

# Controle Extremal Multivariável Estocástico com Atrasos Distintos de Entrada

Paulo Cesar Souza da Silva \* Tiago Roux Oliveira \*

\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),  
Rio de Janeiro – RJ, Brasil  
(e-mail: cesar.paulo151@hotmail.com, tiagoroux@uerj.br)

---

**Abstract:** This paper proposes the control design and analysis for a multivariable Gradient-based stochastic extremum seeking under delays. Multi-input systems with different time delays in each individual input channel are dealt with. The phase compensation of the dither signals and a new predictor based on the estimate of the unknown Hessian will be presented and incorporated in the closed-loop, allowing to achieve exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point. In special, the extremum seeking design for distinct input delays and the stability analysis are reached without using backstepping transformation, eliminating the complexity of the controller and guaranteeing a simpler implementation scheme. A numerical example illustrates the effective performance of the proposed stochastic extremum seeking for delay compensation.

**Resumo:** Neste artigo, é proposto o projeto e análise do controlador extremal multivariável estocástico baseado no algoritmo do Gradiente na presença de atrasos. São tratados sistemas de múltiplas entradas com atrasos diferentes em cada canal de entrada. A compensação de fase dos sinais de perturbação e um novo preditor baseado na estimativa da Hessiana desconhecida serão apresentados e incorporados ao sistema em malha fechada, permitindo a estabilidade exponencial e convergência a uma pequena vizinhança do ponto de extremo. Em especial, o projeto do controle extremal para atrasos distintos de entrada e a análise de estabilidade são realizados sem o uso da transformação *backstepping*, eliminando a complexidade do controlador e garantindo um esquema de implementação mais simples. Um exemplo numérico ilustra o desempenho do controle extremal estocástico para compensação de atrasos.

**Keywords:** Delays; Predictor; Multivariable Stochastic Extremum Seeking; Gradient Methods; Backstepping Transformation.

**Palavras-chaves:** Atrasos; Preditor; Controle Extremal Multivariável Estocástico; Método Gradiente; Transformação *Backstepping*.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O controle extremal (*Extremum Seeking Control* — ESC) pode ser definido como um método adaptativo de otimização em tempo real, independente do modelo e que visa determinar o ponto extremo de um mapeamento não-linear (Krstic, 2009). Apesar de existir um elevado número de trabalhos e artigos detalhando o controle extremal com avanços teóricos e aplicações (Krstic, 2014; Adetola and Guay, 2007; Ghaffari et al., 2012; Oliveira et al., 2011; Krstic and Wang, 2000; Guay and Zhang, 2003), não existe na literatura trabalhos que examinem rigorosamente o problema de ESC multivariável estocástico (Liu and Krstic, 2012) baseado no algoritmo do tipo Gradiente com inserção de múltiplos e distintos atrasos no canais de entrada (Oliveira et al., 2017; Holness et al., 2019).

Além disso, vale comentar que as principais vantagens do controlador extremal estocástico sobre o controlador extremal determinístico (com sinais de excitação determinísticos) são a possibilidade de escapar dos extremos locais, bem como a garantia de uma taxa de convergência mais

rápida (Liu and Krstic, 2012). O ESC está relacionado com uma boa taxa de convergência, enquanto os atrasos quando são inseridos no sistema em malha fechada e simplesmente ignorados, restringem severamente a taxa de convergência do sistema como um todo ou leva o mesmo à instabilidade, uma vez que da literatura sabe-se que o controle extremal não é robusto à presença de atrasos (Oliveira et al., 2017).

A transformação *backstepping* em dimensões infinitas (Krstic, 2009) lançou nova perspectiva no projeto de realimentação de preditores para compensação de atrasos, que possibilitou a obtenção de funções de Lyapunov explícitas para análises de estabilidade do esquema de controle baseado em preditor.

