

# Regulador Robusto Recursivo com Matrizes de Ponderação Incertas para Sistemas com Atrasos nos Estados

Elizandra K. Odorico \* Marco H. Terra \*

\* Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SP, (e-mails: elizandra.odorico@usp.br e terra@sc.usp.br).

---

**Abstract:** This paper deals with the recursive robust control problem for uncertain linear discrete-time systems with time-invariant delay in the state. Uncertainties are modeled norm-bounded and are present in parametric matrices and in weighting matrices. Applying the lifting method, the delayed system is transformed into an augmented delay-free system. Then, the regulator is deduced from a combination of penalty functions and the optimal solution of regularized least-squares problems with uncertainties. The main feature of this approach is the recursiveness established by Riccati equations, which are presented in a symmetric matrix framework. The numerical example illustrates the performance of the proposed regulator when compared to another approach in the literature.

**Resumo:** Este artigo trata o problema de controle robusto recursivo para sistemas lineares incertos de tempo discreto com atrasos invariantes nos estados. As incertezas são modeladas limitadas em norma e estão presentes nas matrizes paramétricas e nas matrizes de ponderação. Aplicando o método de elevação, o sistema atrasado é transformado em um sistema aumentado livre de atraso. Assim, o regulador é deduzido a partir da combinação das funções penalidades com a solução ótima dos problemas de mínimos quadrados regularizados com incertezas. A principal característica dessa abordagem é a recursividade estabelecida por equações de Riccati, as quais são apresentadas em um arranjo matricial simétrico. O exemplo numérico ilustra o desempenho do regulador proposto quando comparado com outra abordagem da literatura.

*Keywords:* Delay; uncertain systems; recursive robust regulator.

*Palavras-chave:* Atraso; sistemas incertos; regulador robusto recursivo.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas lineares incertos com atrasos (SLIA) nos estados constituem uma classe de sistemas com incertezas paramétricas e com a dinâmica futura dependendo do estado atual e dos estados passados. Dentre os vários fatores que podem causar atrasos em um sistema dinâmico podemos considerar a perda de dados na transferência de informações e parâmetros imprecisos ou desconhecidos.

O estudo de técnicas para a análise e síntese de controladores de sistemas com atrasos tem despertado uma atenção considerável dos pesquisadores, visto que a presença de incertezas paramétricas e atrasos nos estados pode afetar as características dinâmicas dos sistemas, aumentando a dificuldade na análise da estabilidade e no projeto de controladores.

Considerando esses aspectos, a maioria dos resultados disponíveis na literatura tem utilizado técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para deduzir controladores. Leite et al. (2004) investigaram condições convexas, a partir de

funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros, para assegurar a existência do ganho de realimentação para sistemas lineares incertos com atrasos invariantes nos estados pertencentes a um domínio politópico. De modo semelhante, Miranda et al. (2010) propôs uma lei de controle para sistemas sujeitos a atrasos variante e invariante no tempo.

Por outro lado, o método de elevação (do inglês *lifting method*) tem sido utilizado por muitos pesquisadores para tratar sistemas com atrasos, como Gagliardi et al. (2018) e Bortolin et al. (2018b). Este método consiste em introduzir variáveis de estados adicionais, transformando o espaço de estados com atraso em um equivalente, sem atraso. Bortolin et al. (2018b) aplicou esta abordagem em um SLIA e projetou uma lei de controle por meio de uma equação de Riccati aumentada associada ao problema do regulador linear quadrático (RLQ) robusto. Outras abordagens baseadas no método de elevação podem ser encontradas em Xia et al. (2007); Sun and Chen (2012); Bortolin et al. (2018a).

Cabe ressaltar que os atrasos nos estados e as incertezas presentes no sistema dinâmico não são os únicos distúrbios que afetam o desempenho dos reguladores. Há ainda as incertezas relacionadas à função custo, ou seja, presentes

---

\* Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

nas matrizes de ponderação. Chen and Peng (1988), Kosanam and Simon (2004) e Shi et al. (2007) desenvolveram filtros de Kalman robustos sob a hipótese de matrizes de covariância incertas. Além disso, Shi et al. (2007) ilustrou a aplicação dessa teoria em situações práticas, como na estimação de estados de sensores em rede.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é propor soluções recursivas para o problema de reguladores robustos recursivos (RRRs) com matrizes de ponderação incertas para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas e atrasos nos estados. Seguindo os resultados recentes propostos por Bortolin et al. (2018b); Gagliardi et al. (2018), utilizamos o método de elevação para reescrever o SLIA como um sistema linear incerto (SLI) aumentado. Assim, o controlador é projetado em termos de equações de Riccati, através da abordagem de mínimos quadrados regularizados robustos. A principal característica do RRR é propor uma solução recursiva que garanta a estabilidade e o desempenho na presença de atrasos nos estados e incertezas em todos os parâmetros do sistema.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema linear incerto com atraso no estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_k + \delta A_k)x_k + (A_{d,k} + \delta A_{d,k})x_{k-d} + (B_k + \delta B_k)u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , com  $x_k \in \mathbb{R}^n$  sendo o vetor de estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d} \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado atraso de  $d$  amostras e  $u_k \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle. O atraso  $d$  é um inteiro positivo invariante no tempo e  $x_k = \varphi_0(k)$  denota a condição inicial para  $k = -d, -d+1, \dots, 0$ . As matrizes de parâmetros  $A_k, A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e as incertezas paramétricas  $\delta A_k, \delta A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são modeladas por:

