

# Método iterativo para cômputo da norma e controle $\mathcal{L}_1$ de sistemas lineares contínuos no tempo<sup>\*</sup>

Ariádne L. J. Bertolin<sup>\*</sup> Ricardo C. L. F. Oliveira<sup>\*</sup> Pedro L. D. Peres<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,  
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.  
(e-mail: {ariberto, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br)

**Abstract:** In this paper, an iterative method based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) is proposed for the computation of a bound to the  $\mathcal{L}_1$  norm (or peak-to-peak gain) of continuous-time linear systems. Competitive in terms of accuracy and efficiency when compared with the usual strategy, that requires the search for a scalar parameter, the method has the advantage of allowing immediate extension to cope with the problem of  $\mathcal{L}_1$  control by state or output feedback. Numerical examples illustrate the results.

**Resumo:** Este trabalho propõe um método iterativo baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities — LMIs*) para o cálculo de um limitante da norma  $\mathcal{L}_1$  (ou ganho pico-a-pico), de sistemas lineares contínuos no tempo. Competitivo em termos de acurácia e eficiência quando comparado à estratégia usual, que requer busca em um parâmetro escalar, o método apresenta como vantagem a extensão direta para tratar o problema de controle  $\mathcal{L}_1$  por realimentação de estado ou de saída. Exemplos numéricos ilustram os resultados.

**Keywords:** output-feedback;  $\mathcal{L}_1$  norm; linear matrix inequalities; continuous-time linear systems.

**Palavras-chaves:** realimentação de saída; norma  $\mathcal{L}_1$ ; desigualdades matriciais lineares; sistemas lineares contínuos no tempo.

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de métodos para certificar estabilidade e computar critérios de desempenho de sistemas dinâmicos é um tópico bastante atrativo em teoria de controle. Nesse contexto, a teoria de Lyapunov é provavelmente uma das ferramentas mais utilizadas no estudo de estabilidade, cômputo de normas e custos garantidos, pois produz condições que podem ser resolvidas eficientemente por procedimentos de otimização baseados em programação semidefinida e desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities — LMIs*) (Boyd et al., 1994).

Ao incorporar critérios de desempenho às condições de estabilidade dos sistemas, duas vertentes principais podem ser distinguidas. Uma primeira classe de critérios baseia-se em medidas de energia, como a norma  $\mathcal{H}_2$ , dada pela energia do sinal de saída face a sinais de entrada particulares (como o ruído branco Gaussiano), e a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que provê um valor de pior caso para a relação entre a energia de sinais exógenos (ruídos) de entrada e a energia do sinal saída. Tipicamente, os limitantes para as normas são estabelecidos a partir de funções quadráticas de Lyapunov com matrizes obtidas da solução de LMIs ou de equações de Riccati (Boyd et al., 1994; Doyle et al., 1989). Um segundo tipo de critério de desempenho é baseado em medidas de pior caso ou de valor absoluto, como o chamado ganho induzido  $\mathcal{L}_\infty$  (pico-a-pico) ou norma  $\mathcal{L}_1$ , em geral melhor tratado por condições de estabilidade derivadas da

programação linear (Dahleh and Diaz-Bobillo, 1995). Ressalte-se que a norma  $\mathcal{L}_1$  é amplamente explorada como critério de desempenho no contexto de sistemas lineares positivos (Farina and Rinaldi, 2000; Briat, 2013).

Principalmente na síntese de controladores, a norma  $\mathcal{L}_1$  é bastante atrativa por incorporar diretamente especificações de pior caso no domínio do tempo. Existem diversos sistemas práticos que impõem restrições rígidas sobre os valores de pico dos sinais, como por exemplo para o posicionamento preciso de um servomecanismo de disco rígido (Abedor et al., 1996; Dahleh and Pearson, Jr., 1987b; Blanchini and Sznaier, 1994). No entanto, por exigir no caso de sistemas contínuos controladores não racionais para prover o valor ótimo da norma (Vincent et al., 1996; Dahleh and Pearson, Jr., 1987a; Vidyasagar, 1986), ou mesmo pela dificuldade de integrar esse tipo de critério com o ferramental existente de LMIs para controle robusto, foi proposta em Abedor et al. (1996) a norma estrela (do inglês, *star norm* ou *\*-norm*), que configura-se em um limitante superior da norma  $\mathcal{L}_1$  e pode ser computada a partir de problemas de otimização envolvendo escalares e LMIs.

Neste trabalho, as condições que garantem um limitante para a norma  $\mathcal{L}_1$ , baseadas na norma estrela, são reformuladas para poderem ser resolvidas por um procedimento iterativo, no qual cada iteração é um problema convexo de otimização na forma de LMIs. Além de configurar-se em uma alternativa às estratégias existentes para cômputo de norma estrela, que requerem busca em um parâmetro escalar, as condições apresentam como novidade a presença das matrizes do sistema de forma isolada, permitindo, graças a uma relaxação na estabilidade, estender de forma imediata o problema de análise para o de

<sup>\*</sup> Apoiado pelas agências brasileiras: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (processo 2019/10947-1), CNPq e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

controle, tratando o ganho de realimentação diretamente como variável de otimização. Dessa forma, por não utilizar mudanças de variáveis, restrições de estrutura (como descentralização) ou imposição de valores máximos para os elementos da matriz de ganho podem ser tratadas sem conservadorismo adicional. Exemplos são fornecidos para ilustrar o desempenho do método proposto quando comparado com outras técnicas da literatura.