Em (Oliveira et al., 2015), propõe-se uma solução para o controle extremal multivariável com atrasos iguais na entrada de um mapeamento quadrático via realimentação por preditor (Oliveira et al., 2020b), com a apresentação de duas abordagens para construção do preditor através de estimativas do modelo baseadas em perturbações. Na primeira, baseia-se no método do Gradiente para a otimi-



$$S(\eta(t)) = \left[ a_1 \text{sen}(\eta_1(t)) \dots a_n \text{sen}(\eta_n(t)) \right]^T, \quad (5)$$

$$M(\eta(t)) = \left[ \frac{2}{a_1} \text{sen}(\eta_1(t)) \dots \frac{2}{a_n} \text{sen}(\eta_n(t)) \right]^T, \quad (6)$$

com amplitude  $a$ . O subscrito  $i = 1, 2, \dots, n$  indica a  $i$ ésima entrada do vetor  $\eta_i(t)$ . Os elementos do vetor de perturbação gaussiana estocástica  $\eta(t)$  são sequencial e mutuamente independentes, de tal maneira que  $\mathbb{E}\{\eta(t)\} = 0$ ,  $\mathbb{E}\{\eta_i^2(t)\} = \sigma_i^2$  e  $\mathbb{E}\{\eta_i(t) \eta_j(t)\} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ , com  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  indicando o valor esperado do sinal. Também assume-se que a função densidade de probabilidade do vetor de perturbação é simétrica em torno da média.

Perturbações senoidais estocásticas são empregadas via processo de movimento browniano padrão  $W_{\omega t}$  (também conhecido como processo de Wiener) sobre o limite de um círculo (Liu and Krstic, 2012; Mills and Krstic, 2018). Para satisfazer a propriedade de Markov, não há diferença em previsões futuras baseadas apenas no estado atual do processo. Desse modo, refere-se ao processo de Markov como um processo estocástico, que satisfaz a propriedade de Markov com respeito a sua filtragem natural. O sinal de entrada é construído da seguinte maneira:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (7)$$

no qual  $\hat{\theta}$  representa a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\eta_i(t) = \omega \pi (1 + \text{sen}(W_{\omega t}^i)) \quad (8)$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico com frequência  $\omega$  não-nula. Os termos  $W_{\omega t}^i$  denotam diferentes processos de Wiener mutuamente independentes para cada canal e  $\omega > 0$ . Utilizando-se a escala de tempo  $\tau = \omega t$  e o cálculo estocástico baseado em Ito (Liu and Krstic, 2012), obtém-se:

$$d\eta_i = -\frac{\pi}{2} \text{sen}(W_{\tau}^i) d\tau + \pi \cos(W_{\tau}^i) dW_{\tau}^i. \quad (9)$$

O sinal atrasado  $S^D$  de  $S$  é um sinal de perturbação convencional. Também define-se a matriz  $N(\eta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como:

$$N_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{16}{a_i^2} \left( \text{sen}^2(\eta_i(t)) - \frac{1}{2} \right), & i = j, \\ \frac{4}{a_i a_j} \text{sen}(\eta_i(t)) \text{sen}(\eta_j(t)), & i \neq j. \end{cases} \quad (10)$$

A saída correspondente é dada por:

$$y(t) = Q(\theta^D(t)) = Q(\hat{\theta}^D + S^D(t)). \quad (11)$$

O erro de estimação é da seguinte forma:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta}^D(t) - \theta^*. \quad (12)$$

Note que o erro está definido com  $\hat{\theta}^D$  ao invés de  $\hat{\theta}$ . Com esta variável do erro de estimação, o sinal  $y(t)$  pode ser reescrito como:

$$y(t) = Q(\theta^* + \tilde{\theta}(t) + S^D(t)). \quad (13)$$

Propõe-se a seguinte lei de realimentação para compensar os efeitos dos atrasos

$$\dot{\hat{\theta}} = U(t), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = & -cU(t) + cK \left( M(\eta(t))y(t) \right. \\ & \left. + N(\eta(t))y(t) \sum_{i=1}^n \int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (15)$$

para alguma constante positiva  $c > 0$  e matriz diagonal  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com entradas positivas  $K_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Uma vez que  $\dot{\hat{\theta}}(t) = U^D(t)$  e derivando a variável do erro  $\tilde{\theta}$  em relação a  $t$ , encontra-se:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = U^D(t) = \sum_{i=1}^n e_i U_i(t - D_i), \quad (16)$$

que é a forma padrão de um sistema com atrasos na entrada. Posteriormente, será discutido os termos dentro do parênteses no lado direito de (15), que correspondem ao valor médio estimado  $H\tilde{\theta}$  em um instante futuro.

