

Controle por Realimentação Derivativa de Estado de Sistemas Dinâmicos de Segunda Ordem com Atraso

Leonardo A. Nunes* Nelson J.B. Dantas** Carlos E. T. Dórea***
José M. Araújo****

* *Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecatrônica. (e-mail: leonardo.nunes.060@ufrn.edu.br).*

** *Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação. (e-mail: nelson.dantas@dca.ufrn.br).*

*** *Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Engenharia de Computação e Automação. (e-mail: cetdorea@dca.ufrn.br).*

**** *Instituto Federal da Bahia, Grupo de Pesquisa em Sinais e Sistemas. (e-mail: araujo@ieee.org).*

Abstract: In this work we propose a method to design state-derivative feedback controllers for linear systems represented by second-order differential matrix equations with time-delay in the control signal. Based on the representation in the frequency domain known as the receptance model, an optimization problem is formulated for the computation of controller gains that limit the peak of a sensitivity function, thereby ensuring robust closed-loop stability, in spite of the delay. Genetic Algorithm is used to solve the optimization problem and numerical experiments illustrate the effectiveness of the proposed method, including comparison with state feedback controllers.

Resumo: Neste trabalho é proposto um método para o projeto de controladores por realimentação derivativa de estado de sistemas lineares representados por equações diferenciais matriciais de segunda ordem com atraso no sinal de controle. A partir da representação no domínio da frequência conhecida como modelo por receptância, é formulado um problema de otimização para o cálculo de ganhos do controlador que limitem o pico em frequência de uma função de sensibilidade, garantindo assim estabilidade robusta em malha fechada, mesmo diante do atraso. Algoritmo Genético é usado na resolução do problema de otimização e experimentos numéricos ilustram a eficácia do método proposto, incluindo comparação com controladores por realimentação de estado.

Keywords: Second-order systems; Time delay; Frequency response; State-derivative feedback.

Palavras-chaves: Sistemas de segunda ordem; Atraso de transporte; Resposta em frequência; Realimentação derivativa de estado.

1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais matriciais de segunda ordem vêm sendo usadas em diversos campos na modelagem de sistemas dinâmicos como, por exemplo, em circuitos elétricos, mecânica dos fluidos, sistemas micro-eletromecânicos - MEMS e estruturas mecânicas (Clark et al., 2000; Tisseur and Meerbergen, 2001). Sistemas mecânicos modelados como na equação (1) podem ser reescritos na forma de equações diferenciais matriciais de primeira ordem no espaço de estado. No entanto, com isso há a perda de boas propriedades das matrizes como a simetria e esparsidade (Datta, 2003), além de tal reestruturação demandar um maior esforço computacional, tempo de execução e espaço para armazenamento, já que há um rearranjo das matrizes

antes pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^{n \times n}$, passando a integrar o espaço $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ (Tisseur and Meerbergen, 2001).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

Como desvantagens, ao se trabalhar com sistemas como o da equação (1), surge a dificuldade de realizar a sua modelagem, seja por elementos finitos ou outro método, em especial nos casos de sistemas amortecidos, já que é mais difícil se definir com precisão a matriz de amortecimento (Tisseur and Meerbergen, 2001).

Essa dificuldade na etapa de modelagem pode ser superada pelo método baseado no conceito de receptância, apresentado em (Ram et al., 2009), que utiliza dados experimentais do sistema. Utilizando o método da receptância é

possível alocar os polos do sistema em uma posição segura no plano complexo, alcançando-se também o desempenho desejado. No entanto, com a presença de atraso de transporte no sistema, a simples alocação de polos não garante a estabilidade em malha fechada, surgindo a necessidade de realizar uma análise *a posteriori* com a utilização de técnicas de aproximação por séries de Taylor ou mesmo aproximação de Padé, como visto em (Ram et al., 2009) e em (Araújo, 2018).

Para eliminar a necessidade da análise *a posteriori* do método da receptância quando há presença de atraso, Dantas et al. (2020) propuseram uma abordagem no domínio da frequência, utilizando o critério de estabilidade de Nyquist e conceitos como margem de ganho e função de sensibilidade, tendo sido possível, com isso, projetar controladores robustos. Para implementar este controle, Dantas et al. (2020) utilizaram realimentação de estado, assim como Ram et al. (2009), que modifica as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{K} (vide equação (1)).