*Notação*

Para uma matriz simétrica  $X > 0$  ( $X < 0$ ) significa que  $X$  é definida positiva (negativa). Para as matrizes ou vetores ( $T$ ) indica o transposto,  $\text{He}(X) = X + X^T$ ,  $\text{diag}(X_1, \dots, X_n)$  representa uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes quadradas (ou elementos)  $X_1, \dots, X_n$ , e  $\lambda_i(X)$  denota um autovalor genérico da matriz  $X$ . O símbolo  $\star$  representa o termo simétrico em matrizes formadas por blocos e  $\text{Re}(\cdot)$  corresponde à parte real de um número complexo. As matrizes identidade e zero são denotadas, respectivamente, por  $I$  e  $0$ . Ao longo do texto as dimensões das matrizes podem ser omitidas por simplicidade (sendo inferidas a partir do contexto). A norma infinito de um sinal  $v(t) \in \mathbb{R}^n$  é definida como

$$\|v\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} |v_i(t)|.$$

2. CÁLCULO DA NORMA  $\mathcal{L}_1$

2.1 Preliminares

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$G = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}, \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  uma entrada externa e  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída de referência. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são reais e têm dimensões apropriadas. O sistema  $G$  é considerado assintoticamente estável quando, para qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  e  $w(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$ .

A norma induzida (ou ganho)  $\mathcal{L}_\infty$  de um sistema linear invariante no tempo, representado por uma função de transferência  $H$ , é dada por (Boyd and Barratt, 1991)

$$\|H\|_{i\infty} = \sup_{\|w\|_\infty \neq 0} \frac{\|Hw\|_\infty}{\|w\|_\infty}.$$

Também conhecida como ganho *pico-a-pico* ou norma  $\mathcal{L}_1$  do sistema, pode ser computada a partir da matriz de respostas ao impulso  $[h_{ij}(t)]$ ,  $i = 1, \dots, n_z$ ,  $j = 1, \dots, n_w$  associada ao sistema, isto é

$$\|H\|_{i\infty} = \max_{1 \leq i \leq n_z} \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^\infty |h_{ij}(t)| dt = \|H\|_1.$$

O objetivo desta seção é computar um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$  do sistema (1). Esse cálculo não é tão simples como no caso das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , largamente exploradas na literatura de controle em termos de programação convexa. Uma maneira de computar um limitante superior para a norma  $\mathcal{L}_1$  é por meio do conceito de elipsoides invariantes, que dá origem à chamada norma estrela (*\*-norm*). A norma estrela de um sistema  $G$  como em (1) com  $A$  Hurwitz pode ser calculada por meio do procedimento de otimização apresentado a seguir, adaptado de Abedor et al. (1996).

Lema 1. Seja um escalar dado  $\alpha \in (0, \kappa)$ , com

$$\kappa = -2 \max_i \text{Re}(\lambda_i(A))$$

e  $S = S^T$  uma matriz definida positiva solução do problema convexo de otimização

$$\begin{aligned} \min_S \text{tr}(S) \\ AS + SA^T + \alpha S + \alpha^{-1} BB^T < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Então, para  $S$  solução de (2), o sistema (1) é assintoticamente estável com norma  $\mathcal{L}_1$  limitada por  $\sqrt{\gamma}$  com  $\sigma$  e  $\gamma$  soluções do problema convexo de otimização

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma} \gamma \\ \begin{bmatrix} \sigma S^{-1} & 0 & C^T \\ \star & (\gamma - \sigma)I & D^T \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

As condições do Lema 1 são resolvidas em duas etapas, cada uma baseada na solução de um conjunto de LMIs (a primeira LMI poderia ser substituída por uma equação de Lyapunov para o cálculo de  $S$ ). No entanto, a desigualdade (2) só é uma LMI se o valor de  $\alpha$  for conhecido. Portanto, o cálculo de  $\gamma$  é normalmente realizado por meio de uma busca unidimensional em  $\alpha$ . Finalmente, note que a factibilidade da condição (2) com  $S = S^T > 0$  garante que  $(A + \frac{\alpha}{2}I)S + S(A + \frac{\alpha}{2}I)^T < 0$ , isto é, a matriz  $(A + \frac{\alpha}{2}I)$  é Hurwitz. Portanto, o maior valor admissível de  $\alpha$  é limitado por  $\kappa$ .

O lema de Finsler, apresentado a seguir, é fundamental para a construção das condições propostas neste trabalho.

Lema 2. (de Oliveira and Skelton (2001)). Considere as matrizes  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ , com  $\text{posto}(\mathcal{B}) < \ell$  e  $\mathcal{B}\mathcal{B}_\perp = 0$ . As seguintes condições são equivalentes:

- i)  $\xi^T \mathcal{Q} \xi < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^\ell, \xi \neq 0$ , em que  $\mathcal{B} \xi = 0$ ;
- ii)  $\mathcal{B}_\perp^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_\perp < 0$ ;
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R}$  em que  $\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$ ;
- iv)  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$  em que  $\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$ .

2.2 Resultados

Considerando o sistema (1) com a matriz  $A$  Hurwitz, e  $\sigma$  e  $\alpha \in (0, \kappa)$  fixos, um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$  pode ser computado por meio do lema proposto na sequência.