$$[\delta A_k \quad \delta A_{d,k} \quad \delta B_k] = H_k \Delta_k [E_{A_k} \quad E_{A_{d,k}} \quad E_{B_k}],$$

sendo  $E_{A_k}, E_{A_{d,k}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $E_{B_k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes conhecidas e  $\Delta_k \in \mathbb{R}^{p \times q}$  uma matriz de contração com  $\|\Delta_k\| \leq 1$ .

Associada ao SLIA (1), considere uma função custo quadrática de  $N$  estágios, que envolve todas as combinações dos estados atrasados, definida por:

$$\begin{aligned} J_N(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-d}, u_k, d) &= \sum_{\eta=0}^d \sum_{\rho=0}^d \left( x_{N-\eta}^T P_{N,d}^{\eta,\rho} x_{N-\rho} \right) + \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{\eta=0}^d \sum_{\rho=0}^d \left( x_{k-\eta}^T (Q_{k,d}^{\eta,\rho} + \delta_{Q_k}^T Q_{k,d}^{\eta,\rho} \delta_{Q_k}) x_{k-\rho} \right) + \right. \\ &\left. u_k^T (R_k + \delta_{R_k}^T R_k \delta_{R_k}) u_k \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Observe que para cada atraso o funcional quadrático (2) apresenta diferentes matrizes de ponderação  $P_{N,d}^{\eta,\rho}$  e  $Q_{k,d}^{\eta,\rho}$ , que alteram-se, respectivamente, de acordo com os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{P}_{N,d}^{\eta,\rho} := \{P_{N,0}^{\eta,\rho}, \dots, P_{N,d}^{\eta,\rho}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_{k,d}^{\eta,\rho} := \{Q_{k,0}^{\eta,\rho}, \dots, Q_{k,d}^{\eta,\rho}\},$$

sendo as matrizes  $P_{N,d}^{\eta,\rho}$  e  $Q_{k,d}^{\eta,\rho}$ , com  $\eta, \rho \in \{0, \dots, d\}$  e  $d$  um inteiro positivo, definidas tal que

$$J(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-d}, u_k, d) \succ 0.$$

Sem perda de generalidade, assume-se que  $P_{N,d}^{\eta,\rho} = P_{N,d}^{\eta,\rho T}$  e  $Q_{k,d}^{\eta,\rho} = Q_{k,d}^{\eta,\rho T}$ . Uma contribuição desta abordagem é considerar os parâmetros incertos  $\delta_{Q_k}$  e  $\delta_{R_k}$ , que são modelados limitados em normas:

$$\begin{aligned} \delta_{Q_k} &= H_{Q_k} \Delta_{Q_k} E_{Q_k} \quad \text{e} \quad \delta_{R_k} = H_{R_k} \Delta_{R_k} E_{R_k} \\ \text{com} \quad &\|\Delta_{Q_k}\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|\Delta_{R_k}\| \leq 1, \end{aligned}$$

onde  $H_{Q_k} \in \mathbb{R}^{n \times r_1}$  e  $H_{R_k} \in \mathbb{R}^{q \times r_2}$  são matrizes conhecidas não-nulas,  $E_{Q_k} \in \mathbb{R}^{v_1 \times n}$ ,  $E_{R_k} \in \mathbb{R}^{v_2 \times m}$  são matrizes conhecidas e  $\Delta_{Q_k} \in \mathbb{R}^{r_1 \times v_1}$ ,  $\Delta_{R_k} \in \mathbb{R}^{r_2 \times v_2}$  são as matrizes de contração arbitrária com  $\|\Delta_{Q_k}\| \leq 1$  e  $\|\Delta_{R_k}\| \leq 1$ .