No presente trabalho, baseando-se no método proposto por Dantas et al. (2020), propomos um método para o projeto de controle por meio de realimentação derivativa de estado, a qual altera as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{D} . A realimentação derivativa apresenta vantagens em relação à realimentação de estado, tais como: uso de acelerômetros como sensores necessários ao controle, que possuem custo mais reduzido e são de maior aplicabilidade na indústria (Faria et al., 2009); melhor precisão na leitura dos estados do sistema (Abdelaziz and Valásek, 2004); possibilidade de regularização e estabilização de sistemas com matriz massa singular (Abdelaziz, 2015).

Em Dantas et al. (2020) ficou demonstrado por meio de exemplos que sua proposta é eficiente em estabilizar e controlar de forma satisfatória diferentes sistemas, mesmo quando o método proposto em Ram and Mottershead (2007) e Ram et al. (2009) falha em uma primeira tentativa (antes de uma análise *a posteriori*). O presente trabalho propõe uma extensão do método de Dantas et al. (2020) ao caso de realimentação derivativa e traz um comparativo entre os resultados alcançados com realimentação derivativa e com realimentação de estado. Para melhor compreensão do leitor, a próxima seção traz uma breve introdução do método trabalhado e sua extensão ao controle por realimentação derivativa de estado. Em seguida são apresentados resultados comparativos de simulação entre as duas formas de realimentação: de estado e da derivada do estado, apresentado-se as conclusões ao final.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando um sistema modelado pela equação (1), $\mathbf{x}(t)$ representa o vetor deslocamento, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ o vetor velocidade e $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ o vetor aceleração, todos pertencentes ao \mathbb{R}^n . A matriz de massa $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e positiva definida; a matriz de amortecimento $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica; a matriz de rigidez $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e positiva semi definida e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$, é um vetor de forças externas.

Considera-se que todos os polos em malha aberta estejam no semi plano esquerdo (SPE) do plano complexo.

O sistema representado pela equação (1) no domínio da transformada de Laplace pode ser expresso como:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s), \quad (2)$$

sendo $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})^{-1}$, a chamada **matriz de receptância** de malha aberta, a qual pode ser levantada por meio de dados experimentais (Ram and Mottershead, 2007), (Ram et al., 2009)).

Considerando $\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau)$ (caso de sistema com atraso), sendo $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matrix de atuadores e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle, podem-se utilizar diferentes formas de cálculo de $\mathbf{u}(t)$ para implementar diferentes formas de controle. Dantas et al. (2020) utilizaram em seu trabalho a realimentação de estado. Já este trabalho faz o uso de realimentação derivativa de estado na qual o vetor $\mathbf{u}(t)$ assume a forma (lei de controle) da seguinte equação:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}\ddot{\mathbf{x}}^T(t) + \mathbf{g}\dot{\mathbf{x}}^T(t) \quad (3)$$

Substituindo $\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau)$ e (3) em (1) e aplicando a transformada de Laplace, obtém-se a seguinte expressão de malha fechada:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})e^{-s\tau})\mathbf{X}(s) = \mathbf{0}$$

A matriz de receptância de malha fechada é então dada por:

$$\widehat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})e^{-s\tau})^{-1}$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento apresentado em (Ram and Mottershead, 2007; Ram et al., 2009), com o uso da fórmula de Sherman–Morrison, é possível escrever a matriz de receptância de malha fechada (para o caso de realimentação derivativa de estado) em função daquela de malha aberta da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) + \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{B}(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T\mathbf{H}(s)e^{-s\tau}}{1 - (\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}} \quad (4)$$

sendo o denominador de $\widehat{\mathbf{H}}(s)$ o polinômio característico de malha fechada do sistema, cujas raízes são os polos de malha fechada.