Lema 3. O sistema linear (1) é assintoticamente estável com norma  $\mathcal{L}_1$  limitada por  $\sqrt{\gamma}$  se existirem matrizes  $\mathcal{Y}_i, i = 1, \dots, 3$  e  $\mathcal{X}_j, j = 1, \dots, 4$ , um escalar  $\gamma > 0$  e uma matriz definida positiva  $P = P^T$ , tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ \star & \star & -\alpha I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}_3 \end{bmatrix} [A + \alpha I/2 \quad -I \quad -B] \right) < 0, \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}P & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & C^T \\ \star & \star & (\gamma - \sigma)I & D^T \\ \star & \star & \star & I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{X}_4 \end{bmatrix} [-I \quad \sigma I \quad 0 \quad 0] \right) > 0. \quad (4b)$$

**Prova:** Inicialmente nota-se que a condição (4a) está na forma iv) do Lema 2, com  $\mathcal{B} = [A + \frac{1}{2}\alpha I \quad -I \quad -B]$ . Adotando a seguinte matriz, cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A + \alpha I/2 & -B \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se, pela condição *iv*) do Lema 2, a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \alpha P & -PB \\ * & -\alpha I \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

Aplicando o complemento de Schur e uma transformação de congruência utilizando a inversa da matriz  $P$ , tem-se

$$P^{-1}(A^T P + PA + \alpha P + \alpha^{-1} P B B^T P)P^{-1} < 0 \Rightarrow AP^{-1} + P^{-1}A^T + \alpha P^{-1} + \alpha^{-1} B B^T < 0,$$

que é equivalente à condição (2) com  $S = P^{-1}$ .

De modo similar, a condição (4b) está na forma *iv*) do Lema 2 com  $\mathcal{B} = [-I \ \sigma I \ 0 \ 0]$ . Adotando como base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  a matriz

$$\mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} \sigma I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se a condição

$$\begin{bmatrix} \sigma P & 0 & C^T \\ * & (\gamma - \sigma)I & D^T \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0,$$

que é equivalente à condição (3) com  $S^{-1} = P$ , finalizando a prova.  $\square$

As condições do Lema 3 são LMIs apenas para valores fixos de  $\sigma$  e  $\alpha$ , o que não parece interessante, mas a utilidade desta alternativa para calcular um limitante da norma  $\mathcal{L}_1$  fica clara adiante.

A condição apresentada a seguir é a principal contribuição deste trabalho, sendo uma maneira diferente de computar um limitante superior para a norma  $\mathcal{L}_1$ . O aspecto atraente é que as matrizes do sistema aparecem linearmente, o que favorece a extensão para um procedimento de síntese.

**Teorema 1.** Sejam as matrizes  $\bar{Y}_i, i = 1, \dots, 4, \bar{X}_j, j = 1, \dots, 5$ , com  $\bar{Y}_4$  e  $\bar{X}_5$  de posto completo. Se existirem matrizes  $Y_i, i = 1, \dots, 4, X_j, j = 1, \dots, 5$ , uma matriz definida positiva  $P = P^T$  e escalares positivos  $\sigma, \alpha$  e  $\gamma$  tais que

$$\mathcal{Q}_1 + \text{He} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}}_Y \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 & \bar{Y}_3 & \bar{Y}_4 \end{bmatrix}}_{\bar{Y}} \right) < 0, \quad (6a)$$

$$\mathcal{Q}_2 + \text{He} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}}_X \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 & \bar{X}_4 & \bar{X}_5 \end{bmatrix}}_{\bar{X}} \right) > 0, \quad (6b)$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & \tilde{A}^T \\ * & 0 & 0 & -I \\ * & * & -\alpha I & -B^T \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}P & 0 & 0 & -I \\ * & 0 & 0 & C^T & \sigma I \\ * & * & (\gamma - \sigma)I & D^T & 0 \\ * & * & * & I & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

sejam verificadas com  $\tilde{A} = A + \frac{1}{2}\alpha I$ , então o sistema (1) é assintoticamente estável e  $\sqrt{\gamma}$  é um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$ .

**Prova:** Observe que as condições (6a) e (6b) estão na forma *iv*) do lema de Finsler (Lema 2), e que portanto são equivalentes, respectivamente, às condições

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} (\bar{Y}_4^{-1} \bar{Y}_1)^T \\ (\bar{Y}_4^{-1} \bar{Y}_2)^T \\ (\bar{Y}_4^{-1} \bar{Y}_3)^T \end{bmatrix} \left[ A + \frac{1}{2}\alpha I \quad -I \quad -B \right] \right) < 0, \quad (8a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & C^T \\ * & * & (\gamma - \sigma)I & D^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} (\bar{X}_5^{-1} \bar{X}_1)^T \\ (\bar{X}_5^{-1} \bar{X}_2)^T \\ (\bar{X}_5^{-1} \bar{X}_3)^T \\ (\bar{X}_5^{-1} \bar{X}_4)^T \end{bmatrix} [-I \ \sigma I \ 0 \ 0] \right) > 0. \quad (8b)$$

Essas desigualdades são equivalentes às desigualdades do Lema 3. Além disso, como a factibilidade de (6a) garante que  $A + \frac{\alpha}{2}I$  é Hurwitz, o valor resultante de  $\alpha$  é garantidamente menor que  $\kappa$ . Portanto, o sistema (1) é assintoticamente estável e  $\sqrt{\gamma}$  é um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$ .  $\square$

