

Controle Extremal em Rede com Dados Amostrados [★]

Rodrigo Gualberto Rodrigues Alves ^{*}
Victor Hugo Pereira Rodrigues ^{**} Tiago Roux Oliveira ^{*}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro,
(e-mail: rodrigo.gualb@gmail.com e tiagoroux@uerj.br).

^{**} Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ
21941-972, Brasil, (e-mail: rodrigues.vhp@gmail.com).

Abstract: This paper proposes a new approach for network-based extremum seeking with sampled data. The controller needs to deal with the natural delay of a networked control system, considering two sources of delay for that, in addition to the sampling interval, which can be variable. Basically, the novelty of our result is the real-time optimization of the proposed networked control system with time-varying delay. Simulation results illustrate the efficiency of the proposed extremum seeking control strategy adopted on the formulated sampled-data problem.

Resumo: Este artigo propõe uma nova abordagem para o controle extremal em rede com dados amostrados. O controlador necessita lidar com o atraso natural de sistemas em rede, considerando duas fontes de atraso para isso, além do intervalo de amostragem, que pode ser variável. Basicamente, a novidade do nosso resultado está na otimização em tempo real do sistema em rede proposto com atrasos variantes no tempo. Os resultados de simulação ilustram a eficiência da estratégia de controle adotada para o problema formulado com dados amostrados.

Keywords: Extremum seeking; Network-based control; Time-delay systems; Averaging theory for time-varying delays.

Palavras-chaves: Controle Extremal; Controle baseado em rede; Sistemas com atraso; Teoria da média para atrasos variáveis.

1. INTRODUÇÃO

O controle extremal (*extremum seeking* - ES) é um método para otimização em tempo real de um sistema de controle para determinar e manter o extremo de uma dada função desconhecida, (Krstic, 2014). Possui aplicação em situações que exista uma não-linearidade no problema de controle, e esta não-linearidade apresenta um mínimo ou máximo. A não-linearidade pode estar na planta ou estar na formulação do problema, associada ao sistema através de uma função objetivo de um problema de otimização, como em (Zhang, 2014). Tem se tornado um emergente tópico de pesquisa em controle adaptativo com diversas publicações nos últimos anos, como em (Frihauf et al., 2013), (Khong et al., 2013), (Dochain et al., 2011), (Grushkovskaya et al., 2018), (Ren et al., 2012), (Wang et al., 1999).

Apesar deste fato, não existem trabalhos que lidam com o problema de controle extremal em rede na presença de dados amostrados. Os sistemas de controle modernos geralmente empregam tecnologia digital para implementação

do controlador, ou seja, controle de dados amostrados. O atraso correspondente ao controle de dados amostrados pode ser considerado como um atraso de variação rápida contínua por partes, (Fridman, 2014). No contexto de sistema de controle em rede, o intervalo de amostragem pode ser variável.

No problema de controle proposto, apresenta-se um controle extremal baseado em rede para um mapeamento estático não-linear, com os intervalos de amostragem variáveis no tempo, incluindo uma perturbação senoidal ou *dither* para estimar o gradiente da função objetivo.

Considera-se duas fontes de atraso da rede, uma para o controlador e outra para o atuador. Em particular, inclui-se um detentor de ordem zero (ZOH), que transforma a entrada de controle de tempo discreto em uma entrada de controle contínua no mapeamento não-linear de interesse.

Prova-se a estabilidade do sistema médio, (Fridman, 2020), garantindo a estabilidade do sistema atrasado e em rede com dados amostrados. Através da realização de simulações, em que se considera uma planta multivariável estática e não-linear com intervalos com amostragem periódica e parâmetros desconhecidos, ilustramos a eficiência da estratégia proposta.

^{*} Os autores agradecem ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

2. FORMULAÇÃO DO CONTROLADOR

A Figura 1 apresenta um sistema de controle extremal baseado em rede para um mapeamento multivariável estático não-linear, conforme (Ariyur and Krstić, 2003):

$$Q(\Theta(t)) = Q^* + \frac{1}{2}(\Theta(t) - \theta^*)^T H(\Theta(t) - \theta^*), \quad (1)$$

onde $H = H^T \in R^{n \times n}$ é uma matriz Hessiana, $H > 0$ (positivo definida), $\theta(t) \in R^n \in R^m$ o sinal de controle na saída do controlador, $\theta_k \in R^m$ o sinal de controle amostrado, $\Theta(t) \in R^m$ o sinal de controle após a conversão digital analógico (DA) realizada pelo ZOH, $y(t) \in R^p$ a saída, $y(s_k) \in R^p$ a saída amostrada pelo sensor, $S(t)$ e $M(t)$ são vetores de perturbação senoidal ou *dither* e $\hat{G}(t)$ é chamado de estimativa do vetor gradiente.

Na Figura 1, mostra-se um diagrama de blocos que representa o controle extremal com mapeamento multivariável estático considerando o efeito de atraso provocado pelas redes de comunicação.