A partir de uma equação similar a (4), para o caso de realimentação de estado, Ram et al. (2009) apresentaram uma solução para encontrar valores para os vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} de forma a alocar os polos do sistema em posições previamente definidas, mas com a necessidade de análise *a posteriori* devido à presença de atraso. Em Dantas et al. (2020), demonstra-se a possibilidade de se utilizar um ganho de malha similar ao observado em (4): $\mathbf{L}(s) = -(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}$, cujo diagrama de Nyquist pode ser traçado. Tendo em mente o pressuposto de que os sistemas considerados possuem seus polos de malha aberta no SPE e utilizando-se de conceitos de estabilidade e robustez baseados em resposta em frequência, Dantas et al. (2020) traduziram o projeto do controlador em uma busca por ganhos dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} que façam com que a curva de Nyquist tangencie o círculo de raio M_s^{-1} como apresentado na Figura 1. Não havendo o enlace do ponto $(-1;0j)$, a estabilidade em malha fechada é garantida segundo o critério de estabilidade de Nyquist.

A seguir mostra-se como a abordagem de Dantas et al. (2020) pode ser estendida ao caso de realimentação derivativa.

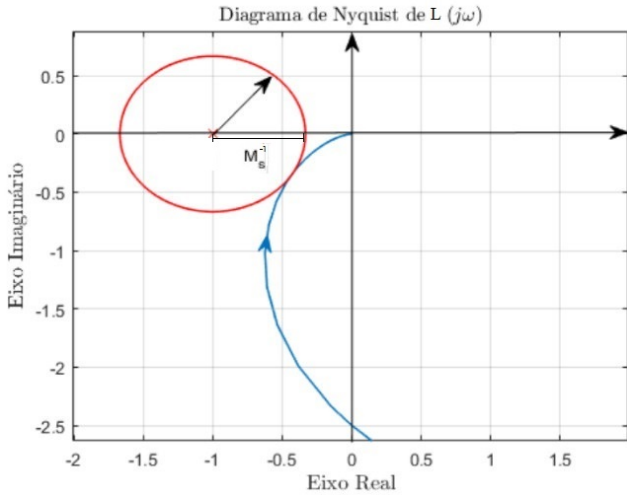


Figura 1. Diagrama de Nyquist com tangenciamento do círculo de raio M_s^{-1} .

Os ganhos \mathbf{f} , \mathbf{g} que garantem que a curva de Nyquist não circule o ponto crítico $-1 + 0j$ e se aproxime ao máximo de tangenciar um círculo de raio M_s^{-1} dado, podem ser obtidos a partir da minimização da função objetivo (5), sujeita às restrições (6) ou (7):

$$\min_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} h(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\min_{\omega_i} |L(j\omega_i) + 1| - M_s^{-1})^2 \quad (5)$$

$$\text{Re}\{L(j\omega_i)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \omega_i / \text{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \quad (6)$$

$$\min_{\omega_i} \text{Re}\{L(j\omega_i)\} = -1 + M_s^{-1} \quad \forall \omega_i / \text{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \quad (7)$$

em que $L(j\omega) = -(j\omega_i \mathbf{g} - \omega_i^2 \mathbf{f})^T \mathbf{H}(j\omega_i) \mathbf{B} e^{-j\omega_i \tau}$.

O subscrito i representa o i -ésimo elemento do vetor de frequências ω , que varia de ω_1 até uma frequência alta o suficiente para garantir $|L(j\omega)| \simeq 0$.

A função objetivo (5) busca forçar o diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$ a tangenciar a circunferência de raio M_s^{-1} . A restrição (6) garante que todos pontos reais (com parte imaginária nula) do traçado do diagrama de Nyquist encontrados estejam à direita do ponto $-1 + 0j$, ou seja, que o diagrama de Nyquist não realize nenhum enlace ao citado ponto, funcionando assim como uma restrição necessária a estabilidade do sistema, segundo o critério de Nyquist (Ogata, 2001). O uso da restrição (7) é feito para que o ponto de tangenciamento entre a curva do diagrama de Nyquist e o círculo de raio M_s^{-1} ocorra o mais próximo possível do eixo real (no ponto $(-1 + M_s^{-1} + 0j)$), já que desta forma a margem de ganho será menor dentro do limite imposto por M_s , o que, em princípio, proporciona uma resposta mais rápida do sistema. A ideia é obter um controlador o menos conservador possível diante da restrição de círculo M_s , que já provê robustez em relação a incertezas no modelo.