As condições do Teorema 1 constituem uma terceira possibilidade de cômputo de um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$  do sistema (1). Uma primeira vantagem em relação aos lemas 1 e 3 é que a matriz de Lyapunov  $P$ , os valores de  $\alpha, \sigma$  e o custo garantido  $\gamma$  são calculados por um conjunto de duas LMIs resolvidas simultaneamente. Como  $\alpha$  é uma variável de otimização do problema, não é necessário realizar buscas unidimensionais. Como segunda e principal vantagem, note que todas as matrizes do sistema aparecem *linearmente*, sendo esse um aspecto muito atraente para a extensão para procedimentos de síntese. Porém, como característica adversa, nota-se a necessidade de fornecer as matrizes de inicialização  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{X}_i$ . Seguindo a estratégia de relaxação proposta em Felipe and Oliveira (2021), o próximo teorema apresenta uma maneira sistemática para a escolha das matrizes  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{X}_i$  de modo que o Teorema 1 garantidamente forneça uma solução factível.

**Teorema 2.** Sejam  $\bar{Y} = [I \ I \ 0 \ -I], \bar{X} = [-I \ I \ 0 \ 0 \ -I]$  e

$$\bar{A} = \tilde{A} - rI, \quad \tilde{A} = A + \frac{1}{2}\alpha I \quad (9)$$

em que  $r$  é um escalar positivo. Então, as condições do Teorema 1, testadas com  $\bar{A}$  no lugar de  $\tilde{A}$ , fornecem uma solução factível para um valor de  $r$  suficientemente grande.

**Prova:** Trocando  $\tilde{A}$  por  $\bar{A}$ , fixando  $Y_1 = -\frac{1}{2}rI, Y_2 = -\frac{1}{2}rI, Y_3 = 0, Y_4 = \frac{1}{2}rI$  e  $P = rI$  na condição (6a), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -rI & 0 & 0 & \tilde{A}^T \\ * & -rI & 0 & (r-1)I \\ * & * & -\alpha I & -B^T \\ * & * & * & -rI \end{bmatrix} < 0.$$

Pelo complemento de Schur a condição anterior é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \alpha I & B^T \\ * & -r^{-1}(\tilde{A}\tilde{A}^T + I) + 2I \end{bmatrix} > 0$$

e, considerando  $r$  grande o suficiente e tomando novamente o complemento de Schur, tem-se

$$2\alpha I > BB^T,$$

que sempre está atendida para um valor de  $\alpha$  maior que  $\frac{1}{2} \max_i(\text{Re}(\lambda_i(BB^T)))$ . Note que tal valor não será infactível pois o limitante superior de  $\alpha$ , definido no Lema 1, é ampliado em função de  $r$ , isto é,  $\kappa = -2 \max_j(\text{Re}(\lambda(A - rI)))$ . Portanto, a primeira parte da prova está demonstrada.

Na condição (6b), fixando  $X_1 = X_5 = -\frac{1}{2}rI$ ,  $X_2 = \sigma I$  e  $X_3 = X_4 = 0$ ,  $\sigma = (r-1)/2$ , tem-se (note que  $\tilde{P} = rI$ )

$$\begin{bmatrix} rI - \frac{1}{2}(r-1)I & 0 & 0 & (r-1)I \\ * & (r-1)I & 0 & C^T - rI/2 \\ * & * & (\gamma - (r-1)/2)I & D^T & 0 \\ * & * & * & I & 0 \\ * & * & * & * & rI \end{bmatrix} > 0$$

e, aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} (2-1/r)I & 0 \\ * & (r-1)I - (C^T C + rI/4) \\ * & * \\ & 0 \\ & -C^T D \\ & (\gamma - (r-1)/2)I - D^T D \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando novamente o complemento de Schur, produz-se

$$\begin{bmatrix} (2-1/\eta r)I & 0 \\ * & 3\eta rI/4 - (C^T C + I) - U \end{bmatrix} > 0,$$

com  $U = C^T D((\gamma - (r-1)/2)I - D^T D)^{-1} D^T C$ . Para  $\gamma = r$  e  $r$  suficientemente grande a condição acima é simplificada em  $\text{diag}(2I, (3r/4)I) > 0$ , terminando a prova.  $\square$

O escalar  $r$  introduzido pelo Teorema 2 pode ser visto como um fator de relaxação na matriz dinâmica do sistema, garantindo que as condições do Teorema 1 sempre produzem uma solução factível se as inicializações indicadas pelo Teorema 2 forem adotadas. Além disso, como  $r$  aparece de forma afim na condição, o mesmo pode ser minimizado como função objetivo. Contudo, para que o valor de  $\gamma$  seja um custo garantido válido, é necessário obter uma solução com  $r = 0$ . Caso isso não aconteça, as condições do Teorema 2 podem ser testadas novamente, adotando-se as variáveis soluções  $X_i$  e  $Y_i$  como as novas condições iniciais. Isso é possível pois as condições (6a) e (6b) estão estruturadas na forma  $iv)$  do Lema de Finsler, ou seja,  $\mathcal{Q} + \text{He}(\mathcal{X} \mathcal{B}) < 0$ . Assim, como  $\text{He}(\mathcal{X} \mathcal{B}) = \text{He}(\mathcal{B}^T \mathcal{X}^T)$ , a escolha  $\mathcal{B} = \mathcal{X}^T$  garante solução factível em um novo teste, assegurando um próximo valor de  $r$  não maior que o anterior. Todos esses aspectos levam à proposta de um procedimento iterativo em que as variáveis  $r$  e  $\gamma$  podem ser minimizadas, similares aos apresentados em diferentes contextos em Spagolla et al. (2019); Bertolin et al. (2020); Souza et al. (2020).