### 3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O Teorema 1 a seguir sintetiza as propriedades de estabilidade/convergência do sistema realimentado em malha fechada. Em particular, uma vez que a parte dinâmica é um simples integrador em (14) ou igualmente em (16), mostra-se que o preditor realimentado não exige a transformação *backstepping* (Krstic, 2009) na análise de estabilidade. Tal análise para o integrador pode ser entendida como um caso especial de análise. Os operadores  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  e  $\mathbb{P}\{\cdot\}$  denotam respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

**Teorema 1** Considere o sistema em malha fechada da Figura 1 com múltiplos e distintos atrasos na entrada de acordo com (1) e um mapa não-linear localmente quadrático (3). Existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*$ ,  $\exists \omega^*(c)$  de maneira tal que  $\forall \omega \geq \omega^*$ , o sistema atrasado em malha fechada (15) e (16) com o estado  $\hat{\theta}_i(t - D_i)$ ,  $U_i(\tau)$ ,  $\forall \tau \in [t - D_i, t]$  e  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tem uma única solução periódica exponencialmente estável, denotada por  $\hat{\theta}_i^{\Pi}(t - D)$ ,  $U_i^{\Pi}(\tau)$ ,  $\forall \tau \in [t - D_i, t]$  e  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , satisfazendo  $\forall t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \hat{\theta}_i^{\Pi}(t - D_i) \right]^2 + \left[ U_i^{\Pi}(t) \right]^2 \right. \\ & \left. + \int_{t-D_i}^t \left[ U_i^{\Pi}(\tau) \right]^2 d\tau \right\}^{1/2} \leq O(1/\omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Além disso,

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| \right\} = O(|a| + 1/\omega), \quad (18)$$

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| \right\} = O(|a|^2 + 1/\omega^2), \quad (19)$$

sendo que  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ .

*Prova:* A representação em EDP do sistema em malha fechada (15), (16) é dada por:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = u(0, t), \quad (20)$$

$$u_t(x, t) = D^{-1}u_x(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad (21)$$

$$u(1, t) = U(t), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = -cU(t) + cK \left( M(\eta(t))y(t) \right. \\ \left. + N(\eta(t))y(t) \int_0^1 Du(x, t)dx \right), \end{aligned} \quad (23)$$

no qual  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))^T \in \mathbb{R}^n$ . É fácil notar que a solução de (21) sob condição (22) é representada como:

$$u_i(x, t) = U_i(D_i x + t - D_i) \quad (24)$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_i u_i(x, t) dx &= \int_{t-D_i}^t u_i \left( \frac{\tau - t + D_i}{D_i}, t \right) d\tau \\ &= \int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Isto significa que

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_i u_i(x, t) dx &= \sum_{i=1}^n e_i \int_0^1 D_i u_i(x, t) dx \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Portanto, pode-se recuperar (16) a partir de (21)-(23). O sistema médio associado ao sistema (20)-(23) é dado por

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = u_{av}(0, t), \quad (27)$$

$$u_{av,t}(x, t) = D^{-1}u_{av,x}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad (28)$$

$$u_{av}(1, t) = U_{av}(t), \quad (29)$$

$$\dot{U}_{av}(t) = -cU_{av}(t) + cKH \left( \tilde{\theta}_{av}(t) + \int_0^1 Du_{av}(x, t)dx \right), \quad (30)$$

onde tem-se o fato de que as médias de  $M(\eta(t))y(t)$  e  $N(\eta(t))y(t)$  são calculadas como  $H\tilde{\theta}_{av}(t)$  e  $H$ . Para simplificar a notação, introduz-se as seguintes variáveis auxiliares

$$\vartheta(t) := H \left( \tilde{\theta}_{av}(t) + \int_0^1 Du_{av}(x, t)dx \right), \quad (31)$$

$$\tilde{U} = U_{av} - K\vartheta. \quad (32)$$

Com esta notação, a equação (30) pode ser simplesmente representada como  $\dot{U}_{av} = -c\tilde{U}$ . Além disso, derivando (31) em relação a  $t$ , chega-se a

$$\dot{\vartheta} = HU_{av}(t). \quad (33)$$

Prova-se a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada empregando funcional de Lyapunov definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V(t) = \vartheta(t)^T K \vartheta(t) + \frac{1}{4} \lambda_{\min}(-H) \int_0^1 \left( (1+x)u_{av}(x, t)^T \right. \\ \left. \times Du_{av}(x, t)dx \right) + \frac{1}{2} \tilde{U}(t)^T (-H) \tilde{U}(t), \end{aligned} \quad (34)$$

