

Estimação de Atitude em Satélites Utilizando Busca Extremal^{*}

Kurios Iuri P. de M. Queiroz^{*} Samaherni M. Dias^{*}
Aldayr D. de Araújo^{*} Davinson R. F. Santos^{**}
Tiago Roux Oliveira^{***}

^{*} Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN, (e-mails: kurios@dee.ufrn.br, sama@laci.ufrn.br, aldayr@dca.ufrn.br).

^{**} Programa de Pós-graduação em Engenharia Aeroespacial, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN, (e-mail: davinson.rangel.068@ufrn.edu.br)

^{***} Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, (e-mail: tiagoroux@uerj.br)

Abstract: This paper presents a satellite attitude estimation scheme based on the Extremum Seeking (ES) technique. Considering the classical Wahba's problem, the ES optimizes an objective function constructed using measurements from sensors and various known mathematical models. The tested algorithm corresponds to the single variable case and uses a sine function as the periodic perturbation signal. In simulations, the proposed technique returned the ideal parameter, i.e., the one which optimizes the proposed objective function, considering a satellite equipped with five sensors in the presence of noise. Moreover, we obtained the same result using the classical estimation methods, such as the *q-Method* and QUEST (*QUaternion ESTimation*), validating the use of extremum seeking technique to estimate the satellite attitude.

Resumo: Este trabalho apresenta uma estratégia de estimação de atitude em satélites utilizando a técnica de busca extremal. Com base no problema de Wahba, a técnica foi utilizada para otimizar uma função de custo (em termos de quatérnio) construída a partir das medidas dos sensores embarcados e da saída de modelos matemáticos conhecidos. O algoritmo testado corresponde ao caso monovariável e com uso de uma perturbação senoidal. Na etapa de simulações, a técnica foi capaz de obter o parâmetro ideal, ou seja, aquele que otimiza a função de custo proposta, considerando um satélite equipado com cinco sensores e na presença de ruídos de medição. Esse resultado também foi obtido por meio dos métodos clássicos de estimação, como o *q-Method* e o QUEST (*QUaternion ESTimation*), validando assim o uso da técnica de busca extremal na estimação de atitude.

Keywords: Extremum Seeking; Attitude Estimation; Wahba's Problem; Satellites; QUEST.

Palavras-chaves: Busca Extremal; Estimação de Atitude; Problema de Wahba; Satélites; QUEST.

1. INTRODUÇÃO

A estimação de atitude é fundamental em diversas aplicações espaciais (Hur-Diaz et al., 2008; Starin e Eterno, 2011; Lee e Burk, 2019; You, 2018; Bedrossian et al., 2009). A literatura sobre o tema é muito rica e apresenta um grande número de trabalhos, principalmente na área de controle de atitude. Existem várias estratégias disponíveis, desde os conhecidos controladores PIDs (Su e Cai, 2011), Backstepping (Kristiansen et al., 2009), e por modos deslizantes (Zhu et al., 2011), até o uso de controladores geométricos

(Bharadwaj et al., 1996). Nessas abordagens, foram ainda utilizadas diferentes representações de atitude. A solução global e única baseia-se na construção de uma matriz ortonormal (Chaturvedi et al., 2011), também conhecida como *matriz de rotação*¹. Porém, tal matriz requer a utilização de nove parâmetros diferentes, e dessa forma, em muitas aplicações prefere-se uma representação mais simples (apesar de não global ou única), com apenas três ou quatro parâmetros. Dentre elas, podemos destacar os ângulos de Euler, os parâmetros de Rodrigues, e quatérnios (Shuster, 1993).

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, da Fundação Norte-Rio-Grandense de Pesquisa e Cultura (FUNPEC), e do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Centro Regional do Nordeste (CRN).

¹ Dada a sua importância, as matrizes de rotação são classificadas como as "Rainhas da Álgebra Linear" pelo prof. Gilbert Strang (MIT). Para mais detalhes sobre matrizes ortonormais e suas propriedades, acesse <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/>.

No caso da utilização de quatérnios, os algoritmos clássicos para a estimação de atitude com base em três ou mais medidas vetoriais são (Markley, 1998): o *q-Method* de Davenport; e o QUEST, do inglês, *QUaternion ESTimation*. Com uma estrutura simples, eles utilizam a posição orbital do satélite, modelos matemáticos conhecidos (por exemplo, o modelo do campo magnético da Terra e da direção do sol), e medições de sensores embarcados (magnetômetros e sensores solares) na estimação da atitude. Uma alternativa mais complexa envolve o Filtro de Kalman Estendido, ou do inglês, *Extended Kalman Filter-EKF* (Grewal e Andrews, 2010). Além da atitude, esse filtro é capaz de estimar a velocidade angular, mas requer a inclusão dos modelos dinâmico e cinemático do sistema, bem como o cálculo da matriz de covariância e da inversa de uma matriz, o que nem sempre é viável ou trivial.

