

## Identificação de sistema não linear multivariável com modelos *fuzzy* ALMMo de primeira ordem <sup>\*</sup>

Jefferson Georgy de Lima Cavalcante Júnior <sup>\*</sup>  
Selmo Eduardo Rodrigues Júnior <sup>\*\*</sup> Luís Miguel Magalhães Torres <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Graduação em Engenharia Elétrica, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Imperatriz, MA; (e-mail: jefferson.georgy@acad.ifma.edu.br).*

<sup>\*\*</sup> *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Imperatriz, MA; (e-mail: selmo.junior@ifma.edu.br).*

<sup>\*\*\*</sup> *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Imperatriz, MA; (e-mail: luis.torres@ifma.edu.br).*

---

**Abstract:** This research deals with the identification of a non-linear system using evolving fuzzy models of the type ALMMo-1 (First-Order Autonomous Learning Multi-Model System). The system in question is a multivariable system of four coupled tanks, whose inputs are voltage levels at the pumps and the outputs are water levels in the two lower tanks. Using a non-linear white-box model of the system, data were obtained to perform the fuzzy modeling. Modifications are then made in the operating range of the system, so that the fuzzy models can evolve their structure and respond better to inputs at these other operating ranges. All data from the tank system, as well as the learning algorithm process, were obtained and carried out through simulations in MATLAB and Simulink. The developed fuzzy models are capable of evolving autonomously, and are widely able to extract knowledge of the dynamics of the system based only on training data.

**Resumo:** Este trabalho trata da identificação de um sistema não linear com o uso de modelos *fuzzy* evolutivos do tipo ALMMo-1 (Sistema Multi-Modelo de Aprendizagem Autônoma de Primeira Ordem). O sistema em questão é um sistema multivariável de quatro tanques acoplados, cujas entradas são níveis de tensão nas bombas e as saídas são níveis de água nos dois tanques inferiores. Com o uso de um modelo caixa branca não linear do sistema, foram obtidos dados para realizar a modelagem *fuzzy*. São feitas então modificações na faixa de operação do sistema, de modo que os modelos *fuzzy* possam evoluir sua estrutura e responder melhor às entradas nestas outras faixas de operação. Todos os dados do sistema de tanques, bem como o processo do algoritmo de aprendizagem, foram obtidos e realizados através de simulações no MATLAB e Simulink. Os modelos *fuzzy* desenvolvidos são capazes de evoluir autonomamente, e são amplamente aptos para extrair o conhecimento da dinâmica do sistema com base apenas nos dados de treinamento.

**Keywords:** Systems Identification; Evolving Fuzzy Models; ALMMo-1 Systems; Four-Tank System.

**Palavras-chaves:** Identificação de Sistemas; Modelos *Fuzzy* Evolutivos; Sistemas ALMMo-1. Sistema de Quatro Tanques.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho aplica técnicas de identificação *fuzzy* evolutiva para obtenção de um modelo matemático de um sistema físico não linear. A proposta aplicada consiste em um sistema *fuzzy* evolutivo de aprendizagem autônoma, que é capaz de evoluir a sua estrutura com base apenas no conjunto de dados de treinamento fornecido em tempo real, e desta forma se adaptar autonomamente a variações nos dados provenientes do mundo real, além de avaliar de forma independente a qualidade da sua estrutura, de modo a realizar contínuas melhorias. Os siste-

mas de aprendizagem autônoma têm sido uma importante parte da aprendizagem de máquinas, podendo resolver diversos problemas na área de análise de dados, controle adaptativo, preditores, tomadas de decisão, classificadores, processamento de imagem, dentre outras, se utilizando geralmente de estruturas bastante hábeis, como as redes neurais (NN - *neural networks*), os sistemas *neuro-fuzzy* (NF), e os sistemas *fuzzy* baseado em regras (FRB - *fuzzy rule-based*). O sistema a ser aplicado nesta abordagem possui uma arquitetura de múltiplos modelos, que trata um sistema complexo como uma combinação de vários modelos mais simples. Assim sendo, ele é extremamente útil para diversas aplicações em que é necessário extrair um conhecimento complexo do mundo real, e é por isso uma ótima alternativa para a identificação de sistemas

---

<sup>\*</sup> Este estudo foi financiado, em parte, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão.

não lineares, pois os trata como uma combinação de vários sistemas lineares, que são mais simples. Por sua vez, a identificação de sistemas em si é de fundamental importância no desenvolvimento da ciência, permitindo entender e explicar fenômenos observados tanto na natureza quanto em sistemas sociais, biomédicos, equipamentos, dentre outros, além de facilitar o projeto de sistemas de monitoração e controle, predição, estimação de estados, simulação e treinamento, em especial para o caso de controladores adaptativos.

