

Técnica de Identificação para Sistemas Multivariáveis Aplicadas a uma Planta Didática

Victor Marinho Espínola Freire* George Acioli Júnior*

* Departamento de Engenharia Elétrica - DEE
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
58429-900, Campina Grande - PB - Brasil
(email: victor.freire@ee.ufcg.edu.br e georgeacioli@dee.ufcg.edu.br)

Abstract: This article presents an identification technique for multivariable processes. The least-squares estimator (LSE) is used to estimate the finite impulse response (FIR) and autoregressive with exogenous inputs (ARX) models of a didactic temperature module. The models are compared using validation tests.

Resumo: Esse artigo apresenta uma técnica de identificação para processos multivariáveis. O estimador dos mínimos quadrados (LSE) é utilizado para estimar os modelos de resposta finita ao impulso (FIR) e o auto-regressivo com entradas exógenas (ARX) de um módulo didático de temperatura. Os modelos são comparados por meio de testes de validação.

Keywords: Identification Test, MIMO, LSE, FIR, ARX.

Palavras-chaves: Teste de Identificação, MIMO, LSE, FIR, ARX.

1. INTRODUÇÃO

Na teoria de controle moderna existem diversas técnicas para projeto de controladores. Algumas delas utilizam o modelo matemático para esse projeto. Na realidade, o uso de modelos matemáticos não é limitado a área de controle, várias engenharias faz uso desses modelos para simulações, previsões e projetos (Zhu, 2001).

A modelagem de um processo pode ser do tipo teórica ou experimental. Na modelagem teórica, o modelo é obtido ao se aplicar métodos de cálculo para equações, como por exemplo, equações de balanço de massa e equações físicas de estado. Esse tipo de modelagem é também chamada de modelagem caixa branca (Isermann e Munchhof, 2011). Em alguns casos, as equações matemáticas que regem o sistema não são conhecidas ou, quando são, se tornam impraticáveis de serem obtidas (Aguirre, 2004). A modelagem experimental é também conhecida como modelagem caixa preta, a qual por definição considera apenas as variáveis de entrada e saída do sistema.

Identificação de sistemas é o campo da modelagem matemática que estima os parâmetros do modelo, a partir de observações sobre as entradas e saídas do processo e do conhecimento prévio de alguns parâmetros (Ljung, 1999). Nessa identificação, existem quatro importantes aspectos que devem ser analisados:

- (1) **Os dados de entrada-saída:** eles são obtidos por meio de um teste de identificação, que é projetado de modo a obter o máximo de informações possíveis sobre as propriedades do sistema, de acordo com o interesse do projetista;

- (2) **A escolha da estrutura do modelo:** Combinam-se conhecimentos prévios do sistema, a intuição do engenheiro e o discernimento com as propriedades matemáticas do sistema para se fazer a escolha de um modelo adequado;
- (3) **O critério para a estimação dos parâmetros:** normalmente se utiliza a soma dos quadrados de algum erro como critério. Os valores dos parâmetros são então determinados a partir da minimização dessa função custo;
- (4) **Validação do modelo:** nesse momento deve-se testar se o modelo encontrado é suficientemente bom para o uso desejado. Recomenda-se utilizar dados que não foram usados durante a estimativa do modelo.

Nesse artigo, o método dos mínimos quadrados é utilizado para estimar modelos de resposta finita ao impulso (*Finite Impulse Response* - FIR) e auto-regressivo com entradas exógenas (*AutoRegressive with eXogenous input* - ARX) (Zhu, 2001) de um processo térmico multivariável de escala laboratorial. Após as identificações, os modelos são avaliados por meio de testes de validação. A fundamentação teórica para esse trabalho tem como base o livro (Zhu, 2001).

O artigo está organizado como segue: As características do teste de identificação são apresentadas na Seção 2. O princípio dos mínimos quadrados é revisado na Seção 3. Modelos FIR e ARX são revisados nas Seções 4 e 5, respectivamente. A técnica de identificação é apresentada na Seção 6. Os resultados da identificação de uma planta simulada são apresentados na Seção 7. A planta didática e os resultados experimentais das identificações são apresentados na Seção 8. Por fim, na Seção 9, as conclusões sobre os modelos identificados são discutidas.

* Esse trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

2. TESTE DE IDENTIFICAÇÃO

Os testes de identificação são feitos por meio da excitação e da coleta de informações sobre a dinâmica do processo e suas perturbações. Muitas vezes é preciso executar vários tipos de testes, cada um para coletar um certo tipo de informação. O modelo é então estimado por um teste final que é cuidadosamente projetado. Para realização do teste de identificação, primeiro, é necessário definir alguns de seus parâmetros. São eles: a **duração do teste**, a **forma e a amplitude do sinal de entrada**, o **número de entradas a serem excitadas por teste** e o **tempo de amostragem**.

2.1 Duração do Teste

Escolher um tempo mínimo para a duração do teste de identificação é importante por duas razões: minimizar os efeitos das perturbações e utilizar os resultados teóricos da identificação que, em sua maioria, são assintóticos ao número de dados N .