Considera-se a seguinte lei de controle independente do atraso para estabilizar o SLIA (1):

$$u_k = \mathcal{K}_k z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

onde  $\mathcal{K}_k = [K_0 \quad K_1 \quad \dots \quad K_d] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$  é a matriz do ganho de realimentação e  $z_k$  é o estado aumentado relacionado a condição inicial  $z_0 = [\varphi_0(0) \quad \varphi_0(-1) \quad \dots \quad \varphi_0(-d)]^T$ , dado por:

$$z_k = [x_k \quad x_{k-1} \quad \dots \quad x_{k-d}]^T. \quad (4)$$

Inspirado em Fridman (2014); Bortolin et al. (2018b), o Sistema (1), com o estado aumentado (4), pode ser reescrito como um SLI aumentado:

$$z_{k+1} = (F_k + \delta F_k) z_k + (G_k + \delta G_k) u_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (5)$$

com as matrizes aumentadas  $F_k, \delta F_k \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $G_k, \delta G_k \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ , sendo  $n_d = dn + n$ , definidas por:

$$\begin{aligned} F_k &:= \begin{bmatrix} \overbrace{A_k \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{d-1} & A_{d,k} \\ I_{dn} & 0_{dn \times n} \end{bmatrix}, \quad G_k := \begin{bmatrix} B_k \\ 0_{dn \times m} \end{bmatrix}, \\ \delta F_k &:= \begin{bmatrix} \overbrace{\delta A_k \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{d-1} & \delta A_{d,k} \\ 0_{dn} & 0_{dn \times n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta G_k := \begin{bmatrix} \delta B_k \\ 0_{dn \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As matrizes de parâmetros incertos são modeladas limitadas em norma:

$$[\delta F_k \quad \delta G_k] = M_k \Delta_k [N_{F_k} \quad N_{G_k}], \quad (6)$$

com  $\|\Delta_k\| \leq 1$ ,

$$M_k := [H_k \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^{n_d \times q}, \quad \Delta_k = \Delta_k \in \mathbb{R}^{q \times \ell},$$

$$\begin{aligned} N_{F_k} &:= \begin{bmatrix} E_{A_k} & \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{d-1} & E_{A_{d,k}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times n_d} \\ \text{e} \quad N_{G_k} &:= E_{B_k} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, a função custo quadrática (2) pode ser reescrita em termos do SLI (5) como,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N(z_{k+1}, u_k) &= z_N^T \mathcal{P}_N z_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left( z_k^T (Q_k + \delta_{Q_k}^T Q_k \delta_{Q_k}) z_k + \right. \\ &\left. u_k^T (R_k + \delta_{R_k}^T R_k \delta_{R_k}) u_k \right), \end{aligned} \quad (7)$$

com as matrizes  $\mathcal{P}_N, Q_k, R_k \succ 0$  dadas por:

$$\mathcal{P}_N := \begin{bmatrix} P_N^{0,0} & P_N^{0,1} & \dots & P_N^{0,d} \\ P_N^{1,0} & P_N^{1,1} & \dots & P_N^{1,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_N^{d,0} & P_N^{d,1} & \dots & P_N^{d,d} \end{bmatrix}, \quad Q_k := \begin{bmatrix} Q_k^{0,0} & Q_k^{0,1} & \dots & Q_k^{0,d} \\ Q_k^{1,0} & Q_k^{1,1} & \dots & Q_k^{1,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_k^{d,0} & Q_k^{d,1} & \dots & Q_k^{d,d} \end{bmatrix}$$

e  $\mathcal{R}_k := R_k$ ,

$$\begin{aligned} [\delta M \ \delta w] &= L_1 \Delta_1 [E_M \ E_w], \\ [\delta N \ \delta y] &= L_2 \Delta_2 [E_N \ E_y], \end{aligned}$$

com  $L_1, L_2$  sendo matrizes diferente de zero,  $\Delta_1, \Delta_2$  matrizes de contrações arbitrárias com  $\|\Delta_i\| \leq 1$ , para  $i = 1, 2$  e  $E_M, E_w, E_N, E_y$  são matrizes conhecidas.

e os parâmetros incertos definidos como

$$\delta_{Q_k} = M_{Q_k} \Delta_{Q_k} N_{Q_k} \quad \text{e} \quad \delta_{R_k} = M_{R_k} \Delta_{R_k} N_{R_k},$$

sendo  $\|\Delta_{Q_k}\| \leq 1$ ,  $\|\Delta_{R_k}\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} M_{Q_k} &:= [H_{Q_k} \ H_{Q_k} \ \dots \ H_{Q_k}]^T \in \mathbb{R}^{n_d \times r_1}, \\ \Delta_{Q_k} &:= \Delta_{Q_k} \in \mathbb{R}^{r_1 \times v_1}, \\ M_{R_k} &:= H_{R_k} \in \mathbb{R}^{m \times r_2}, \quad \Delta_{R_k} := \Delta_{R_k} \in \mathbb{R}^{r_2 \times v_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{Q_k} &:= [E_{Q_k} \ \overbrace{E_{Q_k} \ \dots \ E_{Q_k}}^{d-1} \ E_{Q_k}] \in \mathbb{R}^{v_1 \times n_d} \\ \text{e } N_{R_k} &:= E_{R_k} \in \mathbb{R}^{v_2 \times m}. \end{aligned}$$

Portanto, o principal objetivo deste trabalho consiste em determinar a sequência ótima de controle de realimentação de estado  $\mathcal{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  que regula o Sistema (1) sujeito a atraso no estado e incertezas relacionadas às matrizes de parâmetros e às matrizes de ponderação. Assim, baseado em Sayed (2001); Cerri and Terra (2017), propomos o seguinte problema de controle robusto:

$$\begin{aligned} \min_{\{z_{k+1}\}, \{u_k\}} \max_{\delta_k} \mathcal{J}_N(z_{k+1}, u_k) \\ \text{sujeito a } z_{k+1} &= (F_k + \delta F_k)z_k + (G_k + \delta G_k)u_k, \end{aligned} \quad (8)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde  $\{z_{k+1}\} := \{z_0, \dots, z_N\}$  e  $\{u_k\} := \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ , com  $\delta_k := \{\delta_{Q_k}, \delta_{R_k}, \delta F_k, \delta G_k\}$ .