O objetivo deste trabalho é propor uma nova estratégia de estimação de atitude (em quatérnio) baseada na otimização em tempo real por busca extremal, ou do inglês, *Extremum Seeking, ES* (Ariyur e Krstić, 2003). Os primeiros registros desta técnica surgiram na década de 20, quando Leblanc (1922) apresentou o primeiro controlador “adaptativo” reportado na literatura, segundo Ariyur e Krstić (2003). Apesar de um bom desempenho, e do sucesso nas décadas de 50 e 60, a técnica ficou adormecida até que Krstić e Wang (2000) apresentaram uma prova rigorosa de estabilidade. Desde então, diversos trabalhos (aplicados e teóricos) foram desenvolvidos, com destaque para (Yu e Ozguner, 2002), (Brunton et al., 2009), (Oliveira et al., 2017), (Rušiti et al., 2019), e (Rušiti et al., 2021). Nestes três últimos, os autores apresentaram resultados para a técnica de busca extremal na presença de atrasos, o que pode ser muito útil na estimação de atitude baseada em *ES* considerando-se atrasos de medição.

A investigação da técnica de busca extremal na estimação de atitude está inserida no contexto do projeto CONASAT. A principal demanda desse projeto é conceber uma constelação de nanossatélites (satélites com massa inferior a 10kg) para o monitoramento ambiental brasileiro, dando suporte ao Sistema Integrado de Dados Ambientais (SINDA). Por meio do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) e da AEB (Agência Espacial Brasileira), em parceria com várias universidades brasileiras, o governo brasileiro passou a investir no desenvolvimento e lançamento de nanossatélites. Uma das frentes de trabalho do projeto CONASAT corresponde ao desenvolvimento de algoritmos para a determinação e controle de atitude em nanossatélites.

Este artigo está organizado da seguinte forma: o problema clássico de estimação de atitude é apresentado na Seção 2 (mais conhecido como Problema de Wahba, ou do inglês, *Wahba’s Problem*); a estimação de atitude baseada na técnica de busca extremal é apresentada na Seção 3; os resultados de simulação são apresentados na Seção 4; e, por fim, algumas conclusões e considerações finais são apresentadas na Seção 5.

2. O PROBLEMA DE WAHBA

Considere a existência de dois sistemas de coordenadas diferentes, um deles fixo na Terra, chamado de \mathcal{F}_E , e outro fixo no corpo de um satélite, \mathcal{F}_b . A atitude (orientação)

do satélite pode ser definida como a orientação de \mathcal{F}_b em relação a \mathcal{F}_E , sendo representada de forma global e única por meio de uma matriz de rotação, $\mathbf{C}_{bE} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Essa matriz é capaz de converter as coordenadas $\mathbf{s}_E \in \mathbb{R}^3$ de um dado vetor físico (o campo magnético da Terra, por exemplo), expressas em \mathcal{F}_E , para o referencial \mathcal{F}_b . Além disso, utilizando-se a propriedade básica das matrizes de rotação, em que $\mathbf{C}_{bE}^{-1} = \mathbf{C}_{bE}^T = \mathbf{C}_{Eb}$, é possível ainda realizar a conversão no sentido inverso, ou seja, de \mathcal{F}_b para \mathcal{F}_E . Dessa forma, conhecer a matriz de rotação é conhecer a atitude de um dado satélite.

Na busca de soluções para estimar a matriz de rotação, a Dra. Wahba (1965), uma funcionária da IBM em Palo Alto, Califórnia, apresentou um problema de otimização na determinação de atitude em satélites. O desafio proposto era encontrar a matriz de rotação \mathbf{C}_{bE} capaz de minimizar a função de custo,

$$J(\mathbf{C}_{bE}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k (\hat{\mathbf{s}}_{bk} - \mathbf{C}_{bE} \hat{\mathbf{s}}_{Ek})^T (\hat{\mathbf{s}}_{bk} - \mathbf{C}_{bE} \hat{\mathbf{s}}_{Ek}), \quad (1)$$