O teste pode ser curto (5 a 8 vezes o tempo de acomodação), caso o processo possua poucas entradas e a relação sinal-ruído seja alta. No entanto, o teste pode ser longo (14 a 18 vezes o tempo de acomodação), caso o processo possua várias entradas e a relação sinal-ruído seja baixa. Por fim, caso o processo seja linear e não seja tão perturbado por ruídos, o tempo de teste pode ser muito baixo (1 a 2 vezes o tempo de acomodação) (Zhu, 2001).

2.2 Forma e Amplitude do Sinal de Entrada

Existem diversos tipos de sinais de excitação. Os mais comuns são os:

- Sinais não-periódicos: o degrau e o pulso retangular;
- Sinais periódicos: a onda senoidal e a onda quadrada;
- Sinal estocástico: o ruído binário discreto.

Os dados obtidos de sinais binários são mais informativos do que aqueles obtidos por um degrau. Além disso, o sinal binário produz menos distúrbios para a planta, quando comparado a um sinal senoidal (Zhu, 2001). Dessa forma, os sinais PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*) e o GBN (*Generalized Binary Noise*) são comumente utilizados para identificação de processos industriais.

Pseudo Random Binary Sequence é um sinal com dois estados que pode ser gerado utilizando um registrador de deslocamento com realimentação, como mostrado na Figura 1, em que n representa o número de registradores ou estados (Eykhoff, 1974). As variáveis do registrador são alimentadas com 1 ou 0 e o vetor de estado inicial é não nulo. Quando um pulso de *clock* é aplicado, o valor do k -ésimo estado vai para o $(k + 1)$ -ésimo estado. Os coeficientes de realimentação, a_1, \dots, a_n , tomam valores de 1 ou 0. O período do *clock* é denotado por T e é geralmente igual ao período de amostragem. Sendo assim, o registrador de deslocamento vai gerar uma sequência de zeros e uns.

O máximo tamanho do PRBS é: $M = 2^n - 1$. Assumindo que o tempo de amostragem seja Δt , então o período do PRBS é: $T = M \cdot \Delta t$. O espectro de potência de um sinal PRBS é definido pela seguinte equação:

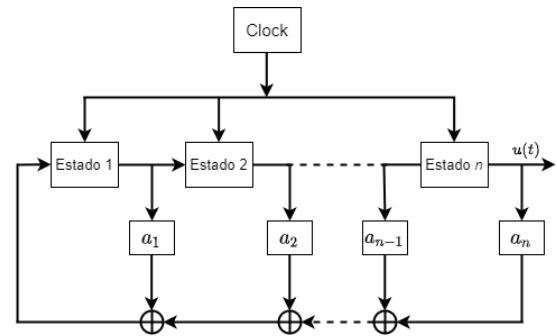


Figura 1. Registrador de deslocamento para gerar um sinal PRBS

$$\Phi_u(\omega) = \frac{2\pi a^2}{M} \sum_{k=1}^M \delta(\omega - 2\pi k/M) \quad 0 \leq \omega < 2\pi. \quad (1)$$

A Figura 2 ilustra um sinal PRBS em que o período T é 8 vezes o tempo de amostragem. O espectro desse sinal é ilustrado na Figura 3.

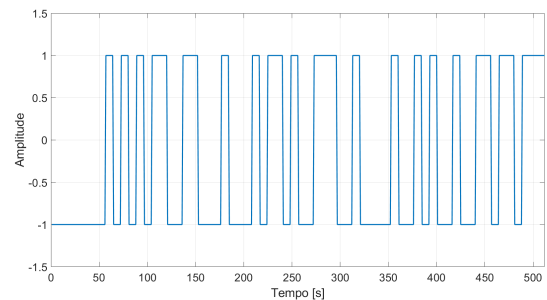


Figura 2. Exemplo de um sinal PRBS

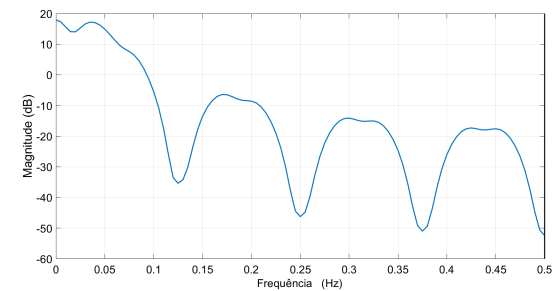


Figura 3. Espectro do sinal PRBS

Generalized Binary Noise proposto por Tulleken (1990). Um sinal GBN assume dois valores $-a$ e a . A cada candidato de tempo para comutação t , ele muda seu valor de acordo com a seguinte regra:

$$P[u(t) = -u(t-1)] = p_{sw}, \quad (2)$$

$$P[u(t) = u(t-1)] = 1 - p_{sw}, \quad (3)$$

em que, p_{sw} é a probabilidade de comutação. Uma importante propriedade deste sinal é que ele possui média nula, assim evita-se que o processo saia de seu ponto de operação.

A amplitude do sinal GBN é escolhida baseando-se em conhecimentos prévios do sistema. Já seu tempo médio de comutação é definido por:

$$ET_{sw} = \frac{T_{min}}{p_{sw}}, \quad (4)$$

em que, o tempo mínimo de comutação T_{min} é o tempo, em amostras, para se manter o sinal constante. Para que um sinal de teste seja bom para o controle de processos, ele deve possuir a característica de um passa baixa. É possível gerar um sinal GBN passa-baixa ao reduzir a probabilidade p_{sw} , ou equivalentemente, aumentar o tempo médio de comutação ET_{sw} (Bo et al., 2006).