Observe que este problema de otimização difere daqueles apresentados em Sayed (2001); Cerri and Terra (2017), devido a presença das incertezas presentes nas matrizes de ponderação, sendo esta uma contribuição deste trabalho. Nas próximas seções, a solução do problema de otimização (8) é apresentada e a otimalidade do RRR é assegurada por sua equivalência com o RLQ clássico.

### 3. MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS ROBUSTOS

Esta seção apresenta uma abordagem que auxilia na solução de problemas de otimização com dados sujeitos a incertezas limitadas em norma. A solução consiste em resolver um problema de mínimos quadrados regularizados robustos com restrições, transformando-o em um problema irrestrito através do *método de função penalidade* (Luenberger and Ye, 2008).

Considere o problema de minimizar uma variável  $z$  sob a máxima influência das incertezas limitadas em norma  $\delta := \{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y\}$ , descrito pelo seguinte problema de otimização restrito:

$$\begin{aligned} \min_z \max_{\delta} F(z) &= \|z\|_U^2 + \|(M + \delta M)z - (w + \delta w)\|_V^2 \\ \text{sujeito a } (N + \delta N)z &= y + \delta y, \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $M \in \mathbb{R}^{r \times s}$  e  $N \in \mathbb{R}^{l \times s}$  são matrizes conhecidas,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^l$  são vetores de medida,  $z \in \mathbb{R}^s$  é um vetor desconhecido,  $U \succ 0$  e  $V \succ 0$  são matrizes de ponderação e  $\delta M, \delta w, \delta N, \delta y$  são incertezas modeladas como

O problema de otimização restrito (9) pode ser transformado em um problema irrestrito equivalente pela aplicação do método da função de penalidade, de modo que a restrição seja inserida na função objetivo por meio do parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , que penaliza violações desta restrição. Assim, para cada  $\mu$ , o problema (9) pode ser tratado pelo problema usual de mínimos quadrados regularizados incertos

$$\begin{aligned} \min_{x_\mu} \max_{\delta A, \delta b} \mathcal{F}(x_\mu) &= \|x_\mu\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x_\mu - (b + \delta b)\|_{W_\mu}^2 \\ \text{com } [\delta A \ \delta b] &= H \Delta [E_A \ E_b], \end{aligned} \quad (10)$$

onde

$$Q := U, \quad A := \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad \delta A := \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix},$$

$$\delta b := \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad W_\mu := \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I_l \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta := \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad E_A := \begin{bmatrix} E_M \\ E_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_b := \begin{bmatrix} E_w \\ E_y \end{bmatrix}.$$

O problema (10) é solucionado iterativamente, ou seja, para cada  $\mu > 0$  de uma sequência monotonicamente crescente  $\{\mu_k\}$ , uma solução ótima  $x_\mu^*$  para (10) é obtido. A solução ótima do problema restrito original (9) é obtida quando  $\mu \rightarrow +\infty$ , de acordo com Luenberger and Ye (2008). Caso contrário,  $x_\mu^*$  é uma solução subótima para o problema restrito. Uma vez que, qualquer ponto limite da sequência de soluções gerada para o problema irrestrito (10) é uma solução para o problema original (9), conforme Luenberger and Ye (2008).

A solução para o problema de otimização (10) foi apresentada em Sayed (2001) e redefinida em termos de um arranjo matricial simétrico por Bortolin et al. (2018a), conforme o Lema 1.

*Lema 1.* Considere os problemas de otimização (9) e (10). Suponha que  $V$  é definido positivo,  $L_1$  e  $L_2$  são matrizes posto coluna completo, e a matriz  $\begin{bmatrix} E_M \\ E_N \end{bmatrix}$  é posto linha completo, então as seguintes afirmações são válidas:

(i) para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $x_\mu^*$ , e o valor mínimo da função objetivo  $\mathcal{F}(x_\mu^*)$  para o problema irrestrito (10) são dados por:

$$\begin{bmatrix} x_\mu^* \\ \mathcal{F}(x_\mu^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & E_b \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I_s \\ 0 & \widehat{W}_\mu^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}^{-1} I & E_A \\ I_s & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde

$$\widehat{W}_\mu^{-1} = \text{diag} \left( V^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} L_1 L_1^T, \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}^{-1} L_2 L_2^T \right)$$

e  $\widehat{\lambda} = \beta \|\text{diag}(L_1^T V L_1, \mu L_2^T L_2)\|$ , para algum  $\beta > 1$ ;