Com relação aos possíveis valores de M_s , estes ficam a critério do projetista do controle, dependendo das demandas existentes, mas conforme Astrom and Hagglund (1995) são recomendados valores entre 1,3 e 2. Note que, quanto menor o valor de M_s , maior o raio da circunferência

correspondente e, conseqüentemente, mais longe do ponto crítico estará a curva de Nyquist, o que garante maior robustez diante de incertezas nos parâmetros do modelo.

3. SOLUÇÃO VIA ALGORITMO GENÉTICO

Devido à complexidade do problema de otimização (5), não havendo expressões analíticas explícitas para a função objetivo e as restrições, o uso de uma meta-heurística é uma escolha natural. É proposto aqui o uso de Algoritmo Genético.

Este algoritmo demanda a definição de uma população inicial (conjunto de soluções iniciais, no caso em questão, um conjunto de ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g}). Por padrão, caso este parâmetro não seja definido pelo usuário, alguns modelos de algoritmos genéticos disponíveis (como o aqui utilizado, a função *ga* do Matlab) podem definir uma população inicial de maneira aleatória, mas tal procedimento pode tornar o processo de otimização mais lento. Desta forma, surge a necessidade da definição de uma população inicial para um melhor desempenho do algoritmo.

Para a definição da população inicial a ser utilizada pelo algoritmo genético, são definidos os seguintes passos:

- Utilização do método da receptância definido em Ram and Mottershead (2007), considerando um sistema sem atraso de transporte ($\tau = 0$), para que seja definido um primeiro valor para os ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} (outros métodos podem ser utilizados);
- De posse de um primeiro valor de \mathbf{f} e \mathbf{g} , verifica-se a sua estabilidade pelo critério de Nyquist, considerando-se neste momento o atraso. Para tanto, utiliza-se a expressão $(s\mathbf{g} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s) \mathbf{B} e^{-s\tau}$;
- Caso os primeiros valores definidos para os ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} não tragam estabilidade ao sistema, deve-se multiplicá-los por um valor $0 \leq \alpha < 1$ e novamente verificar a sua estabilidade, até que esta seja alcançada, em processo conhecido como *detuning*. Havendo como pressuposto a estabilidade do sistema em malha aberta Santos et al. (2018) demonstram a possibilidade de uso desse artifício para se encontrarem valores estabilizantes de \mathbf{f} e \mathbf{g} ;
- Encontrado um primeiro conjunto de valores de ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} que estabilizem o sistema, a população inicial pode ser definida por outros valores de ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} (quantos forem desejados para uma população inicial) ao se multiplicarem os ganhos estabilizantes iniciais por um conjunto de diferentes valores de $\alpha \in [0, 1)$.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentados o método e sua adequação à realimentação derivativa de estado, seguem alguns exemplos numéricos trabalhados em (Dantas et al., 2020) (onde foi usada realimentação de estado, ou simplesmente RE) e o comparativo de seus resultados com a abordagem para a realimentação derivativa de estado aqui proposta (a partir de agora simplesmente RD).

Dantas et al. (2020) apresentam duas formas de utilizar o seu método: na primeira forma (Caso I) com uso da

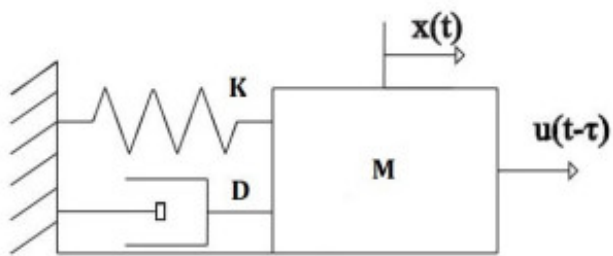


Figura 2. Sistema massa-amortecedor-mola do exemplo 1. restrição em (6); e na segunda forma (Caso II) usando a restrição em (7), para a otimização da função objetivo (5).

Como já comentado, espera-se que o Caso II traga melhores resultados em termos de resposta temporal, tendo em vista que o uso da restrição (7) tenta forçar o algoritmo genético a encontrar valores de ganhos (vetores \mathbf{f} e \mathbf{g}) que façam o traçado de Nyquist tangenciar o círculo de raio M_s^{-1} em um ponto sobre o eixo real, o que, em princípio, resultam em um controle menos conservador (com menor margem de ganho).