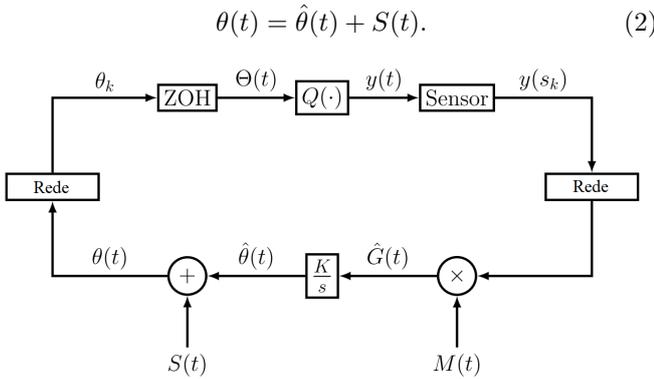


Figura 1. Esquema de busca extremal baseada em rede com dados amostrados pela ZOH.

O termo s_k denota a sequência de crescimento monotonicamente ilimitada dos instantes de amostragem, ou seja,

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots, \quad k \in Z^+, \quad \lim_{k \rightarrow t_\infty} s_k = \infty, \quad (3)$$

com os intervalos de amostragem variáveis no tempo

$$h_k = s_{k+1} - s_k > 0. \quad (4)$$

Existem duas fontes de atrasos da rede: sensor para o controlador (η_k^{sc}) e controlador para o atuador (η_k^{ca}). Supõe-se que o sensor atue de forma orientada pelo tempo (ou seja, a amostragem ocorre nos tempos $s_k, k \in Z^+$) e que tanto o controlador quanto o atuador agem de forma orientada por eventos (ou seja, eles respondem instantaneamente aos dados recém-chegados), assim como em (Fridman, 2014). Sob essas premissas, esses dois atrasos podem ser capturados por um único atraso $\eta_k = (\eta_k^{sc}) + (\eta_k^{ca})$. Assumindo que $\eta_k \in [\eta_m, \eta_M]$, onde η_m e η_M denotam os limites de atraso inferior e superior dos atrasos induzidos pela rede η_k , respectivamente. Denote por $t_k = s_k + \eta_k$ o tempo instantâneo de atualização do retentor de

ordem zero (ZOH), finalmente a função ZOH transforma a entrada de controle de tempo discreto θ_k em uma entrada de controle contínua no mapeamento (1):

$$\Theta(t) = \theta_k = \theta(s_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in Z^+. \quad (5)$$

Por outro lado, os sistemas de controle modernos geralmente empregam tecnologia digital para implementação do controlador, ou seja, controle com dados amostrados. Nos sistemas de dados amostrados $\eta_k = 0$, conseqüentemente, $t_k = s_k$, e a entrada $\Theta(t)$ em (5) pode ser representada como uma lei de controle atrasada

$$\Theta(t) = \theta(t_k) = \theta(t - (t - t_k)) = \theta(t - h(t)), \quad (6)$$

$$h(t) = t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k \in Z^+, \quad (7)$$

onde $\theta(t - h(t)) = [\theta_1(t - h(t)), \dots, \theta_n(t - h(t))]^T$, em (K. Liu and Xia, 2020). Além disso, o atraso variável no tempo $h(t)$, em (K. Liu and Xia, 2020), é linear por partes, limitado por $h_M \in R^+$, ou seja, $h(t) \in [0, h_M]$, e tem derivada temporal $\dot{h}(t) = 1, \forall t \neq t_k$ (ver Figura 2).

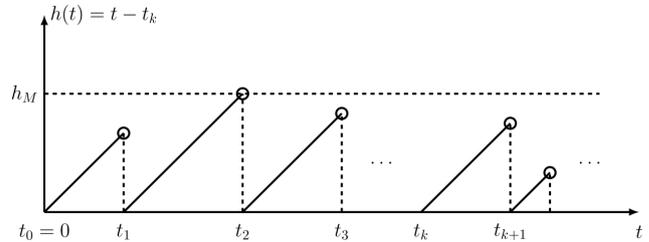


Figura 2. Função dente de serra contínua como o atraso no tempo.

Nesse contexto, o sistema de malha fechada pode ser tratado como um sistema de dimensão infinita em tempo contínuo sujeito a um atraso variante no tempo $h(t)$ no ramo de atuação, vide Figura 3.

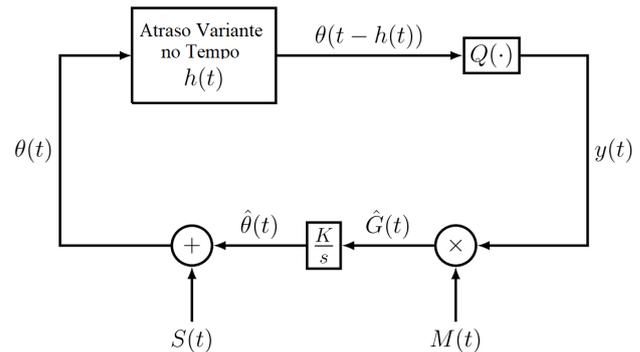


Figura 3. Esquema de controle extremal baseado em rede equivalente contínuo com atrasos variantes no tempo.