(ii) a solução ótima  $z^* = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} x_\mu^*$  e o valor mínimo da função objetivo  $F(z^*) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x_\mu^*)$  para o problema

original restrito (9) são dados por

$$\begin{bmatrix} z^* \\ F(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \\ 0 & y \\ 0 & E_w \\ 0 & E_y \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \\ 0 & V^{-1} & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_N \\ I_s & M^T & N^T & E_M^T & E_N^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ y \\ E_w \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### 4. REGULADOR ROBUSTO RECURSIVO COM MATRIZES DE PONDERAÇÃO INCERTAS PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASOS NOS ESTADOS

O regulador robusto recursivo proposto é deduzido de acordo com o princípio de otimização de Bellman, permitindo que o funcional de custo quadrático (7) seja dividido em problemas de otimização de um passo. Desta forma, a programação dinâmica (Bertsekas, 1995) é aplicada para resolvê-los em *backwards fashion*. Assim, em cada passo  $k = N, \dots, 0$ , considera-se o problema de otimização restrito (8) com o seguinte funcional de um passo:

$$\mathcal{J}_k(z_{k+1}, u_k) = z_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} z_{k+1} + z_k^T (\mathcal{Q}_k + \delta_{\mathcal{Q}_k}^T \mathcal{Q}_k \delta_{\mathcal{Q}_k}) z_k + u_k^T (\mathcal{R}_k + \delta_{\mathcal{R}_k}^T \mathcal{R}_k \delta_{\mathcal{R}_k}) u_k. \quad (12)$$

A restrição do problema min-max (8) pode ser inserida na função custo (12) via método de função penalidade, na qual o parâmetro de penalidade  $\mu > 0$  penaliza qualquer violações das restrições. Assim, para cada  $\mu$ , o problema (8) é reescrito como um problema de otimização irrestrito:

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta_k} \mathfrak{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (13)$$

com o funcional custo quadrático,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) &= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu, k+1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \\ &\left( \begin{bmatrix} 0 & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -(G_k + \delta G_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ -\delta_{\mathcal{Q}_k} \\ F_k + \delta F_k \end{bmatrix} z_k \right)^T \\ &\begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (14) \end{aligned}$$

Observe que o problema de otimização (14) é equivalente ao (10), portanto, a cada passo  $k$ , a solução de (14) pode ser calculada através da abordagem de mínimos quadrados regularizados robustos (Lema 1). Desta forma, no Lema 2 é

proposto a principal contribuição deste trabalho, o regulador robusto recursivo com matrizes de ponderação incertas para sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas e atrasos no estado.

**Lema 2.** Considere o problema de otimização (13) com a função custo quadrático (14), para  $\mu > 0$  fixado. Suponha que  $\Phi(\mu, \beta) \succeq 0$ ,  $N_{\mathcal{Q}_k}, N_{\mathcal{R}_k}, N_{G_k}$  têm posto linha completo e  $z_0$  e  $\mathcal{P}_N \succ 0$  são dados. Assim, o regulador robusto recursivo com matrizes de ponderação incertas para SLI (5) é dado por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathfrak{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu, k} \\ \mathcal{K}_{\mu, k} \\ \mathcal{P}_{\mu, k} \end{bmatrix} z_k,$$

onde, para  $k = N-1, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $\mathcal{L}_{\mu, k}$ , o ganho de realimentação  $\mathcal{K}_{\mu, k}$  e a solução da equação de Riccati  $\mathcal{P}_{\mu, k}$  são dadas pelo arranjo matricial simétrico (15).

**Prova.** Segue da identificação do problema (13) como um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados robustos, ou seja, realizando as identificações entre os problemas (10) e (13), temos que:

$$x_\mu = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu, k+1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix}, W_\mu = \text{diag}(\mathcal{R}_k, \mathcal{Q}_k, \mathcal{Q}_k, \mu I_{n_d}),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_k \end{bmatrix}, \delta A = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_k \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ 0 \\ F_k \end{bmatrix} z_k$$

$$\delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta_{\mathcal{Q}_k} \\ \delta F_k \end{bmatrix} z_k, H = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{R}_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{Q}_k} & 0 \\ 0 & 0 & M_k \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} 0 & N_{\mathcal{R}_k} \\ 0 & 0 \\ 0 & -N_{G_k} \end{bmatrix},$$

$$E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{\mathcal{Q}_k} \\ N_{F_k} \end{bmatrix} z_k \text{ e } \Delta = \text{diag}(\Delta_{\mathcal{R}_k}, \Delta_{\mathcal{Q}_k}, \Delta_k). \quad (16)$$

Portanto, aplicando o Lema 1 obtém-se a trajetória de estado ótima  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathfrak{J}_{\mu, k}^*$  como o arranjo matricial simétrico (15). Observe que a solução é independente de  $\Phi(\mathcal{R}_k, \hat{\lambda}) = \mathcal{R}_k^{-1} - \hat{\lambda} M_{\mathcal{R}_k} M_{\mathcal{R}_k}^T$  e  $\Phi(\mathcal{Q}_k, \hat{\lambda}) = \mathcal{Q}_k^{-1} - \hat{\lambda} M_{\mathcal{Q}_k} M_{\mathcal{Q}_k}^T$ .