O espectro de potencia de um sinal GBN é definido como:

$$\Phi_u(\omega) = \frac{(1 - m^2)T_{min}}{1 - 2m \cos(T_{min}\omega) + m^2}, \quad (5)$$

em que, $m = 1 - 2p_{sw}$. A Figura 4 ilustra um sinal GBN com tempo médio de comutação igual a 170 segundos. Já a Figura 5, ilustra o o espectro de frequência desse sinal.

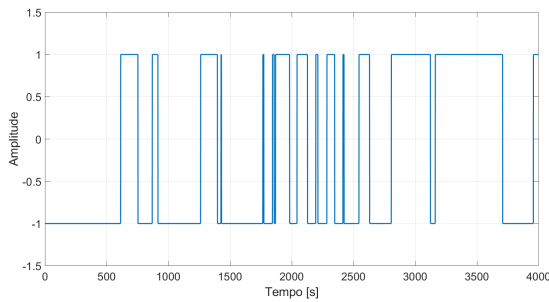


Figura 4. Sinal GBN com $ET_{sw} = 170$ segundos

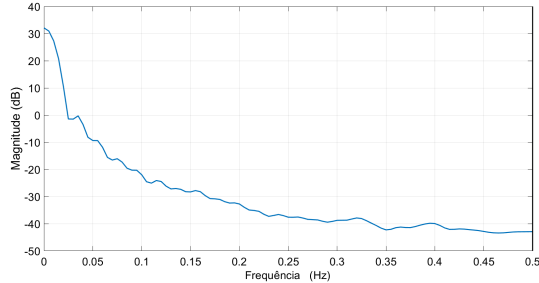


Figura 5. Espectro do sinal GBN passa-baixa

2.3 Número de Entradas por Teste

Para o caso de sistemas lineares com múltiplas entradas e uma saída ou múltiplas saídas e apenas uma entrada, é possível aplicar os métodos de identificação para processos monovariáveis (*Single-Input Single-Output* - SISO). Para um sistema com uma entrada e r saídas é possível utilizar um sinal de teste e obter r modelos, ao aplicar o método de identificação r vezes para cada uma das combinações de entrada/saída. De forma similar, caso o sistema possua r entradas e uma saída, pode-se excitar uma entrada por vez ou todas as entradas ao mesmo tempo, desde que os sinais não possuam correlação.

Para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Input Multiple Output* - MIMO) existem três opções: excitar uma entrada por vez e avaliar todas as saídas simultaneamente, excitar todas as entradas simultaneamente e avaliar uma saída por vez, ou ainda, excitar

todas as entradas simultaneamente e também avaliar todas as saídas ao mesmo tempo (Isermann e Munchhof, 2011).

2.4 Tempo de Amostragem

Em sistemas controlados por computadores, a amostragem de um sinal contínuo leva a perda de informações. Por esse motivo é importante selecionar um tempo de amostragem Δt de modo que essas perdas não prejudiquem a identificação do sistema. Porém, existe pelo menos duas razões para que a amostragem não seja muito rápida:

- (1) Construir um modelo discreto com período de amostragem muito pequeno em comparação a constante de tempo do processo é um procedimento numericamente sensível, pois todos os polos vão se agrupar ao redor do ponto $(1, i0)$ no plano z .
- (2) Um modelo amostrado rapidamente geralmente será de fase não mínima, mesmo que o processo contínuo seja de fase mínima.

Dessa forma, uma regra simples que depende apenas da constante de tempo do processo τ é adotada, sendo ela: $\Delta t = \frac{\tau}{10}$.

3. O PRINCÍPIO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A técnica dos mínimos quadrados é um procedimento matemático, em que os parâmetros desconhecidos de um modelo são estimados, de forma que a soma dos quadrados de um erro escolhido seja minimizado. Supondo que um modelo matemático seja da forma:

$$y(t) = x_1(t)\theta_1 + x_2(t)\theta_2 + \dots + x_n(t)\theta_n, \quad (6)$$

em que, $y(t)$ é a variável observável, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ é um conjunto de parâmetros constantes, e x_1, x_2, \dots, x_n são funções conhecidas. A variável t denota o tempo. Assumindo que N amostras de $y(t)$ e x_1, x_2, \dots, x_n são feitas nos tempos $1, 2, \dots, N$, de forma que se obtenha N equações da mesma forma que (6), é obtido um conjunto de equações diferenciais, que matricialmente é dado por:

$$\mathbf{y} = \Phi \boldsymbol{\theta}, \quad (7)$$

em que,

$$\mathbf{y} = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T, \quad (9)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Uma condição necessária para que esse conjunto de equações possua solução é que o número de amostras N seja maior ou igual ao número de termos n . Caso $N = n$, tem-se a seguinte solução:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \Phi^{-1} \mathbf{y}. \quad (11)$$

Assumindo que a inversa da matriz Φ exista, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ denota a estimativa de $\boldsymbol{\theta}$. No entanto, caso $N > n$, a estimativa dos parâmetros é definida a partir do erro de predição:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}, \quad (12)$$

em que, $\hat{y}(t)$ é a saída estimada. É possível escolher $\hat{\theta}$, de forma que o critério (13) seja minimizado.