Como contribuição adicional em relação aos trabalhos citados, o próximo teorema propõe uma alternativa para construir soluções iniciais factíveis para o Teorema 1, potencialmente melhores do que as inicializações fornecidas pelo Teorema 2.

**Teorema 3.** Seja  $\bar{\sigma}$  uma solução para o Lema 1 com  $\alpha = \frac{1}{2}\kappa$ , e  $\mathcal{Y}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  e  $\mathcal{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , soluções do Lema 3 com  $\sigma = \bar{\sigma}$ . As escolhas

$$\bar{Y} = [\mathcal{Y}_1^T \mathcal{Y}_2^T \mathcal{Y}_3^T - I], \bar{X} = [\mathcal{X}_1^T \mathcal{X}_2^T \mathcal{X}_3^T \mathcal{X}_4^T - I]$$

garantem que o Teorema 1 fornece uma solução factível.

**Prova:** A prova é imediata a partir da equivalência entre as desigualdades (4a) e (4b), e as desigualdades (6a) e (6b), respectivamente, com as escolhas  $\bar{Y}_4 = -I$  e  $\bar{X}_5 = -I$ .  $\square$

A inicialização proposta pelo Teorema 3 é mais custosa numericamente em relação à inicialização indicada pelo Teorema 2, pois é preciso resolver as LMIs dos lemas 1 e 3. Contudo, o parâmetro de relaxação  $r$  requerido pelo Teorema 2 não é necessário, pois as condições iniciais foram computadas para o sistema original. A escolha  $\alpha = \frac{1}{2}\kappa$  é heurística e outras escolhas (dentro da faixa  $(0, \kappa)$ ) podem levar a resultados diferentes.

---

### Algoritmo 1

---

- 1: **Inicialização:**  $it_{max}$ , tolerância  $\varepsilon$ ;
  - 2:  $k \leftarrow 0$ , fase  $\leftarrow 1$ ;
  - 3: Inicializa  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{X}_j$  de acordo com o Teorema 2 ou com o Teorema 3;
  - 4:  $A \leftarrow A - rI$ ;
  - 5: **Enquanto**  $k < it_{max}$  **Resolva**
  - 6:      $k \leftarrow k + 1$ ;
  - 7:     **Se** fase = 1 **Então**
  - 8:         **minimize**  $r$  **sujeito a** (6a) e (6b);
  - 9:         **Se**  $r \leq 0$  **Então**
  - 10:              $r = 0$ ; fase  $\leftarrow 2$ ;
  - 11:         **Fim Se**
  - 12:     **Senão Se** fase = 2 **Então**
  - 13:         **minimize**  $\gamma$  **sujeito a** (6a) e (6b);
  - 14:          $\gamma_k \leftarrow \gamma$ ;
  - 15:         **Se**  $|\gamma_k - \gamma_{k-1}| < \varepsilon$  **Então**
  - 16:             **Retorna**  $\gamma_k$ ;
  - 17:         **Fim Se**
  - 18:     **Fim Se**
  - 19:      $\bar{Y} \leftarrow Y^T$ ;  $\bar{X} \leftarrow X^T$ ;
  - 20: **Fim Enquanto**
- 

Com base nos resultados apresentados, é proposto o Algoritmo 1, que é um procedimento iterativo para o cálculo de um custo garantido para a norma  $\mathcal{L}_1$  do sistema (1). Os parâmetros de entrada são o número máximo de iterações e a tolerância  $\varepsilon$  utilizada para avaliar a convergência do método em termos da diferença dos custos garantidos obtidos em duas iterações subsequentes. Caso o Teorema 1 seja utilizado para gerar as matrizes iniciais  $\bar{Y}$  e  $\bar{X}$ , então o parâmetro de relaxação  $r$  é introduzido, e o algoritmo permanece na fase 1 enquanto  $r$  for positivo. Se um valor não positivo de  $r$  não for encontrado, o método não é capaz de fornecer um custo garantido para o sistema. Caso contrário, avança-se para a fase 2, em que o valor de  $\gamma$  é minimizado a cada iteração. Observe que não existe nenhuma garantia que o algoritmo converge para um valor negativo ou nulo de  $r$ , mesmo para sistemas estáveis. A convergência depende das escolhas iniciais de  $\bar{Y}$  e  $\bar{X}$ .

Caso o Teorema 3 seja escolhido para gerar as matrizes  $\bar{Y}$  e  $\bar{X}$ , em princípio, o parâmetro de relaxação  $r$  não é necessário e o algoritmo pode começar diretamente na fase 2. Contudo, considerar  $r$  não traz nenhum prejuízo pois, garantidamente, o primeiro valor computado será menor ou igual a zero, e o algoritmo passa para a fase 2 na segunda iteração.

Vale ressaltar que a utilização do Algoritmo 1 não garante que o valor da norma estrela encontrada seja o ótimo global. Por outro lado, as condições do Lema 1 podem fornecer custos garantidos arbitrariamente próximos do valor ótimo com o aumento do número de pontos utilizados na busca linear. A



próxima seção discute como o método proposto para análise pode ser estendido para tratar o problema de controle.