O próximo resultado mostra que a solução apresentada em um arranjo matricial simétrico no Lema 2, pode ser reduzida a uma forma de equação de Riccati recursiva equivalente.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu, k} \\ \mathcal{K}_{\mu, k} \\ \mathcal{P}_{\mu, k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & \widehat{F}_k \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma(\mu, \hat{\lambda}) & \widehat{I} & -\widehat{G}_k \\ I_{n_d} & 0 & 0 & \widehat{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\widehat{G}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \widehat{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15) \\ \widehat{\mathcal{F}}_k &\leftarrow \begin{bmatrix} F_k \\ 0 \\ -N_{\mathcal{Q}_k} \\ N_{F_k} \end{bmatrix}, \widehat{\mathcal{G}}_k &\leftarrow \begin{bmatrix} G_k \\ N_{\mathcal{R}_k} \\ 0 \\ N_{G_k} \end{bmatrix}, \widehat{I} &\leftarrow \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma(\mu, \hat{\lambda}) &\leftarrow \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_{v_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_{v_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_\ell \end{bmatrix}, \\ \Phi(\mu, \hat{\lambda}) &:= \mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_k M_k^T \text{ e } \hat{\lambda} := \beta \| \mu M_k^T M_k \|^2, \text{ para algum } \beta > 1. \end{aligned}$$

**Teorema 1.** Considere o problema de otimização (13). A solução algébrica robusta recursiva ótima, para cada passo  $k = N - 1, \dots, 0$  e cada  $\mu > 0$ , é dada por:

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \hat{Q}_k + \hat{F}_k^T \left( \hat{\mathcal{P}}_{k+1}^{-1} - \hat{\mathcal{P}}_{k+1}^{-1} \hat{G}_k \left( I_m + \hat{G}_k^T \hat{\mathcal{P}}_{k+1}^{-1} \hat{G}_k \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \hat{G}_k^T \hat{\mathcal{P}}_{k+1}^{-1} \right) \hat{F}_k,$$

onde,

$$\hat{\mathcal{P}}_{k+1} = \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \mathcal{P}_{k+1}^{-1}, \quad \Phi(\mu, \hat{\lambda}) = \mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_k M_k^T,$$

$$\bar{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k + \hat{\lambda} N_{\mathcal{R}_k}^T N_{\mathcal{R}_k},$$

$$\hat{F}_k = F_k - G_k \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} N_{G_k}^T \left( \hat{\lambda} I_{n_d} + N_{G_k} \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} N_{G_k}^T \right)^{-1} N_{F_k},$$

$$\hat{\mathcal{R}}_k = \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} - \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} N_{G_k}^T \left( \hat{\lambda} I_{n_d} + N_{G_k} \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} N_{G_k}^T \right)^{-1} N_{G_k} \bar{\mathcal{R}}_k^{-1},$$

$$\hat{Q}_k = Q_k + \hat{\lambda} N_{Q_k}^T N_{Q_k} + N_{F_k}^T \left( \hat{\lambda} I_{n_d} + N_{G_k} \bar{\mathcal{R}}_k^{-1} N_{G_k}^T \right)^{-1} N_{F_k}.$$

**Prova.** Resulta de manipulações algébricas das expressões apresentadas em (15).

**Observação 1.** A expressão algébrica apresentada no Teorema 1 se assemelha à forma de equações de Riccati padrão. Portanto, as condições necessárias e suficientes para a existência de solução para o RRR com matrizes de ponderação incertas são fornecidas com base no RLQ padrão para sistemas não sujeitos a incertezas [veja, por exemplo, Lancaster and Rodman (1995)].

## 5. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção é apresentado um estudo comparativo entre o RRR proposto e o regulador linear quadrático robusto desenvolvido por Bortolin et al. (2018b, Lema 4.1), que não incorpora incertezas nas matrizes de ponderação em sua formulação.

**Exemplo 1.** Considere o SLIA (1) com as seguintes matrizes de parâmetros, adaptadas de Xu et al. (2001),

$$A_k = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,4 \\ 0,2 & -0,6 \end{bmatrix}, \quad A_{d,k} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,01 \\ -0,01 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad E_{A_k} = [0,15 \ 0,1], \quad E_{A_{d,k}} = [0,02 \ 0,01]$$

$$\text{e } E_{B_k} = 0,5, \quad \forall k \geq 0,$$

com a condição inicial  $\varphi_0(k) = [1 \ 1]^T$ , para todo  $k \leq 0$ .