sob a restrição,

$$\mathbf{C}_{bE}^T \mathbf{C}_{bE} = \mathbf{1}, \quad (2)$$

onde N corresponde à quantidade de sensores (ou conjunto de sensores) embarcados no satélite, sendo um para cada vetor físico; $w_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, N$) correspondem aos pesos de cada medida; $\hat{\mathbf{s}}_{bk} \in \mathbb{R}^3$ e $\hat{\mathbf{s}}_{Ek} \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas em \mathcal{F}_b e \mathcal{F}_E , respectivamente, para cada vetor físico normalizado k ; e $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ corresponde à matriz identidade. A ideia básica por trás desse desafio é minimizar o erro \mathbf{e}_k entre duas coordenadas associadas ao mesmo vetor físico k , no referencial \mathcal{F}_b , porém obtidas de formas diferentes: i) por meio de sensores embarcados no satélite que fornecem $\hat{\mathbf{s}}_{bk}$; ii) por meio da conversão de $\hat{\mathbf{s}}_{Ek}$ utilizando a matriz de rotação \mathbf{C}_{bE} . É interessante ressaltar que as coordenadas $\hat{\mathbf{s}}_{Ek}$ são calculadas com uso de modelos matemáticos conhecidos, como o modelo IGRF-12 do campo magnético da Terra (Thébault et al., 2015), por exemplo. Então, para minimizar \mathbf{e}_k ($k = 1, \dots, N$), devemos encontrar (ou ajustar) os elementos de \mathbf{C}_{bE} para que a função de custo (1) alcance o seu valor mínimo, garantindo ainda a ortogonalidade da matriz de rotação por meio da restrição (2).

Apesar de ausentes na proposição original de Wahba (1965), os pesos $w_k > 0$ foram introduzidos em vários trabalhos subsequentes, dentre eles (de Ruiter et al., 2012), com o objetivo de priorizar algumas medidas em relação a outras. Por exemplo, as medidas de um sensor de estrelas são mais confiáveis (apresentam uma baixa variância) quando comparadas às medidas de um magnetômetro, dado o excessivo ruído presente nas medições do campo magnético da Terra². Sendo assim, podemos ajustar os pesos para dar uma maior ênfase ao primeiro sensor, em relação ao segundo. Uma escolha muito comum é utilizar

$$w_k = \frac{1}{\sigma_k^2}, \quad (3)$$

onde σ_k^2 corresponde à variância do sensor k .

² Em pequenos satélites, em virtude do espaço reduzido, a própria operação dos componentes eletro-eletrônicos pode atrapalhar nas medições dos magnetômetros.

2.1 Soluções Clássicas

Ao longo dos anos, diversas soluções para o problema de Wahba foram propostas, com destaque para os trabalhos de Davenport (1968), Shuster (1978), e suas variações. Neles, o problema de minimização da função de custo (1) foi convertido em um problema de maximização da seguinte função

$$\hat{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (4)$$

sob a restrição

$$\hat{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1, \quad (5)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$ corresponde à atitude do satélite em quatérnio, e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é uma matriz simétrica definida como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{12}^T & k_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo formada pelas seguintes submatrizes

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T - k_{22} \mathbf{1} = \mathbf{K}_{11}^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{B}^T = \sum_{k=1}^N w_k \hat{\mathbf{s}}_{Ek} \hat{\mathbf{s}}_{bk}^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{k}_{12} = [b_{23} - b_{32}, b_{31} - b_{13}, b_{12} - b_{21}]^T, \quad (9)$$

$$k_{22} = \text{tr}[\mathbf{B}^T], \quad (10)$$

em que b_{ij} corresponde ao elemento posicionado na linha i , coluna j , da matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, e $\text{tr}[\cdot]$ é a operação de traço de uma matriz. Para resolver este novo problema, Davenport utilizou o método de maximização de funções sob restrições conhecido como multiplicadores de *Lagrange* (Stewart, 2011). Este método consiste em encontrar \mathbf{q} que maximiza a função (4), sob a restrição (5), sabendo que nos pontos de interesse, os vetores gradiente das funções \hat{J} e \hat{g} são paralelos³, ou seja,

$$\nabla \hat{J} = \lambda \nabla \hat{g}, \quad (11)$$

para algum escalar λ (chamado de multiplicador de *Lagrange*). Obtendo-se as derivadas parciais de (4) e (5) em relação a \mathbf{q} (ou a cada componente de \mathbf{q}), temos

$$2\mathbf{q}^T \mathbf{K} = 2\lambda \mathbf{q}^T, \quad (12)$$

ou ainda

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \lambda \mathbf{q}. \quad (13)$$