$$V_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \varphi(t)\theta]^2 = \frac{1}{N} \varepsilon^T \varepsilon. \quad (13)$$

Em (13), ε é dado por:

$$\varepsilon = [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(N)]^T. \quad (14)$$

Ainda, é possível expressar (13) como

$$\begin{aligned} V_{LS} &= \frac{1}{N} (\mathbf{y} - \Phi\theta)^T (\mathbf{y} - \Phi\theta) \\ &= \frac{1}{N} [\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \theta^T \Phi^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi \theta - \theta^T \Phi^T \Phi \theta]. \end{aligned} \quad (15)$$

Calculando a primeira derivada de V_{LS} em relação a θ e igualando o resultado a zero, tem-se:

$$\frac{\partial V_{LS}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{N} [-2\Phi^T \mathbf{y} + 2\Phi^T \Phi \hat{\theta}] = 0. \quad (16)$$

Logo, o vetor de parâmetros estimado é:

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{y}. \quad (17)$$

Este resultado é conhecido como o estimador dos mínimos quadrados (*Least-Squares Estimator* - LSE) de θ .

4. MODELO DE RESPOSTA AO IMPULSO - FIR

Um processo linear, dinâmico e invariante no tempo é caracterizado por sua resposta ao impulso. Para processos estáveis, suas respostas ao impulso irão tender a zero no regime permanente. Esse resultado é definido como resposta finita ao impulso. Um modelo FIR de ordem n possui a seguinte função de transferência:

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad (18)$$

em que,

$$A(q) = 1, \quad (19)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}. \quad (20)$$

Para um sistema SISO, com a seguinte sequência de dados de entrada-saída:

$$y(1), u(1), \dots, y(N), u(N), \quad (21)$$

tem-se,

$$y(t) = \sum_{k=1}^N b_k u(t-k) + \varepsilon(t) = \varphi(t)\theta + \varepsilon(t), \quad (22)$$

em que,

$$\theta = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T. \quad (23)$$

e

$$\varphi(t) = [u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n)]. \quad (24)$$

Ainda, a equação (22) pode ser expressa em sua forma matricial:

$$\mathbf{y} = \Phi\theta + \varepsilon, \quad (25)$$

em que, ε é denominado como resíduo e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(n+1) \\ \varepsilon(n+2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(n) & u(n-1) & \dots & u(1) \\ u(n+1) & u(n) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u(N-1) & \dots & \dots & u(N-n) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Assim, de acordo com (17), é possível estimar os parâmetros para o modelo FIR.

5. MODELO AUTOREGRESSIVO COM ENTRADAS EXÓGENAS - ARX

Seja um processo descrito pela equação de diferença de ordem n :

$$y(t) + \sum_{k=1}^n a_k y(t-k) = \sum_{k=1}^n b_k u(t-k). \quad (28)$$

Esse modelo possui a função de transferência (18), em que

$$A(q) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k q^{-k} = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}, \quad (29)$$

$$B(q) = \sum_{k=1}^n b_k q^{-k} = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}. \quad (30)$$

Dado que a sequência de dados de entrada-saída seja

$$y(1), u(1), \dots, y(N), u(N), \quad (31)$$

é preciso estimar os parâmetros a_k e b_k . Para fazer isso, primeiramente, o resíduo $\varepsilon(t)$ deve ser considerado:

$$y(t) + \sum_{k=1}^n a_k y(t-k) = \sum_{k=1}^n b_k u(t-k) + \varepsilon(t). \quad (32)$$

Isolando o vetor de saída de (32), tem-se:

$$y(t) = - \sum_{k=1}^n a_k y(t-k) + \sum_{k=1}^n b_k u(t-k) + \varepsilon(t). \quad (33)$$

A saída (33) pode ser expressa em função do vetor de dados $\varphi(t)$ e do vetor de parâmetros θ , em que:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \ \dots \ -y(t-n) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-n)], \quad (34)$$

$$\theta = [a_1 \ \dots \ a_n \ b_1 \ \dots \ b_n]^T. \quad (35)$$

Usando a sequência de dados, é possível formar um sistema de N equações (25), em que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(n+1) \\ \varepsilon(n+2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi(n+1) \\ \varphi(n+2) \\ \vdots \\ \varphi(N) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Logo,

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n) & \dots & -y(1) & | & u(n) & \dots & u(1) \\ -y(n+1) & & \vdots & | & u(n+1) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & | & u(N-1) & \dots & u(N-n) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Então, de acordo com o princípio dos mínimos quadrados, a estimativa que minimiza a função custo (13) é (17).