As matrizes de ponderação e as incertezas definidas em (2) são dadas por

$$P_N = I_2, \quad Q_k = I_2 \text{ e } R_k = 1,$$

$$H_{Q_k} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix}, \quad E_{Q_k} = r [0,2 \ 0,04], \quad H_{R_k} = 0,1$$

$$\text{e } E_{R_k} = r 0,4, \quad \forall k \in [0, N],$$

sendo  $r = 1$  ou  $r = 10$ .

Para realizar a comparação entre o RRR proposto e a abordagem de Bortolin et al. (2018b, Lema 4.1), o comportamento dinâmico do SLIA é avaliado por uma simulação de 1000 Monte Carlo experimentos. Em cada experimento, a variável  $\Delta_k$  é selecionada aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[-1,1]$  para cada instante de tempo  $k$ . O desempenho dos reguladores é avaliado de acordo com dois casos de atraso,  $d = 1$  e  $d = 10$ ,

no horizonte  $N = 35$  e  $N = 95$ , respectivamente. Além disso, assumimos dois cenários de incertezas relacionadas às matrizes de ponderação, isto é, assumindo o escalar  $r$  sendo igual a 1 ou 10.

Todas as rotinas foram executadas no software MATLAB®, versão 9.8. (R2020a). Para a etapa de inicialização do RRR, adotamos,

$$\mu = 10^{10}, \quad \beta = 1,5, \quad Q_k = \text{diag}(Q_k, I_{dn}) \text{ e } \mathcal{P}_N = I_{n_d}.$$

Para a abordagem de Bortolin et al. (2018b), assume-se:

$$\alpha = 0,5, \quad Q_k = \text{diag}(Q_k, 0_{dn}) \text{ e } \mathcal{P}_N = \text{diag}(I_n, 0_{dn}),$$

e  $\mu$  é o mesmo valor adotado para o RRR. Note que deve-se assumir um valor tendendo ao infinito para o parâmetro de penalidade  $\mu$ , de modo que o regulador seja ótimo. Caso contrário a solução obtida será subótima. Veja mais detalhes na Seção 3 e nas referências de Luenberger and Ye (2008).

Na Figura 1 é apresentado as médias das normas Euclidianas dos estados regulados para as respectivas abordagens, assumindo  $d = 1$ . Observe que com o aumento do tempo  $k$ , os valores das médias de  $\|x_k\|$  convergem à zero, independente dos valores assumidos para as incertezas relacionadas às matrizes de ponderação. O regulador proposto por Bortolin et al. (2018b) apresenta uma resposta mais lenta, quando comparado com a estratégia proposta neste artigo, que considera matrizes de ponderação incertas.

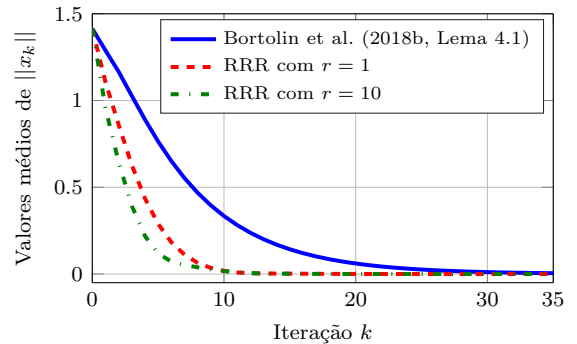


Figura 1. Comparação dos valores médios das normas dos estados em malha fechada para  $d = 1$ .

Os ganhos de realimentação de estado  $\mathcal{K}_{RRR,1}^*$ ,  $\mathcal{K}_{RRR,10}^*$  e  $\mathcal{K}_B^*$ , considerando  $d = 1$ , obtidos pelo regulador robusto recursivo para ambos os casos  $r = 1$  e  $r = 10$ , e o controlador desenvolvido por Bortolin et al. (2018b), respectivamente, são dados por:

$$\mathcal{K}_{RRR,1}^* = [-0,1909 \ -0,0705 \ -0,0230 \ -0,0123],$$

$$\mathcal{K}_{RRR,10}^* = [-0,0308 \ 0,0131 \ -0,0007 \ -0,0007],$$

$$\text{e } \mathcal{K}_B^* = [-0,3000 \ -0,2000 \ -0,0400 \ -0,0200].$$

As médias das normas Euclidianas das trajetórias  $x_k$  obtidas para cada abordagem, quando  $d = 10$ , são apresentadas na Figura 2. Observe que com o aumento do atraso, ambos os reguladores demandaram mais iteração  $k$  para que os valores médios de  $\|x_k\|$  convergissem à zero. No entanto, o desempenho do RRR ainda é mais rápido quando comparado com a abordagem de Bortolin et al. (2018b) para os dois cenários de incertezas nas matrizes de ponderação.