### 3. CONTROLE $\mathcal{L}_1$ POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Considere o sistema linear

$$G_c = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) = Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_y w(t) \end{cases}, \quad (10)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  uma entrada externa e  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída controlada,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída medida e  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle. As matrizes  $A, B, B_u, C, C_y, D, D_u$  são reais e têm dimensões apropriadas.

O objetivo desta seção é determinar uma lei de controle por realimentação estática de saída dada por

$$u = Ky, \quad (11)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  é o ganho de realimentação, de modo que o sistema em malha fechada seja estável e um limitante da norma  $\mathcal{L}_1$  do sistema seja minimizado.

Como as condições de cômputo da norma  $\mathcal{L}_1$  propostas na seção anterior possuem a característica de que todas as matrizes do sistema aparecem de forma afim (não multiplicam nenhuma outra variável), o problema de controle pode ser tratado de forma imediata, bastando para isso considerar as matrizes

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_u K C_y, & B_{cl} &= B + B_u K D_y, \\ C_{cl} &= C + D_u K C_y, & D_{cl} &= D + D_u K D_y, \end{aligned}$$

em todos os teoremas propostos que são testados pelo Algoritmo 1. Caso o sistema a ser controlado seja instável em malha aberta, então apenas o Teorema 2 pode ser utilizado para inicializar as variáveis  $\bar{Y}$  e  $\bar{X}$  do Teorema 1, pois o Teorema 3 produz uma condição inicial somente a partir de sistemas com matrizes  $A$  Hurwitz.

Quando inicializado com as condições do Teorema 3, o algoritmo sempre converge para um valor de  $\gamma$  cuja raiz quadrada é um limitante superior para a norma  $\mathcal{L}_1$ . No caso da inicialização se dar pelo Teorema 2, não é possível garantir a convergência do algoritmo, nem mesmo para a fase 1.

### 4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção são realizados experimentos que ilustram o desempenho da técnica proposta tanto na análise quanto na síntese de controladores envolvendo a norma  $\mathcal{L}_1$ . Os códigos utilizados foram implementados no MATLAB-2015 usando o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004) e o *solver* Mosek (Andersen and Andersen, 2000), em um computador com o sistema operacional Windows 10 e processador Core i7. Os parâmetros de entrada do algoritmo foram  $it_{max} = 50$  e  $\varepsilon = 10^{-3}$ . As variáveis  $Y_i$  e  $X_j$  do Teorema 1 foram consideradas como arbitrárias. Outras estruturas, como diagonal, ou simétrica, podem fornecer resultados diferentes, com complexidades distintas.

#### Cômputo da Norma $\mathcal{L}_1$

Neste experimento a condição de cálculo da norma  $\mathcal{L}_1$  proposta pelo Algoritmo 1 (A1) é comparada com a condição de Abedor et al. (1996) (ANP96) utilizando uma base de dados de sistemas lineares estáveis (isto é, com matrizes  $A$  Hurwitz). A base contendo sistemas na forma (1) foi construída<sup>1</sup> de acordo com

<sup>1</sup> A base de dados está disponível em <http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/SBAI2021/baseSBAI2021.zip>

os seguintes passos: As matrizes  $A, B, C$  e  $D$  são criadas com elementos aleatórios (utilizando uma distribuição normal) tais que a matriz  $A$  seja Hurwitz com maior autovalor (parte real) pertencente à faixa  $[-5 - 0,001]$ .

Foram consideradas 10 diferentes combinações de  $n_x \in \{3, 6, 9\}$ ,  $n_w \in \{1, 2, 3, 4\}$  e  $n_z \in \{1, 2, 4, 5\}$  com 10 sistemas cada (totalizando 100 sistemas). O objetivo é computar o valor da norma  $\mathcal{L}_1$  com A1 utilizando as inicializações propostas pelo Teorema 2 (A1<sub>T2</sub>) e 3 (A1<sub>T3</sub>) e comparar o resultado em termos de acurácia e complexidade computacional com a técnica ANP96, que determina a norma por meio de uma busca linear em  $\alpha$  com 100 pontos igualmente espaçados na faixa  $\in (0, \kappa)$ . Ressalte-se que esse procedimento de busca poderia ser otimizado, uma vez que as condições do Lema 1 são quasi-convexas em termos de  $\alpha$  (Abedor et al., 1996).

Para avaliar a acurácia, computa-se a diferença relativa percentual  $\gamma_{rel} = 100(\gamma_{ANP96} - \gamma_{A1})/\gamma_{ANP96}$ , sendo  $\gamma_{ANP96}$  ( $\gamma_{A1}$ ) a norma computada por ANP96 (A1). A complexidade numérica é avaliada em termos do tempo computacional  $t$  (em segundos) demandado pelo *solver*. A Tabela 1 mostra os resultados obtidos, sendo que cada combinação de dimensões ( $n_x, n_w, n_z$ ) contempla 10 sistemas, e nesse caso os valores de  $\gamma$ ,  $feas$ ,  $it_{med}$  e  $t$  são os valores médios. A coluna  $feas$  indica a porcentagem de sistemas em que A1 foi capaz de fornecer um custo garantido, isto é, em que o algoritmo chegou na fase 2. O número médio de iterações demandado por A1 é informado por meio da coluna  $it_{med}$ .