6. TÉCNICA DE IDENTIFICAÇÃO

Nessa seção são apresentados os critérios utilizados para identificação da planta didática sob estudo:

- (1) Propriedades do sinal de entrada
- (2) Dedução do modelo a ser utilizado (parametrização)

6.1 Parâmetros do Sinal de Entrada

Devido as suas características, o sinal GBN é adotado nesse trabalho. Dessa forma, o primeiro parâmetro a ser definido é o tempo médio de comutação ET_{sw} , em função do tempo de acomodação do processo T_{ta} :

$$ET_{sw} = \frac{T_{ta}}{3}. \quad (38)$$

O segundo parâmetro a ser determinado é a duração do teste. Como a planta apresenta relação sinal-ruído alta e possui não-linearidades, utiliza-se 10 vezes o tempo de acomodação como duração do teste. O terceiro parâmetro a ser determinado é a amplitude do sinal GBN. Assim, baseando-se em conhecimentos prévios do sistema, é adotado um degrau de 40% do ponto de operação. Por fim, o número de entradas a serem excitadas por teste é definido. O método que excita uma entrada por vez e avalia-se ambas saídas, simultaneamente, é escolhido. Portanto, é necessária a realização de dois testes de identificação (um para cada entrada).

6.2 Parametrização do Modelo FIR de Vigésima Ordem

Para o modelo FIR, é adotado uma função de transferência de alta ordem, pois esse modelo considera somente entradas passadas. Dessa forma, tem-se um modelo com vários parâmetros para capturar a dinâmica do processo. Considerando as 20 entradas passadas, obtém-se o seguinte sistema com o erro $\varepsilon(t)$:

$$y(t) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_{20}u(t-20) + \varepsilon(t) \quad (39)$$

que é equivalente a

$$y(t) = \varphi(t)\hat{\theta} + \varepsilon(t), \quad (40)$$

em que:

$$\varphi(t) = [u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-20)] \quad (41)$$

e

$$\hat{\theta} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{20}]^T. \quad (42)$$

6.3 Parametrização do Modelo ARX de Segunda Ordem

Para o modelo ARX de segunda ordem, assume-se que o processo depende da saída atual, bem como das duas saídas anteriores e das duas entradas anteriores. Logo,

$$y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2). \quad (43)$$

Considerando o resíduo e reescrevendo (43), tem-se:

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \varepsilon(t). \quad (44)$$

que também é equivalente a (40), em que:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \ -y(t-2) \ u(t-1) \ u(t-2)] \quad (45)$$

e

$$\hat{\theta} = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]^T. \quad (46)$$

7. ESTUDO DE CASO SIMULADO

Com o intuito de avaliar a técnica de identificação proposta, primeiro é realizado um teste de simulação para um processo com duas entradas e com duas saídas. Nesse

exemplo, é utilizado o modelo de uma coluna de destilação binária (Tavakoli et al., 2006):

$$G_{ex}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,471e^{-s}}{(30,7s+1)^2} & \frac{0,495e^{-2s}}{(28,5s+1)^2} \\ \frac{0,749e^{-1,7s}}{(57s+1)^2} & \frac{0,832e^{-s}}{(50,5s+1)^2} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

As saídas do sistema são:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = G_{ex} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

em que, V_1 e V_2 são as perturbações sobre o processo, tal que $v(t) = H(q^{-1})e(t)$. O ruído branco $e(t)$ tem média zero e a relação sinal-ruído é igual a 0,05. O modelo do ruído é:

$$H(s) = \frac{s+1,054}{s+0,1054}, \quad (49)$$

A entrada U_1 é um sinal GBN com tempo de comutação igual a 112 minutos e tempo de teste igual a 3360 minutos. Já a entrada U_2 tem tempo médio de comutação igual a 99 minutos e tempo de teste igual a 2970 minutos. A partir dos dados das entradas e das saídas, os modelos FIR de vigésima ordem e ARX de segunda ordem são identificados. Os quatro modelos ARX são:

$$G_{arx}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,007q^{-2}}{1-0,923q^{-1}-0,062q^{-2}} & \frac{-0,003q^{-1}+0,010q^{-2}}{1-0,989q^{-1}+0,003q^{-2}} \\ \frac{0,005q^{-2}}{1-0,925q^{-1}-0,067q^{-2}} & \frac{-0,006q^{-1}+0,0002q^{-2}}{1-0,981q^{-1}-0,010q^{-2}} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Os modelos FIR são representados pela matriz de funções de transferência:

$$G_{fir}(q) = \begin{bmatrix} G_{fir11} & G_{fir12} \\ G_{fir21} & G_{fir22} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Os coeficientes do modelo FIR, para o estudo de caso, estão alocados nas Tabelas 1 - 4.

Tabela 1. Parâmetros do modelo G_{fir11}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
-0,038	0,005	-0,002	0,001	0,012	-0,002	0,010
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
-0,001	0,007	0,012	0,010	0,008	0,008	0,001
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,001	0,004	0,006	0,002	0,004	0,192	

Tabela 2. Parâmetros do modelo G_{fir12}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,018	-0,001	-0,002	-0,001	0,002	-0,007	-0,003
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0,007	0,006	0,001	-0,008	0,011	0,002	0,012
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,010	0,013	-0,002	0,001	0,010	0,226	

Tabela 3. Parâmetros do modelo G_{fir21}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
-0,053	0,004	-0,005	-0,001	0,011	-0,004	0,008
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
-0,003	0,006	0,009	0,008	0,007	0,006	-0,001
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
-0,002	0,002	0,003	-0,001	0,001	0,186	

Tabela 4. Parâmetros do modelo G_{fir22}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
-0,072	-0,001	0,001	-0,001	0,003	-0,013	-0,007
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
-0,005	0,003	-0,001	0,009	-0,004	0,012	-0,007
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
-0,009	-0,004	-0,008	-0,006	-0,008	-0,241	