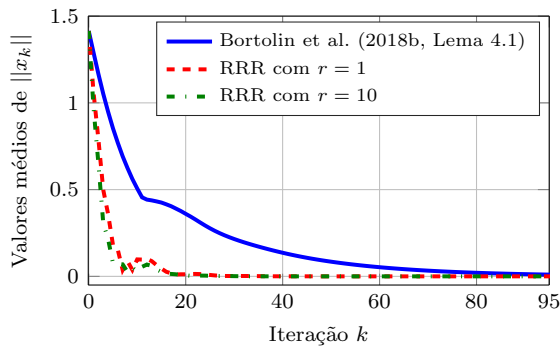


Figura 2. Comparação dos valores médios das normas dos estados em malha fechada para  $d = 10$ .

O tempo de CPU consumido por cada abordagem foi medido, considerando o tempo necessário para os reguladores robustos recursivos determinarem o ganho ótimo  $\mathcal{K}^*$ , quando  $||\mathcal{P}_{N+1} - \mathcal{P}_N|| < 0,001$ . As médias desses tempos, relativas a 100 experimentos, considerando  $d = 10$ , são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Tempo de CPU

	Reguladores	
	RRR	Bortolin et al. (2018b, Lema 4.1)
$r = 1$	0,2968 s	0,34375 s
$r = 10$	0,3593 s	

## 6. CONCLUSÃO

O problema de controle robusto recursivo com matrizes de ponderação incertas, para sistemas lineares de tempo-discreto sujeitos a incertezas paramétricas e atrasos no estado, foi tratado neste artigo. Pela aplicação do método de elevação, o SLIA foi convertido em um SLI aumentado livre de atraso. Uma metodologia foi proposta para projetar o regulador robusto recursivo para este sistema linear aumentado, apresentado em termos de um arranjo matricial simétrico, que é adequado para aplicações online.

Um exemplo numérico demonstrou a eficácia desta abordagem robusta recursiva em comparação com uma abordagem que não incorpora incertezas nas matrizes de ponderação, em sua formulação. Desta forma, podemos concluir que, apesar das inúmeras pesquisas envolvendo os sistemas lineares incertos com atrasos no estado, ainda existem questões a serem investigadas, motivando o desenvolvimento de métodos alternativos recursivos que sejam capazes de superar as diferenças entre o modelo matemático e a planta real. Como trabalho futuro, os resultados serão estendidos para sistemas incertos com atrasos variantes no tempo.

## REFERÊNCIAS

Bertsekas, D.P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume I. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.  
 Bortolin, D.C., Gagliardi, G.M., and Terra, M.H. (2018a). Recursive robust regulator for uncertain linear systems

with random state delay based on markovian jump model. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 6228–6233.  
 Bortolin, D.C., Odorico, E.K., and Terra, M.H. (2018b). Robust linear quadratic regulator for uncertain linear discrete-time systems with delay in the states: an augmented system approach. In *IEEE European Control Conference (ECC)*, 1578–1583.  
 Cerri, J.P. and Terra, M.H. (2017). Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, PP(99), 1–1.  
 Chen, B. and Peng, S. (1988). Robust stability analysis of kalman filter under parametric and noise uncertainties. *G. CHEN (ed.) Approximate Kalman Filtering*, 2, 179–192.  
 Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Birkhäuser Basel, 1<sup>a</sup> edition.  
 Gagliardi, G.M., Bortolin, D.C., and Terra, M.H. (2018). Regulador robusto recursivo para sistemas lineares com atraso variante nos estados: uma abordagem via cadeia de markov. In *Brazilian Conference on Automation (CBA)*.  
 Kosanam, S. and Simon, D. (2004). Kalman filtering with uncertain noise covariances. In *Proceedings of the Intelligent Systems and Control (ISC)*., 375–379. Hawaii, USA.  
 Lancaster, P. and Rodman, L. (1995). *Algebraic Riccati Equations*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford.  
 Leite, V., Tarbouriech, S., and Peres, P. (2004). A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, volume 3, 2870–2875 vol.3.  
 Luenberger, D.G. and Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, New York, 3<sup>a</sup> edition. Capítulo 13.  
 Miranda, M.F., Leite, V.J.S., and Caldeira, A.F. (2010). Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 152–157.  
 Sayed, A.H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7), 998–1013.  
 Shi, L., Johansson, K.H., and Murray, R.M. (2007). Kalman filtering with uncertain process and measurement noise covariances with application to state estimation in sensor networks. In *Proceedings of the International Conference on Control Applications (CCA)*, 1031–1036. IEEE. Singapore.  
 Sun, J. and Chen, J. (2012). A note on stability and stabilization of discrete-time systems with time-varying delay. In *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 1430–1434.  
 Xia, Y., Liu, G.P., Shi, P., Rees, D., and Thomas, E.J.C. (2007). New stability and stabilization conditions for systems with time-delay. *International Journal of Systems Science*, 38(1), 17–24.  
 Xu, S., Lam, J., and Yang, C. (2001). Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2), 77 – 84.