lembrando que  $K$  e  $D$  são matrizes diagonais com entradas positivas e que  $H$  é uma matriz negativa definida. Por isso,  $K$ ,  $D$  e  $-H$  são matrizes positivas definidas. Por simplicidade de notação, omite-se explicitamente a dependência das variáveis em  $t$ . A derivada no tempo de  $V$  é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\vartheta^T K H U_{av} + \frac{1}{2} \lambda_{\min}(-H) U_{av}^T U_{av} \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda_{\min}(-H) u(0)^T u(0) - \frac{1}{4} \lambda_{\min}(-H) \\ &\quad \times \int_0^1 u_{av}(x)^T u_{av}(x) dx + \tilde{U}^T (-H) (\dot{U}_{av} - K H U_{av}) \\ \dot{V} &\leq 2\vartheta^T K H U_{av} + \frac{1}{2} U_{av}^T (-H) U_{av} - \frac{1}{8 D_{\max}} \lambda_{\min}(-H) \\ &\quad \times \int_0^1 (1+x) u_{av}(x)^T Du_{av}(x) dx \\ &\quad + \tilde{U}^T (-H) \dot{U}_{av} + \tilde{U}^T (-H) K (-H) U_{av}. \end{aligned} \quad (35)$$

Aplicando a desigualdade de Young ao último termo chega-se a

$$\begin{aligned} \tilde{U}^T (-H) K (-H) U_{av} \leq \\ \frac{1}{2} \tilde{U}^T (-H K H K H) \tilde{U} + \frac{1}{2} U_{av}^T (-H) U_{av}. \end{aligned} \quad (36)$$

Então, completando os quadrados tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \tilde{U}^T(-H)\tilde{U} - \vartheta^T K(-H)K\vartheta \\ &- \frac{1}{8D_{max}} \lambda_{min}(-H) \int_0^1 (1+x)u_{av}(x)^T D U_{av}(x) dx \\ &+ \tilde{U}^T(-H)\dot{U}_{av} + \frac{1}{2}\tilde{U}^T(-HKKHKH)\tilde{U} \\ \dot{V} &= \tilde{U}^T(-H)(\dot{U}_{av} + c^*\tilde{U}) - \vartheta^T K(-H)K\vartheta \\ &- \frac{1}{8D_{max}} \lambda_{min}(-H) \int_0^1 (1+x)u_{av}(x)^T D U_{av}(x) dx, \quad (37) \end{aligned}$$

onde  $c^* := 1 + \lambda_{max}(-HKKHKH)/\lambda_{min}(-H)$ . Desse modo, definindo  $\dot{U}_{av} = c\tilde{U}$  para algum  $c > c^*$ , verifica-se que existe  $\mu > 0$  da seguinte maneira

$$\dot{V} = -\mu V. \quad (38)$$

Finalmente, não é difícil encontrar constantes positivas  $\alpha, \beta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha \left( |\tilde{\theta}_{av}(t)| + \int_0^1 |u_{av}(x,t)|^2 dx + |\tilde{U}(t)|^2 \right) &\leq V(t) \\ &\leq \beta \left( |\tilde{\theta}_{av}(t)| + \int_0^1 |u_{av}(x,t)|^2 dx + |\tilde{U}(t)|^2 \right) \quad (39) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema médio (27)-(30) é exponencialmente estável enquanto  $c > c^*$ .

O procedimento acima elimina o emprego da transformação *backstepping*, bem como os passos 3 e 4 de (Oliveira et al., 2017), destacando-se uma análise menos complicada até aqui. Os passos restantes da prova de estabilidade seguem de uma maneira bem próxima os passos 6 e 7 de (Oliveira et al., 2017; Silva and Oliveira, 2020).