Com base em (13), o valor máximo da função (4) é obtido para um dos quatro autovetores da matriz \mathbf{K} . Substituindo (13) em (4), e depois utilizando (5), obtemos

$$\hat{J}(\mathbf{q}) = \lambda. \quad (14)$$

O resultado (14) acima nos diz que o valor de \mathbf{q} que maximiza a função (4), sob a restrição (5), corresponde ao autovetor associado ao maior autovalor λ^* da matriz \mathbf{K} . Sendo assim, o problema de estimação de atitude foi reduzido a um problema de autovalores e autovetores. Apesar de útil, a solução de Davenport (chamada de *q-Method*) apresenta algumas dificuldades de ordem prática. Em sistemas embarcados que operam no espaço, o cálculo de autovalores e autovetores não é uma tarefa trivial. Então, Shuster (1978) desenvolveu uma nova solução, também baseada em (13), conhecida como QUEST (*QUaternion ESTimation*). Nela, a busca de autovalores da matriz \mathbf{K} foi convertida no cálculo das raízes da seguinte equação polinomial

$$\lambda^4 - (a + b)\lambda^2 - c\lambda + (ab + ck_{22} - d) = 0, \quad (15)$$

³ Considere ainda que $\nabla g \neq \mathbf{0}$.

com

$$a = k_{22}^2 - \text{tr}[\text{adj}(\mathbf{S})], \quad (16)$$

$$b = k_{22}^2 + \mathbf{k}_{12}^T \mathbf{k}_{12}, \quad (17)$$

$$c = \det[\mathbf{S}] + \mathbf{k}_{12}^T \mathbf{S} \mathbf{k}_{12}, \quad (18)$$

$$d = \mathbf{k}_{12}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{k}_{12}, \quad (19)$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ é uma matriz simétrica, $\text{adj}[\cdot]$ corresponde à operação que fornece a matriz adjunta de uma dada matriz, e $\det[\cdot]$ corresponde à operação que fornece o determinante de uma matriz. As raízes de (15) podem ser encontradas iterativamente por meio do método clássico de Newton (Burden e Faires, 2004). Porém, como apenas uma delas nos interessa, Shuster demonstrou que a raiz desejada λ^* está localizada bem próxima a

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^N w_k. \quad (20)$$

Uma vez especificado λ_0 (valor inicial) e uma tolerância admissível ε_{tol} (condição de parada), o método de Newton é capaz de fornecer o valor aproximado de λ^* que estamos buscando. Adicionalmente, segundo Shuster (1978), o quatérnio associado a um dado λ é obtido com base na expressão

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{x}}} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

sendo

$$\mathbf{x} = (\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{S} + \mathbf{S}^2) \mathbf{k}_{12}, \quad (22)$$

$$\alpha = \lambda^2 - k_{22}^2 + \text{tr}[\text{adj}(\mathbf{S})], \quad (23)$$

$$\beta = \lambda - k_{22}, \quad (24)$$

$$\gamma = (\lambda + k_{22}) \alpha - \det[\mathbf{S}]. \quad (25)$$

Definindo ainda $\mathbf{q} = [\boldsymbol{\epsilon}, \eta]^T$, onde $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^3$ e $\eta \in \mathbb{R}$ são a parte vetorial e escalar do quatérnio, respectivamente, a matriz de rotação estimada pode ser obtida como (de Ruiter et al., 2012),

$$\mathbf{C}_{bE} = (\eta^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T - 2\eta \boldsymbol{\epsilon}^\times, \quad (26)$$

onde

$$\boldsymbol{\epsilon}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

3. ESTIMAÇÃO DE ATITUDE VIA BUSCA EXTREMAL

Além do algoritmo QUEST, uma das contribuições de Shuster (1978) foi a relação entre o parâmetro λ e o quatérnio \mathbf{q} por meio das equações (21)-(25). Para cada valor de λ , existe um quatérnio \mathbf{q} associado, assim como um valor $\hat{J}(\mathbf{q})$ referente à função de custo (4). Neste contexto, sabendo da relação λ - \mathbf{q} , vamos utilizar a técnica de busca extremal para maximizar a função (4), ajustando apenas o parâmetro λ . A função de custo aqui será considerada um mapa estático, uma vez que a matriz \mathbf{K} é constante no intervalo de medição e cálculo da atitude⁴. A otimização por busca extremal é adaptativa e livre de equações do sistema, pois não requer o modelo dinâmico e nem cinemático do satélite, e ainda pode se adaptar a mudanças lentas no ponto máximo da função de custo (Krstić e Wang, 2000).

⁴ Nesse intervalo, note que as medidas dos sensores $\hat{\mathbf{s}}_{bk}$ e as saídas dos modelos matemáticos $\hat{\mathbf{s}}_{Ek}$ não mudam.

