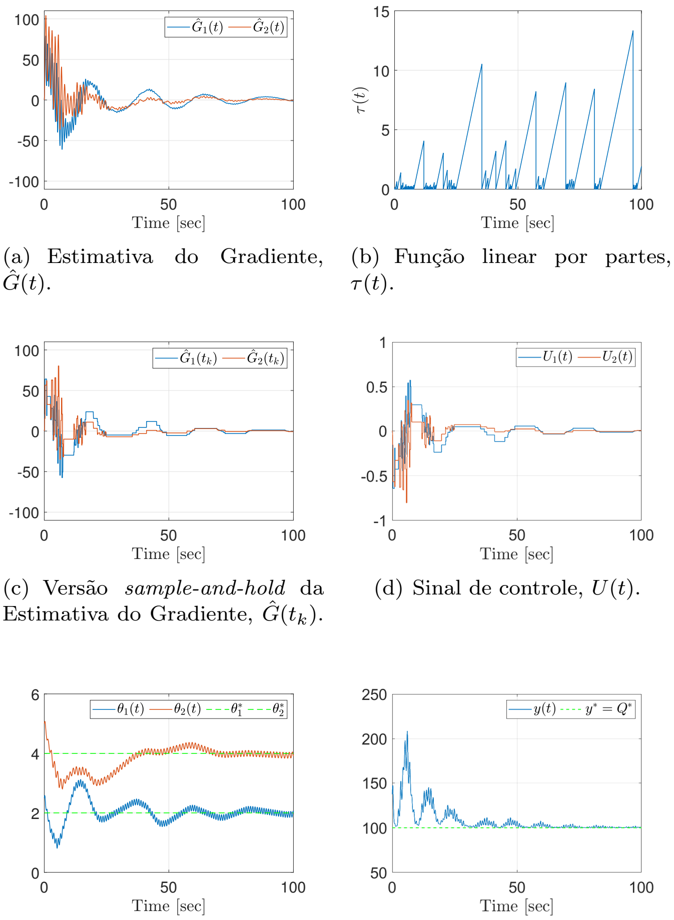
Para ilustrar as ideias principais da estratégia de Busca Extremal baseada em Eventos empregou-se o mapa não-linear multivariável (1) com entrada $\theta(t) \in \mathbb{R}^2$, saída $\hat{G}(t) \in \mathbb{R}$, e parâmetros desconhecidos

$$H = \begin{bmatrix} 100 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}\,, \tag{117}$$

$Q^* = 100$ and $\theta^* = [2\ 4]^T$. Os vetores de dither (9) e (10) têm parâmetros $a_1 = a_2 = 0.1$, $\omega_1 = 0.7$ [rad/sec], e $\omega_2 =$

0.5 [rad/sec], como em Ghaffari et al. (2012), enquanto os parâmetros da execução por eventos são $\sigma = 0.7$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. A matriz de ganho do controlador é $K = 10^{-2}\begin{bmatrix} -7.5 & 0 \\ 0 & -7.5 \end{bmatrix}$ e a condição inicial $\hat{\theta}(0) = [2.5,\ 5]^T$.

Nas Figuras 4(a) e 4(c) a estimativa do Gradiente e sua versão amostrada mostram a convergência para zero de ambas variáveis. Obviamente, a estabilização do Gradiente implica no alcance do otimizador θ^*, ver Figuras 4(e) e 4. As Figuras 4(b) e 4(d) mostram o comportamento aperiódico de atualização do sinal de controle $U(t)$.



(a) Estimativa do Gradiente, $\hat{G}(t)$.

(b) Função linear por partes, $\tau(t)$.

(c) Versão *sample-and-hold* da Estimativa do Gradiente, $\hat{G}(t_k)$.

(d) Sinal de controle, $U(t)$.

(e) Entrada do mapeamento não-linear, $\theta(t)$.

(f) Saída do mapa não-linear, $y(t)$.

Figura 4. Busca Extremal baseada em Eventos.

6. CONCLUSÕES

Este artigo propõe a primeira estratégia de busca extremal baseada em eventos para mapeamentos estáticos, não-lineares e multivariáveis. Utilizando uma análise rigorosa foram demonstradas as propriedades de estabilidade do sistema em malha fechada e resultados de simulação mostraram as vantagens do esquema proposto.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

REFERÊNCIAS

Apostol, T. (1957). *Mathematical Analisys - A Modern Approach to Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Ariyur, K.B. and Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. Wiley, Canada.

Borgers, D.P. and Heemels, W.P.M.H. (2013). On minimum inter-event times in event-triggered control. In *2013 IEEE 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 7370–7375.

Coutinho, P.H.S. and Palhares, R.M. (2021). Co-design of dynamic event-triggered gain-scheduling control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. doi:10.1109/TAC.2021.3108498.

Ghaffari, A., Krstić, M., and Nešic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.

Heemels, W.P.M.H., Johansson, K.H., and Tabuada, P. (2012). An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3270–3285.

Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36, 595–601.

Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Générale de l'Electricité*, XII(8), 275–277.

Moreira, L.G., Groff, L.B., da Silva, J.M.G., and Tarbouriech, S. (2019). Pi event-triggered control under saturating actuators. *International Journal of Control*, 92(7), 1634–1644.

Plotnikov, V.A. (1980). Averaging of differential inclusions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 31, 454–457.

Sternby, J. (1980). Extremum control systems–an area for adaptive control? In *1980 IEEE Joint Automatic Control Conference (JACC)*, volume 1, 3270–3285.

Tabuada, P. (2007). Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, 1680–1685.

Zhang, X.M., Han, Q.L., Ge, X., Ding, D., Ding, L., Yue, D., and Peng, C. (2020). Networked control systems: A survey of trends and techniques. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(1), 1–17.