Primeiro, nota-se que  $\int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d\tau = \int_{-D_i}^0 U_i(t+\tau) d\tau$ , então o sistema em malha fechada (15)-(16) pode reescrito como:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{z}^\epsilon(\tau) = G(\mathbf{z}_\tau^\epsilon) + \epsilon F(\tau, \mathbf{z}_\tau^\epsilon, \eta(\tau), \epsilon), \quad (40)$$

no qual  $\mathbf{z}^\epsilon(t) = [\tilde{\theta}(t-D), U(t)]^T$  é o vetor de estado e  $\epsilon := 1/\omega$ . Portanto, uma vez que  $\eta(\tau)$  é um processo de Markov homogeneamente ergódico (assumindo valores no espaço de fase  $Y$ ) com medida invariante  $\mu(d\eta)$  e propriedade de ergodicidade exponencial,  $\mathbf{z}_i^\epsilon(\delta) = \mathbf{z}^\epsilon(t+\delta)$  para  $-D \leq \delta \leq 0$  e  $G: \mathbf{C}_2([-D, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^2$ , bem como a função Lipschitz  $F: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{C}_2([-D, 0]) \times Y \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  com  $F(\tau, 0, \eta, \epsilon) = 0$  são mapeamentos contínuos e  $\mathbf{C}_2([-D, 0])$  denotando a classe de funções vetoriais contínuas de dimensão 2 no intervalo  $[-D, 0]$ , pode-se aplicar o teorema da média de (Katafygiotis and Tsarkov, 1999) para concluir o resultado exponencial de  $p$ -estabilidade (com  $p=2$ ) do sistema aleatório inicial considerando  $\epsilon$  suficientemente pequeno ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) e obter assim a desigualdade (17).

A partir de (38), a origem do sistema médio em malha fechada (27)-(30) com EDP de transporte para a represen-

tação do atraso é exponencialmente estável. Então, de (31) e (34), pode-se concluir os mesmos resultados na norma

$$\left( \sum_{i=1}^n [\tilde{\theta}_i^{av}(t-D_i)]^2 \int_0^{D_i} [u_i^{av}(x,t) dx]^2 + [u_i^{av}(D_i,t)]^2 \right)$$

desde que  $H$  seja não singular.

Portanto, existem constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$  tais que todas as soluções satisfazem  $\Psi(t) \leq \alpha e^{-\beta t} \psi(0), \forall t > 0$ , onde  $\Psi = \sum_{i=1}^n [\tilde{\theta}_i^{av}(t-D_i)]^2 + \int_0^{D_i} [u_i^{av}(x,t) dx]^2 + [u_i^{av}(D_i,t)]^2$ , ou equivalentemente:

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^n [\tilde{\theta}_i^{av}(t-D_i)]^2 + \int_0^{D_i} [u_i^{av}(\tau) d\tau]^2 + [u_i^{av}(t)]^2, \quad (41)$$

utilizando (24). Portanto, de acordo com o teorema da média (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), para um  $\epsilon$  suficientemente pequeno (ou  $\omega$  suficientemente grande), (15)-(16) ou equivalentemente (25)-(27), tem-se uma única solução periódica localmente exponencialmente estável próximo do equilíbrio (origem) satisfazendo (17).

Define-se o tempo de parada (Liu and Krstic, 2010):

$$\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)} := \inf \{ t \geq 0 : |\mathbf{z}^\epsilon(t)| > M |\mathbf{z}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + O(\epsilon) \}. \quad (42)$$

Além disso, aparecem as constantes da seguinte forma:  $M > 0, \lambda > 0$  e a função  $T(\epsilon): (0, 1) \rightarrow \mathbb{N}$ .

Como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial. A norma do vetor erro  $|\mathbf{z}^\epsilon(t)|$  converge para um valor menor do que o valor residual  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ . Trata-se de uma convergência exponencial e rápida, que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \{ t \geq 0 : |\mathbf{z}^\epsilon(t)| > M |\mathbf{z}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + \Delta \} = \infty, \text{ a.s.}, \quad (43)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \{ |\mathbf{z}^\epsilon(t)| \leq M |\mathbf{z}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + \Delta, \forall t \in [0, T(\epsilon)] \} = 1, \quad (44)$$

com  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty$ . De (43) fica claro que  $\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)}$  se aproxima de infinito à medida que  $\epsilon$  tende a zero. De forma similar, em (44) a função determinística  $T(\epsilon)$  tende a infinito à medida que  $\epsilon$  vai a zero. Segue de (43) e (44) que a convergência exponencial é satisfeita dentro de um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ , particularmente o componente  $\tilde{\theta}(t)$ . Então, pode-se dizer que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| \right\} = O(\epsilon)$ . A partir das equações (12) e (7), chega-se a