Existem vários algoritmos de busca extremal disponíveis na literatura. Vamos utilizar a versão clássica, no caso monovariável, com perturbação determinística (periódica) descrita em (Krstić e Wang, 2000) e apresentada na Figura 1. Nessa versão, a técnica de busca extremal consiste em perturbar o parâmetro λ , por meio de uma senoide, com o objetivo de extrair uma estimativa do gradiente da função de custo \hat{J} . Dessa forma, considere

$$\lambda = \hat{\lambda} + a \sin(\omega t), \quad (28)$$

onde $a, \omega \in \mathbb{R}$ são a amplitude e frequência (em rad/s) da perturbação, e $\hat{\lambda}$ corresponde a uma estimativa para λ^* . Ao gerar oscilações no parâmetro λ , observamos também oscilações em \hat{J} , que podem estar em fase ou não com a senoide injetada. Porém, antes dessa comparação, a saída da função de custo pode ser filtrada com base em

$$\rho(s) = \frac{s}{s + \omega_n} \hat{J}(s), \quad (29)$$

onde s representa a variável complexa associada à transformada de Laplace, $\rho(s)$ é a saída do filtro, e $\omega_n \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva menor do que ω em (28). A ideia básica de (29) é atuar como um filtro passa-alta, excluindo a componente DC do sinal \hat{J} . Embora não obrigatória⁵, a presença de (29) contribui para um bom desempenho da técnica. Após a filtragem, a etapa de comparação é realizada por meio de um multiplicador, resultando em

$$\xi(t) = \rho(t) a \sin(\omega t). \quad (30)$$

Também chamado de sinal demodulado (ou do inglês, *demodulated signal*), o sinal (30) pode apresentar a sua área sob a curva predominantemente positiva ou negativa. No primeiro caso, observa-se que o sentido das oscilações em λ é o mesmo das oscilações em \hat{J} . Então, quando λ cresce, a função de custo também cresce, e vice-versa. Equivalentemente, o sinal $\rho(t)$ está em fase com a perturbação injetada, o que indica que $\hat{\lambda} < \lambda^*$, ou seja, que é necessário aumentar o valor da estimativa. No segundo caso, quando $\xi(t)$ tem área predominantemente negativa, ocorre a situação inversa. As oscilações em λ e \hat{J} apresentam sentidos diferentes, ou ainda, $\rho(t)$ não está em fase com a perturbação de entrada, indicando que $\hat{\lambda} > \lambda^*$. Nesse caso, é preciso diminuir o valor de $\hat{\lambda}$. Em ambos, a amplitude das oscilações em $\rho(t)$ depende da proximidade de $\hat{\lambda}$ em relação ao seu valor ideal λ^* . Quanto mais distante, maiores serão as oscilações, e quanto mais próximo, menores. Sendo assim, quando $\hat{\lambda} \approx \lambda^*$, teremos um erro residual com pequenas oscilações em torno de λ^* . Por fim, o sinal ξ vai direcionar os ajustes em $\hat{\lambda}$ por meio da expressão

$$\hat{\lambda}(s) = \frac{k_i}{s} \xi(s), \quad (31)$$

onde $k_i \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva⁶, cuja função é atuar na velocidade de convergência e adaptação do algoritmo. A partir de (30), esse papel também pode ser desempenhado pelo parâmetro a em (28). Porém, quanto maior o valor de a , maior será o erro residual⁷. Aplicando-se (Krstić e Wang, 2000)[Teorema 5.2], podemos concluir que

⁵ Se $\omega_n = 0$, a frequência do sinal de entrada ω deve ser aumentada.

⁶ No caso de minimização de funções, esse ganho deve ser negativo.

⁷ A redução do parâmetro a (na tentativa de diminuir o erro residual) pode resultar na obtenção de um máximo local, ao invés de global.

$$|\lambda(t) - \lambda^*| \leq |\lambda(0) - \lambda^*| e^{\alpha t} + O(\omega + a), \quad \forall t \geq 0, \quad (32)$$

onde $O(\omega + a)$ corresponde a uma constante positiva que representa a vizinhança em torno do valor ideal λ^* , $\alpha = k_i J'' a^2 / 2$, e $J'' = \partial^2 \hat{J}(\lambda) / \partial \lambda^2 \Big|_{\lambda=\lambda^*} < 0$.

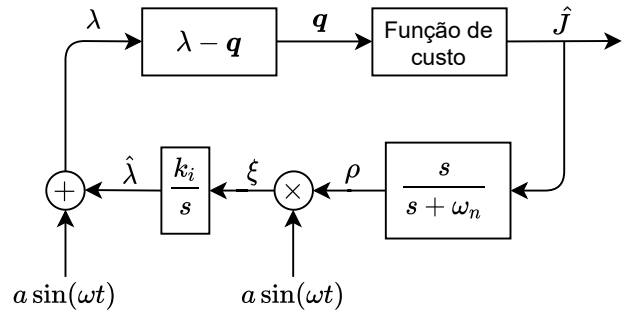


Figura 1. Diagrama de blocos da técnica de busca extremal na estimação de atitude.