Uma primeira análise dos resultados revela a superioridade de A1<sub>T3</sub> em relação a A1<sub>T2</sub>, pois este último não foi capaz de computar normas para algumas dimensões (não passou da fase 1). Esse comportamento era esperado pois a inicialização produzida por T3 garantidamente leva o algoritmo à fase 2. A diferença entre o número médio de iterações de A1<sub>T3</sub> e A1<sub>T2</sub> corrobora esse fato. Com relação aos resultados produzidos por A1<sub>T3</sub>, nota-se um excelente desempenho em termos de acurácia, pois em quase todos os casos a diferença relativa média ficou abaixo de 1%. Finalmente, é importante enfatizar que uma vantagem de A1 em relação a ANP96 é a não necessidade da busca linear em  $\alpha$ , que em muitos casos pode ser exaustiva computacionalmente. Por exemplo, em apenas três casos da tabela (associados aos sistemas de maiores dimensões) o tempo computacional demandado por A1<sub>T3</sub> foi superior ao de ANP96. Contudo, a principal vantagem de A1 é permitir a extensão imediata para tratar o problema de controle, como ilustra o próximo experimento.

#### Controle $\mathcal{L}_1$

Considere o sistema massa-mola (com duas massas e duas molas), adaptado de Agulhari et al. (2012), com matrizes dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & -c_0/m_1 & 0 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & 0 & -c_0/m_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0.$$

em que  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$  são as massas (kg), e  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 0,5$  e  $c_0 = 1$  são as constantes elásticas (N/m) e de amortecimento

Tabela 1. Comparação numérica no cálculo do limitante da norma  $\mathcal{L}_1$  entre ANP96 e A1 (inicializado com T2 ou T3).  $\gamma_{rel}$  é diferença relativa (média) entre os custos computados por ANP96 e A1,  $feas$  é a porcentagem (média) de sistemas em que A1 produziu um limitante para a norma,  $it_{med}$  é o número (médio) de iterações demandado por A1 e  $t$  é o tempo (médio) computacional em segundos.

Sistemas			A1 <sub>T2</sub>				A1 <sub>T3</sub>				ANP96
$n_x$	$n_w$	$n_z$	$feas$	$\gamma_{rel}$ (%)	$t$ (s)	$it_{med}$	$feas$	$\gamma_{rel}$ (%)	$t$ (s)	$it_{med}$	$t$ (s)
3	1	1	50	1,73	0,73	31	100	0,14	0,11	7	0,36
	1	2	50	0,98	1,12	32	100	0,10	0,09	7	0,38
	2	1	30	0,58	1,38	41	100	0,15	0,07	6	0,34
	2	2	20	0,24	1,82	40	100	0,19	0,09	8	0,36
6	1	1	20	5,31	4,72	40	100	1,10	0,56	11	0,64
	1	2	1	0,67	4,73	48	100	0,23	0,38	8	1,04
	2	1	40	0,32	3,74	35	100	0,07	0,28	7	0,84
9	3	4	0	-	7,11	50	100	0,11	1,23	16	0,87
	1	1	30	1,18	11,28	39	100	1,33	1,60	10	1,48
	4	5	0	-	23,79	50	100	0,05	3,49	16	1,04

( $Ns/m$ ), respectivamente. O objetivo é utilizar A1<sub>T3</sub> para produzir uma realimentação de saída que produza um sistema em malha fechada com menor norma  $\mathcal{L}_1$ .

Inicialmente determinam-se os valores dos limitantes da norma  $\mathcal{L}_1$  para o sistema em malha aberta. Os valores de  $(\sqrt{\gamma}; \alpha)$  obtidos foram, respectivamente: (1,9514; 0,2735) para ANP96 (busca linear em  $\alpha$  com 100 pontos), (1,9557; 0,2634) para A1<sub>T2</sub> e (1,9542; 0,2614) para A1<sub>T3</sub> mostrando uma pequena vantagem em termos de acurácia dos limitantes obtidos pelo procedimento iterativo.

Com o objetivo de investigar mecanismos para evitar a saturação do atuador, o projeto de controle é realizado com uma restrição sobre a magnitude dos ganhos. A técnica proposta é aplicada conjuntamente com as restrições lineares sobre os elementos do ganho,  $|K_i| \leq m$ , para os valores  $m \in \{1, 5, 10, \infty\}$ . Os resultados são mostrados na Tabela 2. Como esperado, os menores valores são obtidos quando não há restrições sobre as magnitudes dos elementos do ganho, existindo um claro compromisso entre esforço de controle e redução do limitante. Ressalte-se que, mesmo mantendo os elementos do ganho limitados, foi possível reduzir consideravelmente os valores de  $\sqrt{\gamma}$  quando comparados à malha aberta.

Tabela 2. Ganhos de controle obtidos com a restrição  $|K_i| \leq m$ ,  $m \in \{1, 5, 10, \infty\}$  para o sistema massa-mola.

$m$	$K$	$\sqrt{\gamma}$	$\alpha$
1	[-1,0000 0,2287]	0,6822	0,5415
5	[-5,0000 0,5449]	0,2750	0,4184
10	[-9,7849 0,7027]	0,2476	0,1908
$\infty$	[-18,5453 0,7165]	0,1775	0,1074

A Fig. 1 apresenta as respostas do sistema em malha aberta e fechada ( $m \in \{1, 5, 10, \infty\}$ ) para um pulso unitário de duração de 1 segundo. Como pode ser observado, o sistema controlado apresenta reduções no pico da saída  $z$  à medida que  $m$  cresce. Por outro lado, valores maiores de  $m$  permitem sinais de controle com amplitudes progressivamente maiores, como mostra a Fig. 2.