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a \text{sen}(\eta(t)). \quad (45)$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (45) é da ordem de  $O(\epsilon)$  e o segundo termo é da ordem de  $O(a)$ ,

chega-se à equação (18). Finalmente, a partir de (3) e (18), obtém-se (19).  $\square$

#### 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Com o objetivo de avaliar a compensação do atraso no ESC estocástico multivariável, considera-se o seguinte mapeamento estático não-linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{1}{2} \left( 2(\theta_1)^2 + 4(\theta_2 - 1)^2 + 4\theta_1(\theta_2 - 1) \right), \quad (46)$$

com atrasos de entrada  $D_1 = 50$  e  $D_2 = 100$ . Os pontos de extremo são  $\theta^* = (0, 1)$  e  $y^* = 5$  e a Hessiana do mapa é

$$H = - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Com este caso ( $n=2$ ), a equação do controlador preditor é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = & -cU(t) + c \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} (M(\eta(t))y(t) + N(\eta(t))y(t) \\ & \times \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \int_{t-D_1}^t U_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \int_{t-D_2}^t U_2(\tau)d\tau \right)). \end{aligned} \quad (48)$$

Considerando os sinais  $M(\eta(t))$  e  $N(\eta(t))$

$$\begin{aligned} M(\eta(t)) = & \begin{bmatrix} M_1(\eta(t)) \\ M_2(\eta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1} \text{sen}(\eta_1(t - D_1)) \\ \frac{2}{a_2} \text{sen}(\eta_2(t - D_2)) \end{bmatrix}, \quad (49) \\ N(\eta(t)) = & \begin{bmatrix} N_{11}\eta(t) & N_{12}\eta(t) \\ N_{21}\eta(t) & N_{22}\eta(t) \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -\frac{8}{a_1^2} \cos^2(2\eta_1(t - D_1)) & \frac{4}{a_1 a_2} \text{sen}(\eta_1(t - D_1)) \text{sen}(\eta_2(t - D_2)) \\ \frac{4}{a_1 a_2} \text{sen}(\eta_1(t - D_1)) \text{sen}(\eta_2(t - D_2)) & -\frac{8}{a_2^2} \cos^2(2\eta_2(t - D_2)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (50)$$

a equação do preditor (48) pode ser escrita como  $\dot{U}_1(t)$  e  $\dot{U}_2(t)$  a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) = & -cU_1(t) + cK_1 \left( M_1(\eta(t))y(t) + y(t) \left( N_{11}(\eta(t)) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_{t-D_1}^t U_1(\tau)d\tau + N_{12}(\eta(t)) \int_{t-D_2}^t U_2(\tau)d\tau \right) \right), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(t) = & -cU_2(t) + cK_2 \left( M_2(\eta(t))y(t) + y(t) \left( N_{21}(\eta(t)) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_{t-D_1}^t U_1(\tau)d\tau + N_{22}(\eta(t)) \int_{t-D_2}^t U_2(\tau)d\tau \right) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

A Figura 1 mostra o esquema proposto de controle extremal alternativo com múltiplos atrasos na entrada, baseado

no método do gradiente. Para este exemplo em que  $n = 2$ ,  $D = \text{diag}\{D_1, D_2\}$  e  $K = \text{diag}\{K_1, K_2\}$ . A realimentação do preditor é implementada de acordo com as leis (51) e (52), e o sinal de perturbação aditiva  $S(\eta(t))$ ,  $M(\eta(t))$  e  $N(\eta(t))$  são dados por (5), (6) e (10), respectivamente.

São apresentadas simulações numéricas do preditor (48) e os testes foram realizados empregando os seguintes valores:  $a_1 = a_2 = 0.22$ ,  $c = 20$  e  $K = 0.005 I$ , em que  $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é uma matriz identidade.

Pela Figura 2, confere-se a preservação da estabilidade do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = (0, 1)$ . Através da Figura 3, observa-se que a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado  $y^* = 5$ . Pelas Figuras 4 e 5, verifica-se o que foi demonstrado na literatura que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade.