4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, alguns resultados de simulação para a técnica de busca extremal são apresentados para um satélite equipado com cinco sensores (ou conjunto de sensores), um para cada vetor físico diferente. O exemplo proposto aqui é o mesmo descrito em (de Ruiter et al., 2012). Nele, deseja-se estimar a matriz C_{bE} , sob a restrição (2), sendo fornecidas as medidas dos sensores \hat{s}_{bk} , as saídas dos modelos matemáticos conhecidos \hat{s}_{Ek} , e as características de cada sensor σ_k (desvio padrão). Dessa forma, considere a seguinte matriz de rotação,

$$C_{bE} = \begin{bmatrix} 0,4330 & 0,4356 & 0,7891 \\ -0,7500 & 0,6597 & 0,0474 \\ -0,5000 & -0,6124 & 0,6124 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

as medições

$$\hat{s}_{b1} = \begin{bmatrix} 0,9082 \\ 0,3185 \\ 0,2715 \end{bmatrix}, \hat{s}_{b2} = \begin{bmatrix} 0,5670 \\ 0,3732 \\ -0,7343 \end{bmatrix},$$

$$\hat{s}_{b3} = \begin{bmatrix} -0,2821 \\ 0,7163 \\ 0,6382 \end{bmatrix}, \hat{s}_{b4} = \begin{bmatrix} 0,7510 \\ -0,3303 \\ 0,5718 \end{bmatrix},$$

$$\hat{s}_{b5} = \begin{bmatrix} 0,9261 \\ -0,2053 \\ -0,3166 \end{bmatrix},$$

e as saídas

$$\hat{s}_{E1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4472 \\ 0,8944 \end{bmatrix}, \hat{s}_{E2} = \begin{bmatrix} 0,3162 \\ 0,9487 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{s}_{E3} = \begin{bmatrix} -0,9806 \\ 0 \\ 0,1961 \end{bmatrix}, \hat{s}_{E4} = \begin{bmatrix} 0,2357 \\ -0,2357 \\ 0,9428 \end{bmatrix},$$

$$\hat{s}_{E5} = \begin{bmatrix} 0,5774 \\ 0,5774 \\ 0,5774 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda os parâmetros, $\sigma_1 = 0,0100$, $\sigma_2 = 0,0325$, $\sigma_3 = 0,0550$, $\sigma_4 = 0,0775$, e $\sigma_5 = 0,1000$. Nos métodos clássicos, o primeiro passo para estimar (33) é obter

$$\lambda^* = 1,1542 \cdot 10^4, \quad (34)$$

seja por meio de (13), no caso da solução de Davenport (*q-Method*), ou por meio de (15), no caso da solução de Shuster (QUEST). Neste último, o valor inicial para o método de Newton é dado por

$$\lambda_0 = 1,1544 \cdot 10^4. \quad (35)$$

Esse valor inicial para a raiz λ^* foi calculado com base nas equações (3) e (20). Uma vez conhecido o autovalor desejado (34), podemos encontrar o quatérnio associado a ele utilizando-se (21)-(25). Por fim, a matriz de rotação estimada pode ser obtida a partir da expressão (26), fornecendo

$$\hat{C}_{bE} = \begin{bmatrix} 0,4153 & 0,4473 & 0,7921 \\ -0,7562 & 0,6537 & 0,0274 \\ -0,5056 & -0,6104 & 0,6097 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Agora, considere a técnica de busca extremal na estimação da matriz de rotação (33). A Figura 2 apresenta o desempenho da estratégia proposta, onde

$$\tilde{\lambda} = \lambda^* - \hat{\lambda} \quad (37)$$

corresponde ao erro de estimação em relação ao valor ideal λ^* (34), sendo esse assumido desconhecido pela técnica de busca extremal. Os parâmetros utilizados foram $\hat{\lambda}(0) = \lambda_0$, $a = 5$, $\omega = 700$, $\omega_n = 70$, e $k_i = 10^4$. O método de integração numérica foi o método de Euler, com um passo $h = 10^{-4}$ segundos. As Figuras 3(a), 3(b), e 4 apresentam, respectivamente, o parâmetro perturbado $\lambda(t)$ (linha sólida) e o valor ideal λ^* (linha pontilhada), a função de custo $\hat{J}(t)$, e o sinal demodulado $\xi(t)$. Note que o sinal $\xi(t)$ tem área sob a curva predominantemente negativa, pois $\hat{\lambda} > \lambda^*$ durante todo o transitório. Com base nos resultados, o parâmetro estimado convergiu para uma região em torno do valor ideal λ^* .