### 5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um método iterativo baseado em LMIs para o cálculo de um limitante da norma  $\mathcal{L}_1$  de sistemas lineares contínuos no tempo. A abordagem provê resultados acurados quando comparada com a condição de cômputo que exige

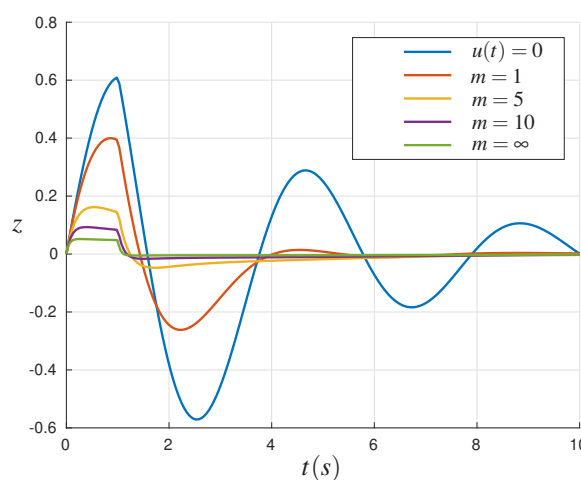


Fig. 1. Resposta a um pulso unitário de 1 segundo em malha aberta e em malha fechada ( $m \in \{1, 5, 10, \infty\}$ ) do sistema massa-mola sujeito a restrições no ganho de controle.

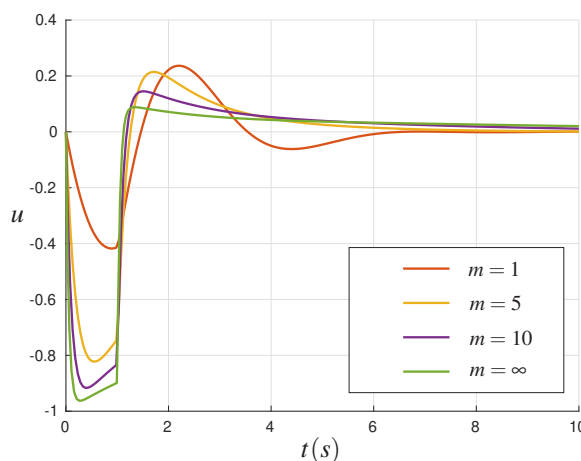


Fig. 2. Sinal de controle do sistema massa-mola sujeito a restrições no ganho de controle ( $m \in \{1, 5, 10, \infty\}$ ).

uma busca escalar, podendo inclusive ser computacionalmente menos custosa, dependendo do caso. Mais importante, a técnica possui como vantagem a possibilidade de realizar projetos de ganhos estabilizantes, por realimentação de estados, realimentação de saída e controle com restrições de estrutura (como

descentralização). Os resultados apresentados podem ser estendidos sem maiores dificuldades para tratar parâmetros incertos no sistema e realimentação dinâmica.

#### REFERÊNCIAS

- J. Abedor, K. Nagpal, and K. Poolla. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:899–927, November 1996.
- C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for reduced-order robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1532–1537, June 2012.
- E. D. Andersen and K. D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, pages 197–232. Springer US, 2000. <http://www.mosek.com>.
- A. L. J. Bertolin, R. C. L. F. Oliveira, G. Valmorbidia, and P. L. D. Peres. Estabilização quadrática por realimentação de saída de sistemas Lur’e a tempo contínuo via LMIs. In *Anais do XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, Santa Maria, RS, Brasil, November 2020.
- F. Blanchini and M. Sznaier. Rational  $\mathcal{L}^1$  suboptimal compensators for continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(7):1487–1492, July 1994.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- S. P. Boyd and C. H. Barratt. *Linear Control Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991.
- C. Briat. Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints:  $L_1$ -gain and  $L_\infty$ -gain characterization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(16):1932–1954, November 2013.
- M. A. Dahleh and I. J. Diaz-Bobillo. *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- M. A. Dahleh and J. B. Pearson, Jr.  $L_1$ -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(4):314–322, April 1987a.
- M. A. Dahleh and J. B. Pearson, Jr.  $L_1$ -optimal compensators for continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(10):889–895, October 1987b.
- M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, NY, 2001.
- J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, August 1989.
- L. Farina and S. Rinaldi. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2000.
- A. Felipe and R. C. L. F. Oliveira. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(9):4365–4370, September 2021.
- J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://yalmip.github.io>.
- A. M. Souza, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle por aproximação de modelo utilizando realimentação de saída por meio de LMIs iterativas. In *Anais do XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, Santa Maria, RS, Brasil, November 2020.
- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Realimentação estática de saída de sistemas LPV positivos a tempo discreto. In *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pages 774–779, Ouro Preto, MG, Brasil, Outubro 2019.
- M. Vidyasagar. Optimal rejection of persistent bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(6):527–534, June 1986.
- T. Vincent, J. Abedor, K. Nagpal, and P. P. Khargonekar. Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance. In *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, pages 4470–4475, San Francisco, CA, USA, June 1996.