Então, a partir da Figura 3, a saída do mapeamento não-linear (1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= y(\theta(t - h(t))) \\ &= Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t - h(t)) - \theta^*)^T H(\theta(t - h(t)) - \theta^*). \end{aligned} \quad (8)$$

Definindo o erro de estimativa

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (9)$$

e a estimativa de gradiente

$$\tilde{G}(t) = M(t)y(t), \quad (10)$$

com vetores de perturbação senoidal

$$S(t) = \left[a_1 \operatorname{sen}\left(\omega_1 \frac{t}{\varepsilon}\right), \dots, a_n \operatorname{sen}\left(\omega_n \frac{t}{\varepsilon}\right) \right]^T \quad (11)$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1} \operatorname{sen}\left(\omega_1 \frac{(t-h(t))}{\varepsilon}\right), \dots, \frac{2}{a_n} \operatorname{sen}\left(\omega_n \frac{(t-h(t))}{\varepsilon}\right) \right]^T \quad (12)$$

com amplitudes diferentes de zero a_i e parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$. Além disso, as frequências de sondagem ω_i 's podem ser selecionadas como

$$\omega_i = \omega'_i \omega, \quad i \in [1, \dots, n], \quad (13)$$

onde ω é uma constante positiva e ω'_i é um número racional.

De (2) e (9), tem-se que

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + S(t) + \theta^*, \quad (14)$$

e, portanto, substituindo (14) em (8), $y(t)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} y(t) &= Q^* + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}(t-h(t)) + S(t-h(t)))^T \\ &\quad \times H(\tilde{\theta}(t-h(t)) + S(t-h(t))) \\ &= Q^* + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T(t-h(t)) + H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + S^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}S^T(t-h(t))HS(t-h(t)) \end{aligned} \quad (15)$$

então, o gradiente estimado é

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &= M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + M(t)S^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}M(t)S^T(t-h(t)) + HS(t-h(t)). \end{aligned} \quad (16)$$

definindo

$$\tilde{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := M(t)S^T(t-h(t))H, \quad (17)$$

$$\tilde{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)S^T(t-h(t))HS(t-h(t)), \quad (18)$$

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)), \quad (19)$$

a equação (16) torna-se

$$\tilde{G} = \hat{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\tilde{\theta}(t-h(t)) + \tilde{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \vartheta(t). \quad (20)$$

A partir da derivada temporal de (9), a dinâmica que governa o $\hat{\theta}(t)$, bem como $\hat{\theta}(t)$, é dada por

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t) = K\hat{G}(t), \quad (21)$$

sendo $K < 0$ uma matriz diagonal negativa definida.

O termo $\vartheta(t)$ em (20) é quadrático em $\tilde{\theta}(t-h(t))$ e pode ser desprezado em uma análise local. Assim, substituindo (20) em (21) e ignorando $\vartheta(t)$, chega-se a

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\tilde{\theta}(t-h(t)) + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (22)$$

onde

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := K\tilde{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (23)$$

$$B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := K\tilde{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (24)$$

Além disso, as matrizes variantes no tempo $A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ e $B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ são ambos periódicos em T com

$$T = 2\pi \times MMC\left(\frac{1}{\omega_i}\right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (25)$$

Escalonando o tempo $t = T\bar{t}$ e denotando $\bar{\theta} = \tilde{\theta}(T\bar{t}) = \hat{\theta}(t)$, o sistema (22) é apresentado como

$$\frac{d}{d\bar{t}}\bar{\theta}(\bar{t}) = TA\left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon}\right)\bar{\theta}(t-h(t)) + TB\left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon}\right)w(t). \quad (26)$$

2.1 Análise de estabilidade

Usando (17) e (18), é possível concluir que as entradas $\hat{h}_{ij}(\tau)$ de $\hat{H}(\tau)$ e $\hat{j}_i(\tau)$ de $\hat{J}(\tau)$ são dados por

$$\hat{h}_{ij}(\tau) = \frac{2}{a_i} \operatorname{sen}\omega_i\tau \left[\sum_{k=1}^n a_k \operatorname{sen}(\omega_k\tau) h_{kj} \right], \quad (27)$$

$$\hat{j}_i(\tau) =$$

$$\frac{2}{a_i} \operatorname{sen}\omega_i\tau \left[Q^* + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k \operatorname{sen}(\omega_k\tau) h_{kj} \right) a_j \operatorname{sen}(\omega_j\tau) \right], \quad (28)$$

consequentemente, $\hat{h}_{ij}(\tau)$ e $\hat{j}_i(\tau)$ são periódicos em T , tais que $\hat{H}_{av} = H$ e $\hat{J}_{av} = 0$, e todas as entradas $\hat{h}_{ij}(\tau)$ e $\hat{j}_i(\tau)$ são limitadas uniformemente $\tau \geq 0$ com valores de um intervalo finito $\hat{h}_{ij}(\tau) \in [\hat{h}_{ij}^m, \hat{h}_{ij}^M]$ e $\hat{j}_i(\tau) \in [\hat{j}_i^m, \hat{j}_i^M]$ para $\tau \geq \tau_1 \geq 1$. Assim, $TA(\tau)$ e $TB(\tau)$ em (26) satisfazem a condição quase periódica com