Para validar os modelos obtidos, foram aplicados dois degraus simultâneos, um em cada entrada. As saídas Y_1 e Y_2 , além das saídas simuladas com os modelos previamente obtidos, podem ser vistas nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

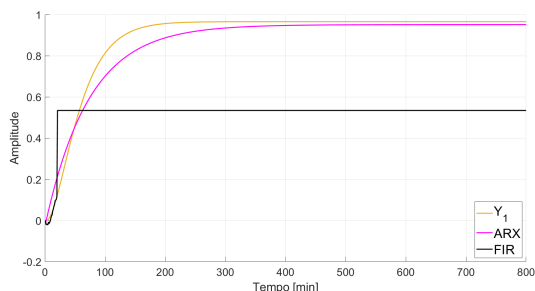


Figura 6. Resposta aos degraus para a saída Y_1

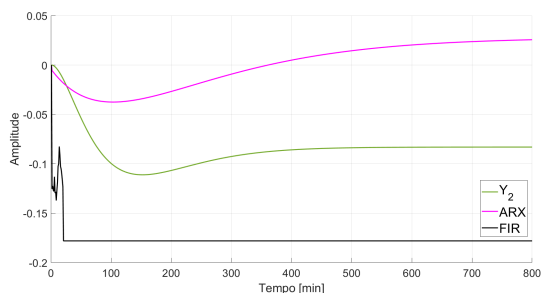


Figura 7. Resposta aos degraus para a saída Y_2

Com as saídas reais (Y_1 e Y_2) e as simuladas com os modelos ARX e FIR, os erros quadráticos médios (MSE) foram computados, por meio de

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1} (y_k - \hat{y}_k)^2, \quad (52)$$

em que, N é número de amostras, y é a saída real do processo e \hat{y} é a saída estimada utilizando os modelos obtidos. Os valores foram alocados na Tabela 5.

Tabela 5. Erro Quadrático Médio

Modelo	Saída	MSE
ARX	Y_1	0,0023
FIR	Y_1	0,1617
ARX	Y_2	0,0079
FIR	Y_2	0,0085

Graficamente, percebe-se que os modelos ARX apresentam maior exatidão que os modelos FIR na modelagem de G_{ex} . Essa conclusão também pode ser obtida por meio dos erros quadráticos médios apresentados na Tabela 5.

8. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nessa seção são apresentados os resultados experimentais da aplicação da técnica de identificação na planta didática. O objetivo é estimar os modelos FIR de vigésima ordem e os modelos ARX de segunda ordem.

8.1 Planta Didática

A planta didática sob estudo é um processo térmico de escala laboratorial, ver Figura 8, o qual utiliza duas pastilhas Peltier como atuadores. Essas pastilhas, que são feitas de material semicondutor, utilizam energia elétrica para gerar uma diferença de temperatura entre suas faces.

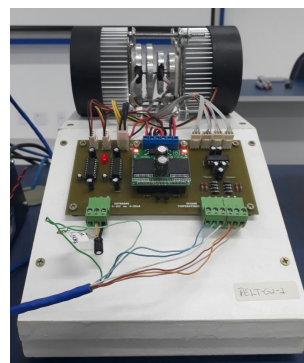


Figura 8. Processo Térmico

Os dois atuadores estão localizados nas extremidades das massas metálicas: na esquerda encontra-se o atuador 1 (entrada 1) e na direita o atuador 2 (entrada 2). Essas entradas podem variar de 0 V - estado mais frio - a 10 V - estado mais quente. Assim, quando um dos atuadores é acionado, o calor gerado pelo efeito Peltier é gradativamente transferido para as massas metálicas instaladas. Os sensores de temperatura instalados em cada uma das massas metálicas realizam as medições das respectivas temperaturas, disponibilizando quatro saídas, que são nomeadas da esquerda para a direita como Temperatura 1, 2, 3 e 4. Dessa forma, é possível escolher diferentes malhas para a realização do controle. Para esse estudo, as duas massas centrais são adotadas como as saídas, isto é, a Temperatura 2 e a Temperatura 3. Assim, o processo Peltier é representado pela seguinte matriz de funções de transferência:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

em que, Y_1 corresponde a saída 1 (Temperatura 2), Y_2 corresponde a saída 2 (Temperatura 3). Já o elemento da matriz G_{ij} corresponde a função de transferência entre a saída i e a entrada j . Por fim, U_1 e U_2 correspondem as entradas 1 e 2, respectivamente.

8.2 Teste Preliminar

O projeto de um bom teste de identificação necessita de conhecimentos prévios sobre o processo. Algumas informações podem ser obtidas por experiência da operação. Dessa forma, é realizado um teste preliminar aplicando um degrau positivo no ponto de operação, seguido de um

degrau negativo, na entrada U_1 , enquanto se mantém a entrada U_2 constante. Em seguida, é realizado o mesmo procedimento para a entrada U_2 . A Figura 9 ilustra o gráfico com os resultados do teste preliminar.