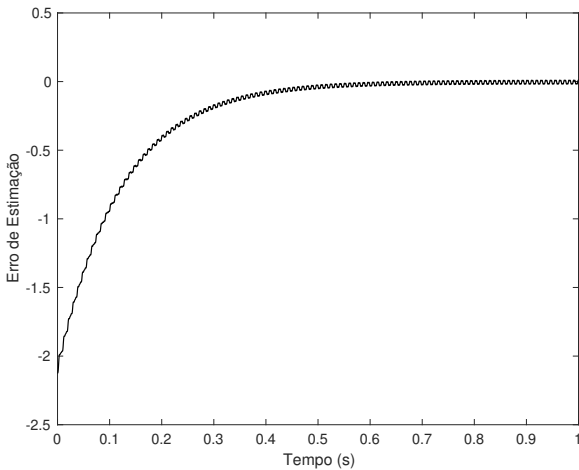


Figura 2. Erro de estimação referente à técnica de busca extremal na estimação de atitude.

Apesar de evitar o cálculo de autovalores e autovetores *on-line* (vantagem sobre o *q-Method*), a técnica de busca extremal (ES) apresenta uma pequena desvantagem. O quatérnio \mathbf{q} em (21) é calculado recorrentemente, enquanto

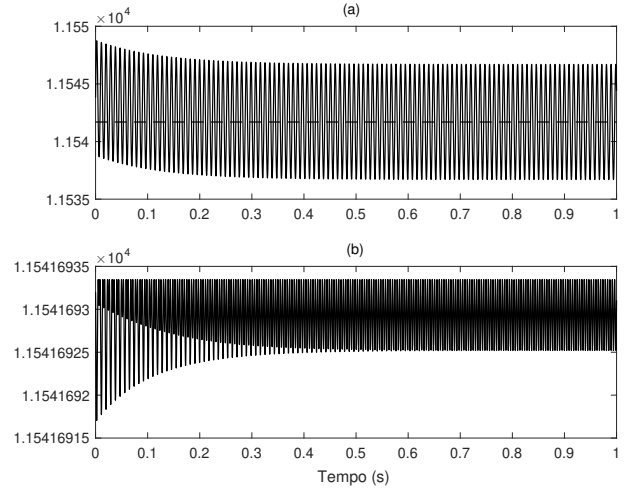


Figura 3. (a) Parâmetro perturbado $\lambda(t)$ (linha sólida) e o valor ideal λ^* para o parâmetro desconhecido (linha tracejada); (b) Função de custo $\hat{J}(t)$ utilizada na busca extremal.

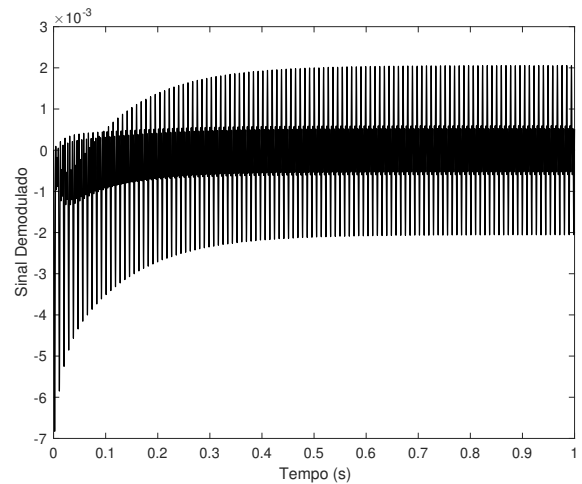


Figura 4. Sinal demodulado $\xi(t)$ referente à técnica de busca extremal.

que no método QUEST, ele é obtido uma única vez, logo após o término da busca das raízes em (15). A técnica aparenta ainda ter mais elementos: um integrador, um multiplicador, e um filtro passa-alta (opcional). Entretanto, além de simples, a estrutura proposta na Figura 1 pode ser adaptada futuramente para lidar com atrasos de medição a partir dos trabalhos de Oliveira et al. (2017), Rušiti et al. (2019) e Rušiti et al. (2021). A estimação e controle de atitude na presença de atrasos é inevitável em situações práticas, porém ainda pouco abordada na literatura. Além de observado em alguns sensores, tais atrasos podem surgir no cálculo da posição do satélite em órbita, informação fundamental para se obter a saída de alguns modelos matemáticos conhecidos. Dessa forma, dada a perspectiva futura de considerar atrasos de medição, a busca extremal apresenta-se como uma técnica promissora na estimação de atitude em satélites.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma proposta de estimação de atitude em satélites baseada na otimização em tempo real por busca extremal foi apresentada. Com uma nova solução para o problema de Wahba, a técnica proposta evita a busca de autovalores e autovetores (vantagem sobre o *q-Method*), mas requer um número maior de operações matemáticas em relação ao método QUEST. Os resultados de simulação validaram a estratégia proposta, uma vez que a atitude estimada é a mesma fornecida pelos métodos tradicionais (*q-Method* e QUEST). Numa perspectiva futura, a técnica de busca extremal na estimação de atitude utilizará uma perturbação estocástica e será adaptada para considerar atrasos de medição. Por fim, este trabalho representa o primeiro passo na construção de uma nova estratégia de estimação de atitude que seja adaptativa, livre dos modelos cinemático e dinâmico do sistema, e que ainda considere a presença de atrasos nas medições.