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t TA \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) ds = TA_{av} + T\Delta A \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = TKH, \quad (29)$$

$$A_{av} = KH, \quad \sigma > \left\| \Delta A \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right\| = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t TB \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) ds = TB_{av} + T\Delta B \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = 0, \quad (31)$$

$$B_{av} = 0, \quad \Delta B \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = 0. \quad (32)$$

Invocando o [(Fridman, 2020), Theorem 5.2 ou Apêndice A, Teoremas A e B], a versão média de (26) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\theta}_{av}(\bar{t}) &= \left[TA_{av} + T\Delta A \left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{\theta}_{av}(\bar{t}) \\ &+ \left[TB_{av} + T\Delta B \left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon} \right) \right] w(\bar{t}), \quad (33) \\ &= TA_{av} \bar{\theta}_{av}(\bar{t}), \end{aligned}$$

para $|h(t)| \leq h(m)$ e $h(m)$ suficientemente pequeno.

Portanto, com A_{av} Hurwitz, a estabilidade do sistema médio (33) garante a estabilidade do sistema atrasado (22) e em rede com dados amostrados original.

Além disso, existe um elipsóide exponencialmente atrativo com $\sup_{t \geq 0} |\omega(t)| \leq \Delta = 1$

$$\chi = \left(\theta \in R^n : |\theta|^2 \leq \frac{b_0 + \dots b_{2^n}}{2\alpha c_1} \Delta^2 \right), \quad (34)$$

2.2 Modelo com atraso de saída

Convenientemente, é apresentado no Apêndice A um resumo dos principais resultados de teoria da média de sistemas com atrasos variantes no tempo de (Fridman, 2020).

Uma vez que a planta é um mapeamento estático não-linear sujeito ao mesmo atraso nos canais de entrada, o atraso de entrada pode tratar como um simples atraso de saída (Oliveira et al., 2017), conforme apresentado na Figura 4.

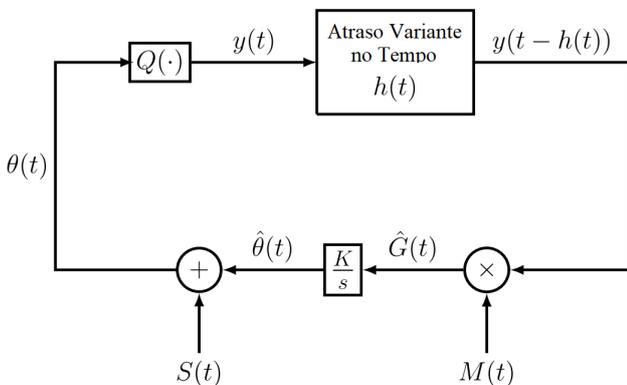


Figura 4. Esquema de busca extremal baseado em rede equivalente contínuo com atrasos de saída.

3. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Para destacar as ideias principais da estratégia de controle extremal baseada em rede proposta, o mapeamento não-linear multivariável (1) tem entrada $\Theta(t) \in R^2$, saída $y(t) \in R$, e parâmetros desconhecidos

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 100 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}, \quad (35) \\ Q^* &= 100 \text{ e } \theta^* = [2 \ 4]^T. \end{aligned}$$

O controle extremal baseado em rede na Figura 1 pode ser visto, por exemplo, como um sistema de dados amostrados com amostragem periódica $h_M = 0,4$ [seg] e tratado como um sistema de tempo contínuo com um atraso variável no tempo aplicado à entrada da planta, conforme apresentado na Figura 3.

O atraso variável no tempo é $h(t) = t - t_k, \forall t \in [t_k, t_k + h_M]$, e os vetores de *dither* possuem parâmetros $a_1 = a_2 = 0,1$, $\omega_1 = 0,7$ [rad/s], $\omega_2 = 0,5$ [rad/seg] e $\varepsilon = 0,1$.

A matriz de ganho de controle $K = 10^{-2} \begin{bmatrix} -7,5 & 0 \\ 0 & -7,5 \end{bmatrix}$ e a condição inicial é $\hat{\theta}(0) = [2,5 \ 5]^T$.

A Figura 5 mostra a convergência do sinal de controle $\theta(t)$ para uma vizinhança do valor do otimizador θ^* em aproximadamente 60 segundos.

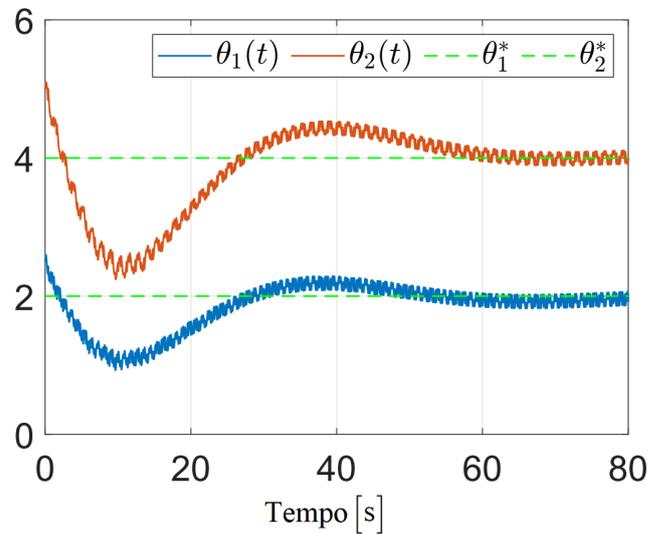


Figura 5. Vetor de controle $\theta(t)$.