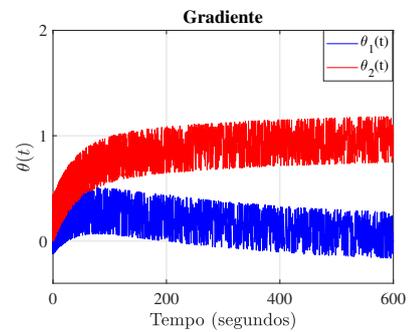


Figura 2. Entrada  $\theta(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico sem atrasos.

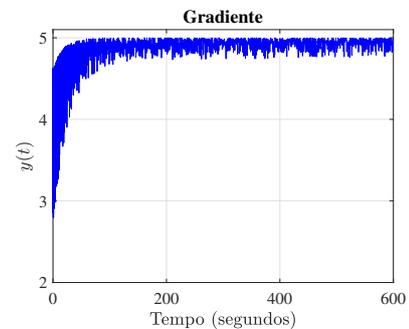


Figura 3. Saída  $y(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico sem atrasos.

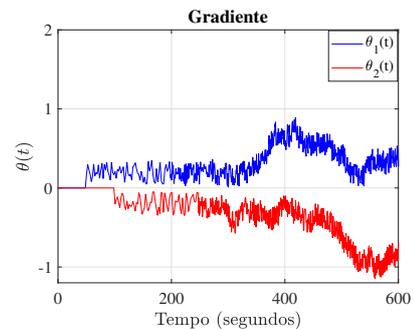


Figura 4. Entrada  $\theta(t)$  do algoritmo do Gradiente multivariável estocástico com atrasos sem preditor.

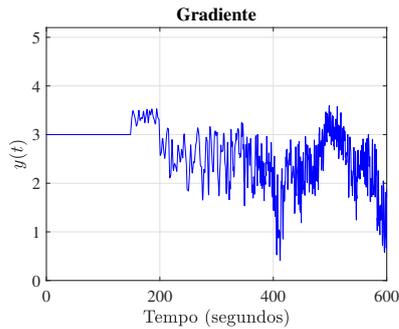


Figura 5. Saída  $y(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos sem preditor.

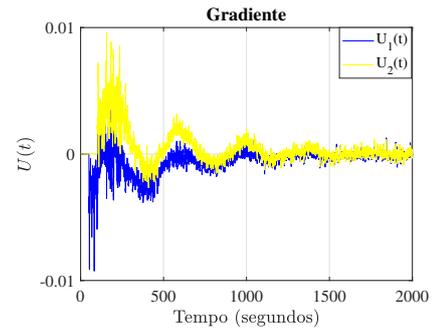


Figura 9. Sinal de Controle  $U(t)$  do algoritmo do Gradiente multivariável estocástico com atrasos mais preditor.

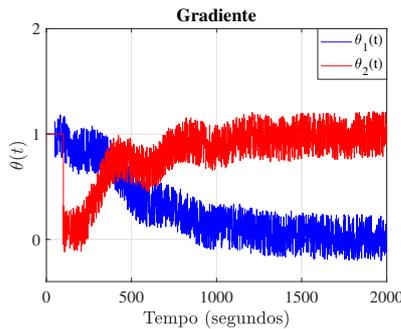


Figura 6. Entrada  $\theta(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos distintos na entrada mais preditor.

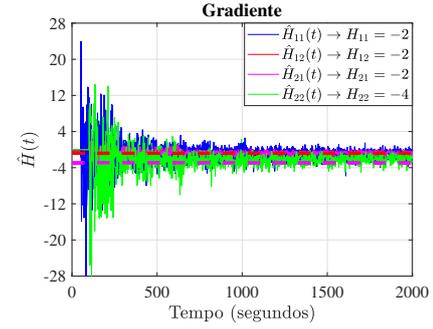


Figura 10. Convergência do valor  $\hat{H}(t)$  da estimação da matriz Hessiana. O tracejado vermelho corresponde a  $H_{11} = H_{12} = H_{21} = -2$  e o tracejado lilás corresponde a  $H_{22} = -4$ .

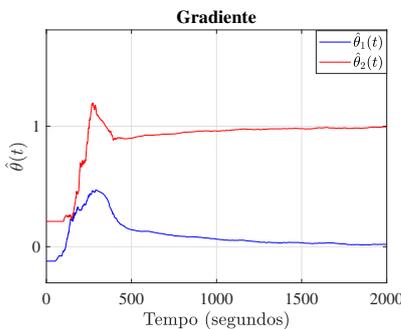


Figura 7. Estimativa  $\hat{\theta}(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos distintos na entrada mais preditor.