4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo alvo deste comparativo é extraído de (Dantas et al., 2020) (onde podem ser consultados maiores detalhes) e é o apresentado na Figura (2), possuindo como parâmetros $M=1$, $D=0,01$, $K=5$, $B=1$ e um atraso $\tau = 0, 1$. Para a implementação é utilizado $M_s = 1, 66$.

Seguem na Tabela 1 os valores dos ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} alcançados por Dantas et al. (2020), com realimentação de estado - RE, para o Caso I e o Caso II e também os valores alcançados neste trabalho, utilizando realimentação derivativa de estado - RD, também para o Caso I e o Caso II.

Tabela 1. Valores dos ganhos para os diferentes casos do exemplo 1.

Ganho	RE		RD	
	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
\mathbf{f}	-2,6097	-4,4300	-0,0057	-0,3656
\mathbf{g}	-5,9599	-6,1675	0,0015	-4,1493

Na Figura 3 são apresentados os diagramas de Nyquist obtidos com os diferentes ganhos de realimentação da Tabela 1. Em todos os casos foi possível realizar o controle de forma a garantir estabilidade em malha fechada, já que não houve enlaçamento do ponto $-1 + 0j$.

Além de se concluir da Figura 3 que todas soluções encontradas são estáveis, percebe-se também que na “RD Caso II” o algoritmo proposto foi capaz de cumprir melhor o seu papel quando comparado com o similar “RE Caso II”, já que pôde tangenciar o círculo M_s quase que exatamente sobre o eixo real.

Para uma análise qualitativa dos resultados, é apresentada a Tabela 2 com os valores de margem de ganho alcançados.

Na Figura 4 é apresentado o comportamento do sistema no tempo (sua resposta transitória, em um gráfico de 0 a 5 segundos), para o vetor de deslocamento ($\mathbf{x}(t)$, na Figura 4(a)) e velocidade ($\dot{\mathbf{x}}(t)$, na Figura 4(b)), tomando como condições iniciais $\mathbf{x}(0) = 0, 3$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$.

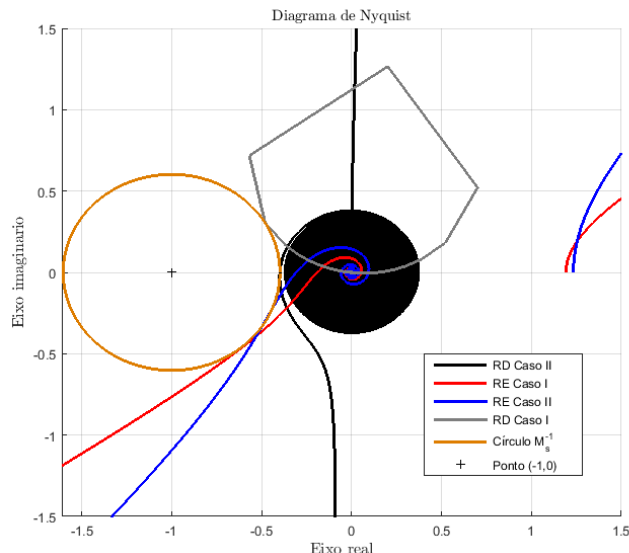


Figura 3. Diagramas de Nyquist para os diferentes casos apresentados na Tabela 1

A Figura 4 pode induzir no leitor a ideia que a resposta à RD Caso I (tanto no vetor de deslocamento quanto velocidade) é não amortecida, o que, no entanto, não se verifica. Na resposta de RD Caso I há amortecimento, porém a constante de amortecimento é da ordem de 175 segundos (tempo para decaimento de 37% da amplitude).

A resposta relativa à RD Caso II revelou-se menos oscilatória e o controlador foi capaz de atingir uma margem de ganho menor, sempre respeitando os limites do círculo M_s no diagrama de Nyquist.

4.2 Exemplo 2

Como um segundo exemplo, consideremos o sistema dado pelas matrizes em (8), que possui um atraso $\tau = 0, 7$ e faz uso de $M_s = 2$ para seu controle. Esse valor alto de M_s se justifica pela dificuldade em estabilizar o sistema em malha fechada diante do valor alto do atraso (detalhes do sistema podem ser encontrados em (Dantas et al., 2020)).