A Figura 6 mostra a convergência da entrada da planta $\Theta(t)$ para uma vizinhança do valor do otimizador Θ^* em cerca de 60 segundos.

Conseqüentemente, a saída $y(t)$ atinge a vizinhança do mínimo desejado Q^* enquanto a estimativa do gradiente $\hat{G}(t)$ se aproxima da origem, veja a Figura 7 e a Figura 8.

A Figura 9 ilustra o atraso variante no tempo $h(t)$ equivalente.

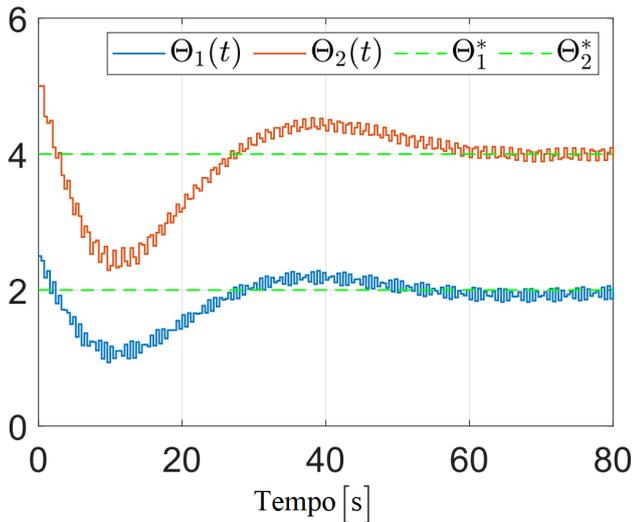


Figura 6. Entrada da planta $\Theta(t)$.

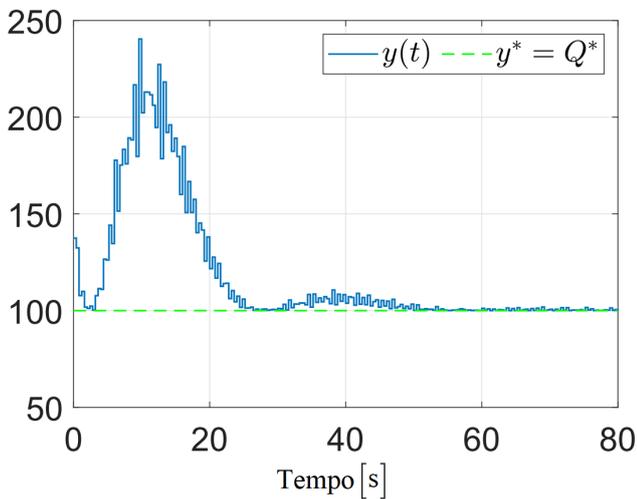


Figura 7. Saída $y(t)$.

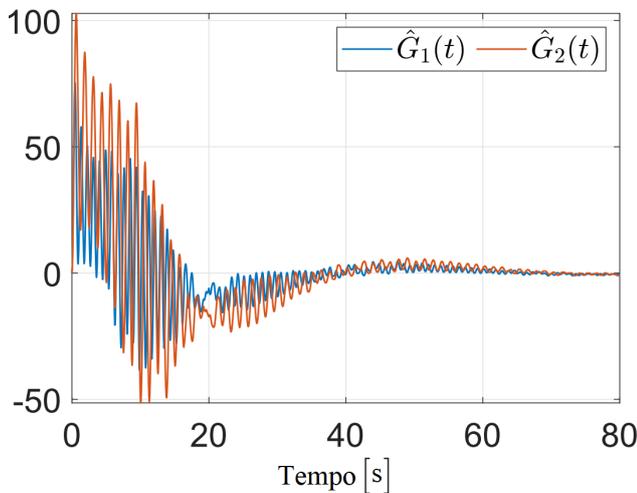


Figura 8. Gradiente estimado $\hat{G}(t)$.

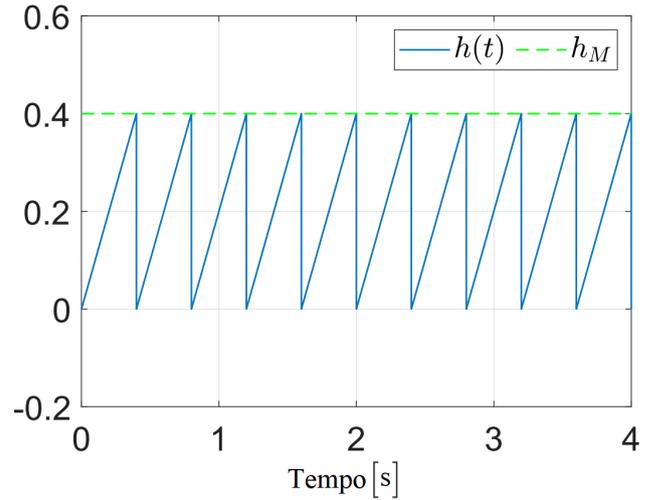


Figura 9. Atraso variante no tempo $h(t)$.