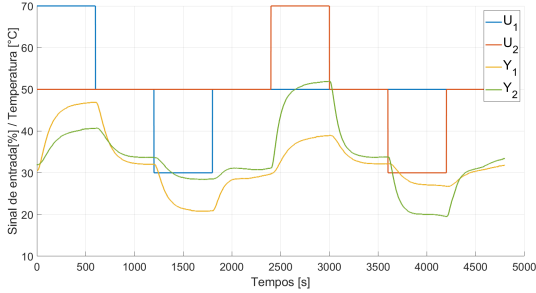


Figura 9. Resultado do teste preliminar

A partir desse teste é possível determinar o tempo de acomodação $T_{ta} = 350$ segundos e a constante de tempo $\tau = 150$ segundos. Observa-se também que a relação sinal-ruído do processo é alta e que existe a presença de não-linearidades.

8.3 Teste de Identificação

O sinal de entrada é projetado de acordo com Seção 6.1. Assim, o tempo médio de comutação é 117 segundos e o tempo de teste é igual a 3500 segundos. Já a amplitude do sinal de entrada comuta entre 7V e 3V, o que corresponde a uma variação de $\pm 20\%$ na entrada. Inicialmente, aplicou-se o sinal GBN na entrada U_1 , enquanto a entrada U_2 manteve-se constante. Logo após, aplicou-se o mesmo sinal GBN na entrada U_2 , mantendo a entrada U_1 constante.

8.4 Modelo FIR Identificado

Os parâmetros do modelo FIR de vigésima ordem são obtidos, aplicando-se a parametrização apresentada na Seção 6.2. Os dados obtidos no teste de identificação são tratados, de forma que o *offset* do sinal de entrada e de saída sejam retirados. Quatro modelos são obtidos e representados pela matriz de funções de transferência (51). Já os coeficientes dos modelos identificados estão alocados nas Tabelas 6 - 9.

Tabela 6. Parâmetros do modelo G_{fir11}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,049	0,050	0,059	0,057	0,054	0,055	0,041
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0,044	0,037	0,033	0,030	0,023	0,024	0,013
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,020	0,012	0,011	0,013	0,010	0,038	

Tabela 7. Parâmetros do modelo G_{fir12}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,017	0,009	0,017	0,020	0,023	0,028	0,022
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0,025	0,022	0,020	0,019	0,015	0,016	0,009
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,012	0,007	0,007	0,007	0,006	0,023	

Tabela 8. Parâmetros do modelo G_{fir21}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,016	0,009	0,014	0,017	0,021	0,025	0,020
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0,023	0,021	0,020	0,020	0,014	0,017	0,009
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,015	0,008	0,007	0,009	0,006	0,028	

Tabela 9. Parâmetros do modelo G_{fir22}

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,073	0,094	0,107	0,093	0,081	0,073	0,053
b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0,050	0,038	0,034	0,027	0,020	0,019	0,010
b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	b_{19}	b_{20}	
0,016	0,010	0,010	0,010	0,009	0,022	

8.5 Modelo ARX Identificado

Os parâmetros do modelo ARX de segunda ordem são obtidos, a partir da parametrização apresentada na Seção 6.3. Os mesmos dados tratados, para identificação do modelo FIR, são utilizados na identificação do modelo ARX. A matriz de funções de transferência encontrada é:

$$G_{arx}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,024q^{-1} + 0,009q^{-2}}{1 - 1,490q^{-1} + 0,540q^{-2}} & \frac{0,003q^{-1} + 0,006q^{-2}}{1 - 1,681q^{-1} + 0,709q^{-2}} \\ \frac{0,003q^{-1} + 0,006q^{-2}}{1 - 1,674q^{-1} + 0,698q^{-2}} & \frac{0,050q^{-1} + 0,023q^{-2}}{1 - 1,349q^{-1} + 0,435q^{-2}} \end{bmatrix} \quad (54)$$

As Figuras 10, 11, 12 e 13 mostram o ajuste dos modelos as curvas de temperatura obtidas pelos testes de identificação.