Para as simulações são utilizadas como condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$.

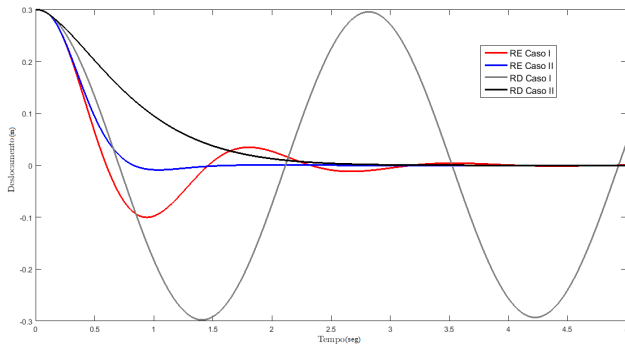
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1500 & -500 & 0 \\ -500 & 600 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

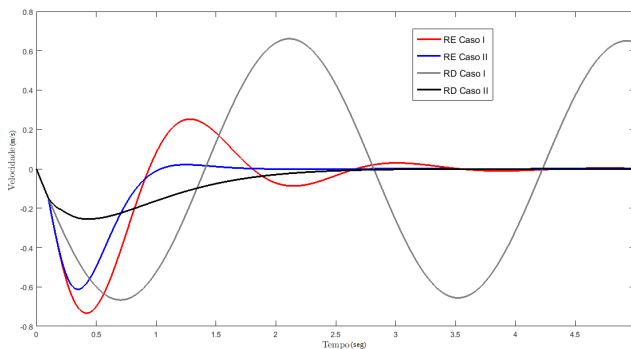
Após ter sido verificado no exemplo anterior tanto para RE quanto para RD o melhor desempenho no Caso II (uso da restrição em (7) para a otimização da função objetivo (5)),

Tabela 2. Margens de ganho do exemplo 1.

Método	Margem de Ganho
RE Caso I	14,3 dB
RE Caso II	10,2 dB
RD Caso I	44,7 dB
RD Caso II	8 dB



(a) comportamento no tempo (em segundos) do vetor de deslocamento (metros) para os casos apresentados na Tabela 1.



(b) comportamento no tempo (em segundos) do estado velocidade (m/s) para os casos apresentados na Tabela 1.

Figura 4. Desempenho no tempo dos vetores de deslocamento e de velocidade, para os casos da Tabela 1

no presente exemplo são mostrados somente os resultados do Caso II.

Na Tabela 3 são apresentados os valores de ganhos alcançados tanto para a RE quando para a RD.

Tabela 3. Valores dos ganhos para os diferentes casos do exemplo 2.

Ganho	RE Caso II	RD Caso II
f	[0,0147 6,9622 6,432]	[0,9339 1,9985 0,7368]
g	[3,0064 -3,9902 8,8771]	[1,1439 1,1929 -1,0453]

Na Figura 5 são apresentados os diagramas de Nyquist para os casos descritos na Tabela 3. Novamente o método foi capaz de produzir um controlador estabilizante e estabelecer o melhor desempenho possível, dentro dos limites definidos pelo algoritmo, apesar do valor elevado do atraso.

Similarmente ao apresentado no exemplo 1, apresenta-se a Tabela 4 com os valores das margens de ganho do exemplo 2. Deve-se lembrar que neste exemplo tem-se $M_s = 2$, o que conduz a margens de ganho menores no método proposto.

Tabela 4. Margens de ganho do exemplo 2.

Método	Margem de Ganho
RE Caso II	6,03 dB
RD Caso II	5,96 dB

Já na Figura 6 são apresentadas as respostas no tempo do vetor de deslocamento do sistema do exemplo 2, obtidas com os controladores RE (Figura 6(a)) e RD (Figura 6(b)).