4. CONCLUSÃO

Um controlador extremal em rede com dados amostrados foi originalmente proposto para uma planta multivariável estática e não-linear com intervalos de amostragem variáveis. A estratégia utilizada permite alcançar a convergência em tempo finito a uma vizinhança do valor ótimo desconhecido.

Conseqüentemente, a abordagem resultante garante convergência da saída do sistema controlado para uma pequena vizinhança do extremo (máximo ou mínimo). Usando a estratégia de controle extremal baseada em rede com dados amostrados e a estimativa do gradiente se aproxima da origem.

Conclui-se que é possível realizar controle extremal em um sistema em rede com dados amostrados, conforme simulação apresentada, permitindo-se ampliar os estudos neste ramo como forma de aprimorar as técnicas de controle extremal.

REFERÊNCIAS

- Ariyur, K.B. and Krstić, M. (2003). *Real time optimization by extremum seeking control*. Wiley.
- Dochain, D., Perrier, M., and Guay, M. (2011). Extremum seeking control and its application to process and reaction systems: A survey. *Mathematics and Computers in Simulation, 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, 82(3), 369–380.
- Fridman, E., Z.J. (2020). Averaging of linear systems with almost periodic coefficients: A time-delay approach. *Automatica*, 122(1).
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Birkhauser, Switzerland.
- Frihauf, P., Krstić, M., and Basar, T. (2013). Finite-horizon lq control for unknown discrete-time linear systems via extremum seeking. *European Journal of Control*, 19(5), 399–407.
- Grushkovskaya, V., Zuyev, A., and Ebenbauer, C. (2018). On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*, 94, 151–160.

K. Liu, E.F. and Xia, Y. (2020). *Networked Control Under Communication Constraints: A Time-Delay Approach*. Springer, Singapore.

Khong, S.Z., Nesić, D., Tan, Y., and Manzie, C. (2013). Unified frameworks for sampled-data extremum seeking control: Global optimisation and multi-unit systems. *Automatica*, 49(9), 2720–2733.

Krstic, M. (2014). Extremum seeking control. *Encyclopedia of Systems and Control*, 1.

Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1911–1926.

Ren, B., Frihauf, P., Rafac, R.J., and Krstić, M. (2012). Laser pulse shaping via extremum seeking. *Control Engineering Practice*, 20(7), 674–683.

Wang, H.H., Yeung, S., and Krstić, M. (1999). Experimental application of extremum seeking on an axial-flow compressor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2), 300–309.

Zhang, C., O.R. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Springer-Verlag London Limited, London.

Apêndice A. TEORIA DA MÉDIA DE SISTEMAS COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

Considere o sistema de variação rápida com um atraso variante no tempo $h(t)$:

$$\dot{x}(t) = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t) + A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t-h(t)), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.1})$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A, A_d : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ são contínuos por partes e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno. O atraso $h(t)$ deve ser limitado

$$0 \leq h(t) \leq h_M \quad (\text{A.2})$$

e de variação rápida (sem qualquer restrição na derivada de atraso). A condição inicial do sistema (A.1) é dada por $x(\theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h_M, 0]$ com $\phi \in C[-h_M, 0]$.

As seguintes hipóteses são consideradas para o sistema:

(H1) Existe $\tau_1 \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds &= A_{av} + \Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \\ \|\Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\| &\leq \sigma, \quad \forall \frac{t}{\varepsilon} \geq \tau_1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

com uma matriz constante Hurwitz A_{av} e uma constante pequena o suficiente $\sigma > 0$.

(H2) Todas as entradas $a_{kv}(\tau)$ de $A(\tau)$ são uniformemente limitadas para $\tau \geq 0$ com os valores de alguns intervalos finitos $a_{kv}(\tau) \in [a_{kv}^m, a_{kv}^M]$ para $\tau \geq \tau_1 \geq 1$.

Sob (H2), $A(\tau)$ pode ser apresentado como uma combinação convexa das matrizes constantes A_i com as entradas a_{kv}^m ou a_{kv}^M :

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \sum_{i=1}^N f_i(\tau)A_i, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1, \\ f_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^N f_i = 1, \quad 1 \leq N \leq 2^{n^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Observe que $f_i \neq 0$. Para constantes a_{kv} , tem-se $a_{kv}^m = a_{kv}^M$.

(H3) Existe $\tau_1 \geq 1$ tal que (A.3) é válida e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t A_d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds &= A_{dav} + \Delta A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \\ \|\Delta A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\| &\leq \sigma_d, \quad \forall \frac{t}{\varepsilon} \geq \tau_1, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde $\sigma_d > 0$ é uma constante suficientemente pequena. Além disso, a matriz $A_{av} + A_{dav}$ é Hurwitz.

(H4) Considere que (H2) seja mantida e que todas as entradas $a_{dkv}(\tau)$ de $A_d(\tau)$ sejam uniformemente limitadas para $\tau \geq 0$ com os valores de alguns intervalos finitos $a_{dkv}(\tau) \in [a_{dkv}^m, a_{dkv}^M]$ para $\tau \geq \tau_1 \geq 1$.