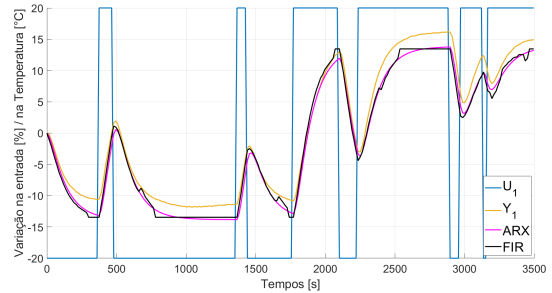


Figura 10. Ajuste dos modelos G_{11} aos dados U_1 e Y_1

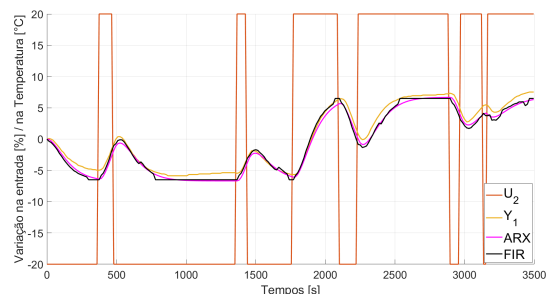


Figura 11. Ajuste dos modelos G_{12} aos dados U_2 e Y_1

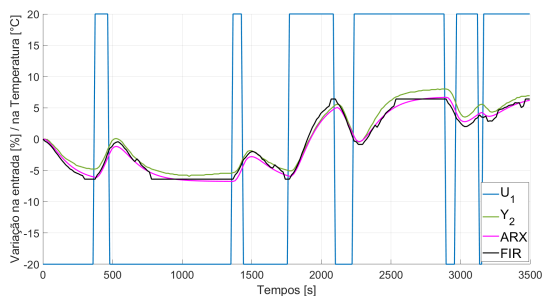


Figura 12. Ajuste dos modelos G_{21} aos dados U_1 e Y_2

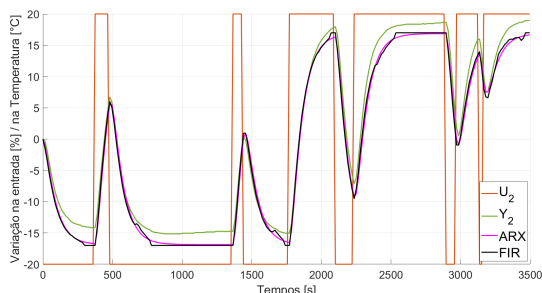


Figura 13. Ajuste dos modelos G_{22} aos dados U_2 e Y_2

Por meio das Figuras 10 - 13, percebe-se que tanto os modelos ARX, quanto os modelo FIR conseguem rastrear os comportamentos do processo real, para as diferentes entradas e saídas do sistema.

8.6 Validação dos Modelos

Para a validação dos modelos, é realizado um experimento, aplicando, simultaneamente, um degrau em ambas as entradas. Sendo assim, os gráficos ilustrados nas Figuras 14 e 15 são obtidos.

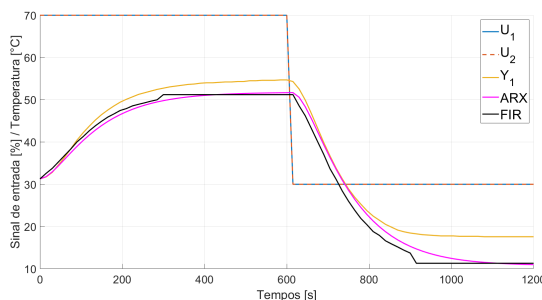


Figura 14. Teste de validação para os modelos da Y_1

Analogamente ao que foi feito com o processo simulado, as saídas reais e simuladas foram comparadas por meio de (52). Os valores foram alocados na Tabela 10.

Tabela 10. Erro Quadrático Médio

Modelo	Saída	MSE
ARX	Y_1	12,1119
FIR	Y_1	16,0804
ARX	Y_2	14,8688
FIR	Y_2	18,8335

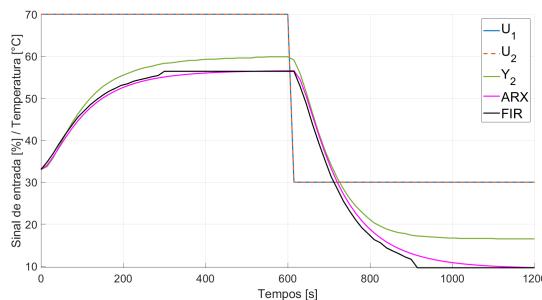


Figura 15. Teste de validação para os modelos da Y_2

Utilizando os erros quadráticos médios entre as saídas reais e as saídas simuladas com os modelos identificados, percebe-se que os modelos ARX e FIR apresentam desempenhos semelhantes. Ainda assim, nota-se que os modelos ARX são mais eficientes na modelagem do processo Peltier, por apresentar uma dinâmica menos agressiva.

9. CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi descrita uma técnica de identificação para sistemas multivariáveis. Especificamente, foi apresentado como projetar o sinal de entrada para o teste e como realizar a parametrização para os modelos FIR e ARX. Essa técnica foi aplicada a um processo simulado, em que foram obtidos resultados satisfatórios para o modelo ARX, porém medianos para o modelo FIR. Em seguida, a técnica foi aplicada a uma planta didática de duas entradas e duas saídas. Os modelos propostos foram identificados e testes de validação foram feitos para verificar a eficácia da abordagem utilizada. Observou-se que a técnica proposta obteve resultados medianos, visto que os modelos identificados apresentaram dinâmica bastante parecidas com a planta, porém obtiveram ganhos diferentes.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2004). *Introdução à identificação de sistemas-Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG.
- Bo, L., Jun, Z., e Jixin, Q. (2006). Design and analysis of test signals for system identification. In *International Conference on Computational Science*, 593–600. Springer.
- Eykhoff, P. (1974). *System identification*, volume 14. Wiley New York.
- Isermann, R. e Munchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Springer, Germany, 2 edition.
- Ljung, L. (1999). *System identification*. Wiley Online Library.
- Tavakoli, S., Griffin, I., e Fleming, P.J. (2006). Tuning of decentralised pi (pid) controllers for tito processes. *Control engineering practice*, 14(9), 1069–1080.
- Tulleken, H.J. (1990). Generalized binary noise test-signal concept for improved identification-experiment design. *Automatica*, 26(1), 37–49.
- Zhu, Y. (2001). *Multivariable system identification for process control*. Elsevier.