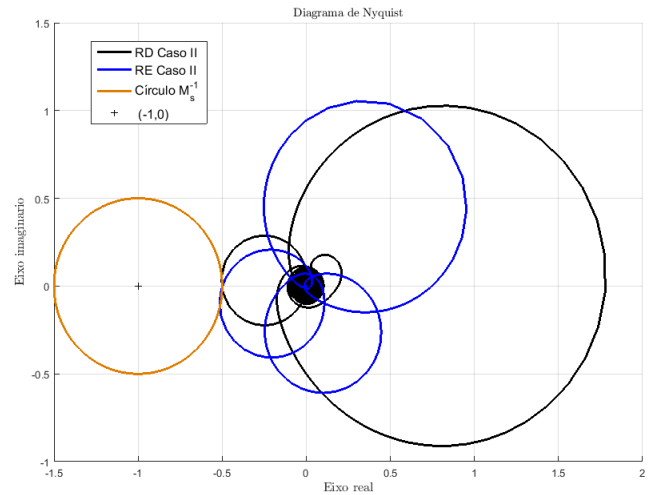
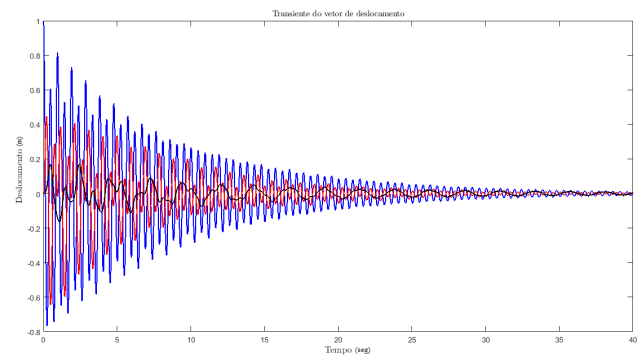
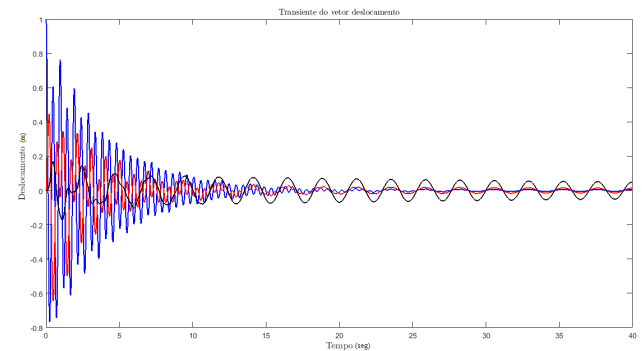


Figura 5. Diagrama de Nyquist comparativo entre RE e RD Caso II, da Tabela 3.



(a) Vetor de deslocamento (metros) do exemplo 2, submetido ao controle RE Caso II.



(b) Vetor de deslocamento (metros) do exemplo 2, submetido ao controle RD Caso II.

Figura 6. Gráfico de resposta no tempo (em segundos) do vetor de deslocamento, para os casos da Tabela 3

Em uma análise da Figura 6, percebe-se que no geral o controle RD gerou um amortecimento mais rápido em comparação ao controle RE. Porém uma das variáveis de deslocamento (em preto no gráfico) com RE teve amortecimento mais rápido em comparação ao seu paralelo RD.

Esse comportamento pode ser explicado pela posição dos polos de malha fechada, como apresentado na Figura 8. Verifica-se que polos com mais baixo amortecimento foram obtidos com o controle RD. Os polos de malha fechada do sistema com atraso foram calculados por aproximação

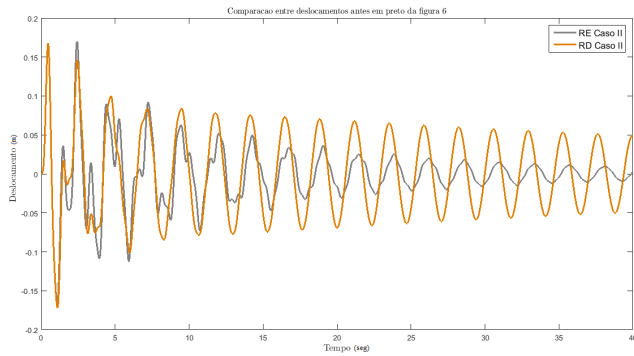


Figura 7. Comparativo dos deslocamentos antes em preto da Figura 6: RE em cinza e RD em laranja.