De (H4), (A.5) é verificada e $A_d(\tau)$ pode ser apresentada como uma combinação convexa das matrizes constantes A_{dj} com as entradas a_{dkv}^m ou a_{dkv}^M :

$$\begin{aligned} A_d(\tau) &= \sum_{j=1}^{N_d} f_{dj}(\tau)A_{dj}, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1, \\ f_{dj} &\geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N_d} f_{dj} = 1, \quad 1 \leq N_d \leq 2^{n^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para uma constante a_{dkv} , tem-se $a_{dkv}^m = a_{dkv}^M$.

A partir de (A.4) e (A.6), o sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left[A_{av} + \Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] x(t) - \int_0^1 A\left(\frac{t}{\varepsilon} - \theta\right) \\ &\quad - \int_{t-\varepsilon\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left[A_{av} + A_{dav} + \Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \Delta A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] x(t) \\ &\quad - \int_0^1 A\left(\frac{t}{\varepsilon} - \theta\right) \int_{t-\varepsilon\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta \\ &\quad - \int_0^1 A_d\left(\frac{t}{\varepsilon} - \theta\right) \int_{t-\varepsilon\theta-h(t-\varepsilon\theta)}^t \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Teorema A Suponha que (H3) e (H4) sejam satisfeitas. Dadas as matrizes A_{av}, A_{dav}, A_i ($i = 1, \dots, N$), A_{dj} ($j = 1, \dots, N_d$) e constantes $\sigma > 0, \sigma_d > 0, \alpha > 0, \varepsilon^* > 0$ e $h_M > 0$, existem matrizes $P > 0, R > 0, H_i > 0$ ($i = 1, \dots, N$), $Q_j > 0$ ($j = 1, \dots, N_d$), $S_1 > 0, R_1 > 0, U$ e escalares $\lambda > 0, \lambda_d > 0$ que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} R_1 & U \\ * & R_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Theta_{ij} \\ * & \Theta_2 \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_d. \quad (\text{A.10})$$

A matriz Ω é simétrica composta por

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= P(A_{av} + A_{dav}) + (A_{av} + A_{dav})^T P + \\ & \quad 2\alpha P + \lambda\sigma^2 I_n + \lambda_d \sigma_d^2 I_n + S_1 - \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} R_1, \\ \Omega_{12} &= -(A_{av} + A_{dav})^T P - 2\alpha P, \\ \Omega_{13} &= -\Omega_{23} = -P[A_1, \dots, A_N], \\ \Omega_{14} &= \Omega_{18} = -\Omega_{24} = -\Omega_{28} = P, \\ \Omega_{15} &= \Omega_{56} = \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} (R_1 - U), \\ \Omega_{16} &= \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} U, \\ \Omega_{17} &= -\Omega_{27} = -P[A_{d1}, \dots, A_{dN_d}], \\ \Omega_{22} &= -\frac{4}{\varepsilon^*} e^{-2\alpha\varepsilon^*} R + 2\alpha P, \\ \\ \Omega_{33} &= -2e^{-2\alpha\varepsilon^*} \text{diag} \left[\frac{1}{f_1^*} H_1, \dots, \frac{1}{f_1^*} H_N \right], \\ \Omega_{44} &= -\lambda I_n, \\ \Omega_{55} &= \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} (2R_1 - U - U^T), \\ \Omega_{66} &= -e^{2\alpha h_M} S_1 - \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} R_1, \\ \Omega_{77} &= -2e^{2\alpha(\varepsilon^* + h_M)} \text{diag} \left[\frac{1}{f_1^*} Q_1, \dots, \frac{1}{f_1^*} Q_{N_d} \right], \\ \Omega_{88} &= -\lambda_d I_n, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e outros blocos são matrizes zero com $f_i^*(i = 1, \dots, N)$ e $f_{dj}^*(j = 1, \dots, N_d)$ definido por:

$$\varepsilon^* \int_0^1 \theta f_i(\tau - \theta) d\theta \leq f_i^*, \quad \forall \tau \geq \tau_1, \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^1 (\varepsilon^* \theta + h_M) f_{dj}, \quad \forall \tau \geq \tau_1 + \frac{h_M}{\varepsilon}, \quad (\text{A.13})$$

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon^*} A_i^T \Lambda_1 & \sqrt{h_M} A_i^T \Lambda_2 \\ 0_{(N+2)n, n} & 0_{(N+2)n, n} \\ \sqrt{\varepsilon^*} A_i^T \Lambda_1 & \sqrt{h_M} A_i^T \Lambda_2 \\ 0_{(N_d+2)n, n} & 0_{(N_d+2)n, n} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= -\text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \\ \Lambda_1 &= R + (H_1 + \dots + H_N) + (Q_1 + \dots + Q_{N_d}), \\ \Lambda_2 &= R + 2(Q_1 + \dots + Q_{N_d}), \end{aligned}$$

Então, o sistema (A.1) é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento α para todos $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ e $h(t) \in [0, h_M]$, o que significa que existe $M_0 > 0$ de modo que para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*], h(t) \in [0, h_M]$ as soluções de (A.1) inicializadas por $\varphi \in C[-h_M, 0]$ satisfazem

$$|x(t)|^2 \leq M_0 e^{-2\alpha t} \|\varphi\|_C^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.15})$$

Além disso, se as LMIs (A.9) e (A.10) forem satisfeitas com $\alpha = 0$, então o sistema (A.1) é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento pequena o suficiente $\alpha = \alpha_0 > 0$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ e $h(t) \in [0, h_M]$.