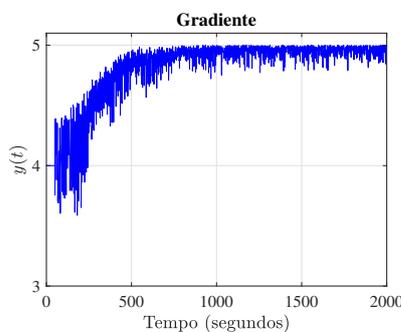


Figura 8. Saída  $y(t)$  do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos distintos na entrada mais preditor.

Pela Figura 6, confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = (0, 1)$ . Na Figura 8, observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado  $Q^* = 5$ . Através da Figura 9, observa-se a atenuação do sinal de controle  $U(t)$  à medida que a saída do mapeamento tende à vizinhança de seu valor ótimo  $y^*$ .

Pela Figura 10, nota-se que: a estabilidade do sistema em malha fechada foi preservada e as estimativas da matriz Hessiana (47) convergem para a vizinhança ótima desejada.

## 5. CONCLUSÃO

Neste artigo, foi proposto um novo esquema de controle extremal estocástico baseado no algoritmo Gradiente para otimização em tempo real de multiparâmetros na presença de distintos atrasos (de entrada) no atuador. A lei de controle aqui definida para compensação dos múltiplos atrasos usa realimentação baseada em preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbações, associada ao ajuste adequado dos sinais estocásticos (de excitação). A nova proposta de realimentação baseada em preditor é muito mais simples que a proposta prévia utilizando o método Gradiente determinístico, encontrada na literatura. A generalização para mapas com múltiplas entradas e única saída com diferentes atrasos de entrada realiza a predição de canais com acoplamento cruzado. A contribuição deste

trabalho neste cenário repleto de desafios é o desenvolvimento sem empregar a metodologia *backstepping*, que normalmente é utilizada em publicações sobre problemas de controle extremal com atrasos. No futuro, existe ainda a possibilidade de lidar com atrasos distribuídos (Oliveira et al., 2020a).

#### AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. P.C.S. Silva e T.R. Oliveira agradecem CNPq e FAPERJ pelo suporte financeiro.

#### REFERÊNCIAS

- Adetola, V. and Guay, M. (2007). Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, 43, 105–110.
- Ghaffari, A., Krstic, M., and Nesic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.
- Guay, M. and Zhang, T. (2003). Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *Automatica*, 39, 1283–1293.
- Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.
- Holness, E., Oliveira, T.R., and Tsubakino, D. (2019). Controle extremal multivariável simplificado para atrasos distintos de entrada. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1, 3153–3158.
- Katafygiotis, L. and Tsarkov, Y. (1999). Averaging and stability of quasilinear functional differential equations with markov parameters. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 12, 1–15.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhauser.
- Krstic, M. (2014). *Extremum Seeking Control*, in T.Samad and J. Baillieul, *Encyclopedia of Systems and Control*. Springer.
- Krstic, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamics systems. *Automatica*, 36, 595–601.
- Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscillations systems: Overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19, 201–215.
- Liu, S.J. and Krstic, M. (2010). Stochastic averaging in continuous time and its applications in to extremum seeking. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55, 2235–2250.
- Liu, S.J. and Krstic, M. (2012). *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. springer.
- Mills, G. and Krstic, M. (2018). Maximizing map sensitivity and higher derivatives via extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63, 3237–3247.
- Oliveira, T.R., Hsu, L., and Peixoto, A.J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with applications to extremum-seeking control. *Automatica*, 47, 2029–2038.
- Oliveira, T.R. and Krstic, M. (2015). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 48, 304–309.
- Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2015). Multiparameter extremum seeking with output delays. *American Control Conference*.
- Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.
- Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2020a). Extremum seeking under distributed input delays. *IFAC-Papers-OnLine*, 53, 5423–5428.
- Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2020b). A simplified multivariable gradient extremum seeking for distinct input delays with delay-independent convergence rates. *American Control Conference (ACC)*, 608–613.
- Silva, P.C.S. and Oliveira, T.R. (2020). Controle extremal estocástico baseado no algoritmo do gradiente na presença de atrasos. *Congresso Brasileiro de Automatica*, 2(1).