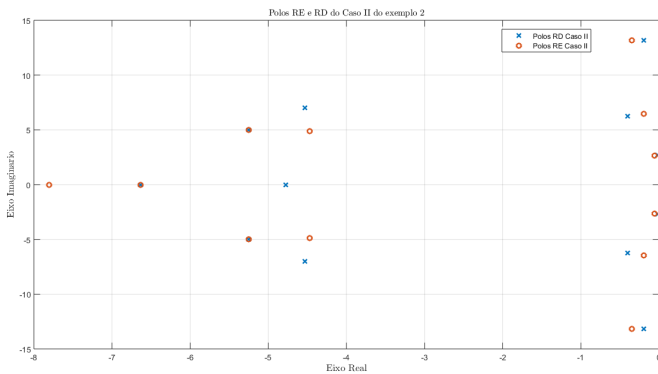


Figura 8. Polos de malha fechada obtidos pelos controladores RE ('o') e RD ('x') no exemplo 2.

de Padé, como preconizado por Araújo (2018). Os polos dominantes obtidos por RE foram $-0,0595 \pm j2,6435$. Já para RD foram obtidos os polos $-0,0170 \pm j2,6750$.

5. CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi proposto um algoritmo para projeto de controlador por realimentação derivativa de estado para sistemas de segunda ordem com atraso, estendendo aquele proposto em (Dantas et al., 2020) para realimentação de estado. Comparada a outras técnicas disponíveis na literatura, a técnica proposta permite o cálculo de controladores estabilizantes sem o uso de aproximações para tratar o atraso, nem a necessidade de análises a posteriori.

Nos exemplos numéricos analisados, a realimentação derivativa de estado foi capaz de impor ao sistema uma dinâmica mais rápida do que a realimentação de estado, porém com ganhos do controlador, em média, menores, o que pode resultar, em princípio, em um menor esforço dos atuadores e consequente maior durabilidade destes.

A implementação com sucesso do método para realimentação derivativa abre a possibilidade de trabalhos futuros:

- Regularização em malha fechada de sistemas com matriz de massa singular na presença de atraso, o que poderá trazer benefícios, como por exemplo a eliminação do comportamento impulsivo característico de sistemas dessa natureza (Abdelaziz, 2015).
- Análise comparativa entre realimentação de estado e derivativa da sensibilidade de malha fechada em rela-

ção a variações de parâmetros específicos do modelo, como em Araújo et al. (2016).

- Uso de realimentação derivativa para alocação parcial de polos, como em Dantas et al. (2021).

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado em parte pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq) - Processo 309862/2019-1 e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- Abdelaziz, T. (2015). Robust pole assignment using velocity-acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix. *ISA Transactions*, 71–84.
- Abdelaziz, T. and Valásek, M. (2004). Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 377–385.
- Araújo, J. (2018). Discussion on 'state feedback control with time delay'. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 368–370.
- Araújo, J.M., Dórea, C.E., Gonçalves, L.M., and Datta, B.N. (2016). State derivative feedback in second-order linear systems: A comparative analysis of perturbed eigenvalues under coefficient variation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 76–77, 33–46.
- Astrom, K. and Hagglund, T. (1995). Pid controllers: theory, desing and tuning. *ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society*.
- Clark, J.V., K.S.J., P., and Zhou, N. (2000). Modified nodal analysis for mems with multi-energy domains. *TechConnect Briefs*, 723–726.
- Dantas, N., Dórea, C., and Araújo, J. (2020). Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 137, 106404.
- Dantas, N., Dórea, C., and Araújo, J. (2021). Partial pole assignment using rank-one control and receptance in second-order systems with time delay. *Meccanica*, 56, 287–302.
- Datta, B. (2003). *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Academic Press.
- Faria, A., Assunção, E., and Teixeira, M. (2009). Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando lmis. *Sba: Controle & Automação*, 83–93.
- Ogata, K. (2001). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall PTR, USA, 4th edition.
- Ram, Y. and Mottershead, J. (2007). Receptance method in active vibration control. *AIAA Journal*, 562–567.
- Ram, Y., Singh, A., and Mottershead, J. (2009). State feedback control with time delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1940–1945.
- Santos, T.L., Araújo, J.M., and Franklin, T.S. (2018). Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110, 428–441.
- Tisseur, F. and Meerbergen, K. (2001). The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, 43(2), 235–286.