Podemos estender ainda mais esses resultados para uma análise ISS do sistema perturbado

$$\dot{x}(t) = A \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) + A_d \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) x(t-h(t)) + B \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) w(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

(H5) Todas as entradas $b_{kv}(\tau)$ de $B(\tau)$ são uniformemente limitadas para $\tau \geq 0$ com os valores de alguns intervalos finitos $b_{kv}(\tau) \in [b_{kv}^m, b_{kv}^M]$ para $\tau \geq \tau_1 \geq 1$.

Aqui, $B(\tau)$ é tratado como uma matriz de polítopo variável no tempo. Sob (H5), $B(\tau)$ pode ser apresentado como uma combinação convexa das matrizes constantes B_l com as entradas b_{dkv}^m ou b_{dkv}^M .

$$B(\tau) = \sum_{l=1}^{\bar{N}} \bar{f}_l(\tau) B_l, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1,$$

$$\bar{f}_l \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{\bar{N}} \bar{f}_l = 1, \quad 1 \leq \bar{N} \leq 2^{n \times n_w}. \quad (\text{A.17})$$

Teorema B Suponha que (H5) e (H4) sejam verificadas. Dadas as matrizes A_{av}, A_{dav}, A_i ($i = 1, \dots, N$), A_{dj} ($j = 1, \dots, N_d$), B_l ($l = 1, \dots, \bar{N}$), e constantes $\sigma > 0, \sigma_d > 0, \alpha > 0, \varepsilon^* > 0$ e $h_M > 0$, existem matrizes $(n \times n)$, $P > 0, R > 0, H_i > 0$ ($i = 1, \dots, N$), $Q_j > 0$ ($j = 1, \dots, N_d$), $S_1 > 0, R_1 > 0, U$ e escalares $\lambda > 0, \lambda_d > 0$ e $b_l > 0$ ($l = 0, \dots, \bar{N}$) que satisfazem (A.9) e as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \Omega & \hat{\Phi}_{12} \\ * & \hat{\Phi}_{22} \\ * & * \end{bmatrix} \bar{\Theta}_{ijl} \leq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_d, \quad (\text{A.18})$$

$$l = 1, \dots, \bar{N}$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{12} &= [P \ -P \ O_{n, (N+N_d+4)n}]^T [B_1 \ \dots \ B_{\bar{N}} \ O_{n, n_w}], \\ \bar{\Theta}_{ijl} &= \begin{bmatrix} \Theta_{ij} \\ \left[\frac{O_{Nn_w, n} \quad O_{Nn_w, n}}{\left[\sqrt{\varepsilon^*} B_l^T \Lambda_1 \quad \sqrt{\varepsilon^*} B_l^T \Lambda_2 \right]} \right] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde Φ_{22} é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \bar{\Phi}_{12} \\ * & \theta_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{\Phi}_{12} &= [P \ -P \ O_{n, (N+1)n}]^T [B_1 \ \dots \ O_{n, n_w}], \\ \bar{\Phi}_{22} &= -\text{diag}[b_1 I_{n_w}, \dots, b_{\bar{N}} I_{n_w}, b_0 I_{n_w}] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

e $\bar{\Phi}$ é a matriz simétrica composta de (A.11), e $\theta_{ij}, \theta_2, \Lambda_1 e \Lambda_2$ são dados por (A.14). Então, o sistema (A.16) é

ISS para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ e $h(t) \in [0, h_M]$, significando que existe $M_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $h(t) \in [0, h_M]$ e $w(t)$ essencialmente e localmente limitado, as soluções do sistema (A.16) inicializado por $\varphi \in C[h_M, 0]$ satisfaz

$$|x(t)|^2 \leq M_0 e^{-2\alpha t} |x(0)|^2 + \left[M_0 e^{-2\alpha t} + \frac{b_0 + \dots + b_N}{2\alpha c_1} \right] \quad (\text{A.21})$$

com $|x(0)|^2$ alterado por ϕ_c^2 . Além disso, dado $\Delta > 0$, o elipsóide Υ dado por

$$\Upsilon = \left[x \in R^n : |x|^2 \leq \frac{b_0 + \dots + b_N}{2\alpha c_1} \Delta^2 \right] \quad (\text{A.22})$$

é exponencialmente atraente (o que significa que $x(t)$ se aproxima de Υ para $t \rightarrow \infty$ com uma taxa de decaimento α para todo $\phi \in C[h, 0]$ e $w(t)$ essencialmente limitado com $\sup_{t \geq 0} |w(t)| \leq \Delta$. Além disso, se as LMIs (A.9) e (A.18) são factíveis com $\alpha = 0$, então o sistema (A.16) é ISS para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ e (A.10) com $|x(0)|^2$ alterado por $\|\phi\|_c^2$ e mantido com uma taxa de decaimento suficientemente pequena $\alpha = \alpha_0 > 0$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ e $h(t) \in [0, h_M]$.