REFERÊNCIAS

- Ariyur, K.B. e Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. John Wiley and Sons, Upper Saddle River, NJ.
- Bedrossian, N.S., Bhatt, S., Kang, W., e Ross, I.M. (2009). Zero-propellant maneuver guidance. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(5), 53–73.
- Bharadwaj, S., Osipchuk, M., Mease, K., e Park, F. (1996). A geometric approach to global attitude stabilization. In *Astrodynamics Specialist Conference*, 806–816.
- Brunton, S.L., Rowley, C.W., Kulkarni, S.R., e Clarkson, C. (2009). Maximum power point tracking for photovoltaic optimization using extremum seeking. In *2009 34th IEEE Photovoltaic Specialists Conference (PVSC)*, 000013–000016.
- Burden, R. e Faires, J. (2004). *Numerical Analysis*. Available Titles CengageNOW Series. Cengage Learning. URL <https://books.google.com.br/books?id=wmcL0y2avuUC>.
- Chaturvedi, N.A., Sanyal, A.K., e McClamroch, N.H. (2011). Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(3), 30–51.
- Davenport, P.B. (1968). A vector approach to the algebra of rotations with applications. Technical report, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, United States.
- de Ruiter, A.H., Damaren, C., e Forbes, J.R. (2012). *Spacecraft Dynamics and Control: An Introduction*. Wiley.
- Grewal, M.S. e Andrews, A.P. (2010). Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives]. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(3), 69–78.
- Hur-Diaz, S., Wirzburger, J., e Smith, D. (2008). Three axis control of the hubble space telescope using two reaction wheels and magnetic torquer bars for science observations. In *F. Landis Markley Astronautics Symposium*, 1–16.
- Kristiansen, R., Nicklasson, P.J., e Gravdahl, J.T. (2009). Satellite attitude control by quaternion-based backstepping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(1), 227–232.
- Krstić, M. e Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4), 595 – 601.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*.
- Lee, A.Y. e Burk, T.A. (2019). Cassini spacecraft attitude control system performance and lessons learned, 1997–2017. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 56(1), 158–170.
- Markley, F.L. (1998). Attitude determination using two vector measurements. Technical Report 36, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, United States.
- Oliveira, T.R., Krstić, M., e Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1911–1926.
- Rušiti, D., Evangelisti, G., Oliveira, T.R., Gerdt, M., e Krstić, M. (2019). Stochastic extremum seeking for dynamic maps with delays. *IEEE Control Systems Letters*, 3(1), 61–66.
- Rušiti, D., Oliveira, T.R., Krstić, M., e Gerdt, M. (2021). Robustness to delay mismatch in extremum seeking. *European Journal of Control*. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2021.06.029>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S094735802100090X>.
- Shuster, M. (1978). Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. In *Guidance and Control Conference*.
- Shuster, M.D. (1993). A survey of attitude representations. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4), 439–517.
- Starin, S.R. e Eterno, J. (2011). Attitude determination and control systems. Technical Report 36, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, United States.
- Stewart, J. (2011). *Multivariable Calculus*. Cengage Learning.
- Su, J. e Cai, K.Y. (2011). Globally stabilizing proportional-integral-derivative control laws for rigid-body attitude tracking. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(4), 1260–1264.
- Thébault, E., Finlay, C.C., Beggan, C.D., Alken, et al. (2015). International geomagnetic reference field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 67(1), 79. URL <https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9>.
- Wahba, G. (1965). A Least Squares Estimate of Satellite Attitude. *SIAM Review*, 7(3), 409–409. doi:10.1137/1007077.
- You, Z. (2018). Chapter 3 - attitude determination and control system of the micro/nano satellite. In Z. You (ed.), *Space Microsystems and Micro/nano Satellites*, Micro and Nano Technologies, 75–114. Butterworth-Heinemann.
- Yu, H. e Ozguner, U. (2002). Extremum-seeking control strategy for abs system with time delay. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, volume 5, 3753–3758 vol.5.
- Zhu, Z., Xia, Y., e Fu, M. (2011). Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(10), 4898–4907.