Diversos trabalhos nas áreas de sistemas inteligentes evolutivos e sistemas de aprendizagem autônoma vêm sendo realizados na literatura, como por exemplo em Alghamdi et al. (2019), em que é feita uma previsão precisa dos rendimentos da safra de soja em plantações, através de técnicas de análise de dados avançada em conjunto com modelos autônomos evolutivos; em Lughofer et al. (2017), em que é feita uma compensação autônoma de desvios de dados para sistemas fuzzy evolutivos generalizados, através da divisão de regra incremental; e em Pratama et al. (2018), em que é proposto um classificador de conjuntos fuzzy evolutivo, chamado de *Parsimonious Ensemble* (pENSEMble). A aplicação da lógica fuzzy na identificação e controle de sistemas não lineares também tem sido bastante pesquisada na literatura, como por exemplo em Zhang e Shin (2021), em que um modelo fuzzy Takagi-Sugeno é construído a partir de dados experimentais de um sistema não linear desconhecido (analiticamente), permitindo a implementação de controladores ótimos para o mesmo; em Farid et al. (2017), em que sistemas fuzzy do tipo 2 são utilizados para lidar com incertezas em uma planta dinâmica, aplicando-se na identificação e controle adaptativo do sistema; e em Bulatov e Kryukov (2018), em que um sistema neuro-fuzzy é utilizado para identificar os modos de operação de uma usina de geração distribuída e fazer o controle adaptativo da sintonia dos reguladores automáticos de excitação (AER) e dos reguladores automáticos de velocidade do rotor (ARRS) da usina.

A abordagem evolutiva a ser aplicada nesta pesquisa é a do sistema multi-modelo de aprendizagem autônoma de primeira ordem, ALMMo-1 (*First Order Autonomous Learning Multi-Model*), que foi introduzido no trabalho de Angelov et al. (2017b), e tem sido bastante estudado em trabalhos como em Gu et al. (2020), em que no mesmo sistema é aplicada uma otimização por enxame de partículas (PSO - *Particle Swarm Optimization*) para melhorar o seu desempenho; em Soares et al. (2020), em que é desenvolvido um modelo de ordem zero para a classificação dos sons provenientes do coração, de modo a auxiliar no diagnóstico de doenças cardíacas; e em Rodrigues Junior e de Oliveira Serra (2020), em que é feita uma previsão inteligente de séries temporais com uma abordagem evolutiva baseada no método dos sistemas ALMMo-1.

Esta pesquisa tem como principal objetivo aplicar o sistema ALMMo-1 para a identificação de um sistema não linear multivariável, de quatro tanques acoplados, visando posteriormente aplicar um controlador adaptativo. Vale ressaltar que um sistema não linear se comporta de forma diferente quando varia-se o ponto de operação do mesmo. Para o procedimento, foram obtidos, através do Simulink, dados de treinamento e validação que partiram do modelo

caixa branca não linear do sistema. Com o treinamento em uma faixa de operação do sistema, foram então colocados dados de validação em outra faixa de operação, de modo que a queda da qualidade da estimação pode ser notoriamente percebida. Desta forma, o sistema é então treinado nesta nova faixa de operação, de modo que evolua a sua estrutura e melhore o desempenho da identificação nesta nova faixa de operação. Todo o processo de aprendizagem do sistema se dá no ambiente de simulação do MATLAB. Frente aos trabalhos supracitados, este trabalho tem como diferencial uma análise detalhada do processo de aprendizagem da dinâmica de uma planta não linear multivariável em diferentes faixas de operação, no qual se torna nítida, tanto visualmente quanto quantitativamente, a melhora na qualidade da identificação do sistema após a evolução da sua estrutura. Ademais, faz-se importante a aplicação de um modelo fuzzy evolutivo do estado da arte em um sistema de nível não linear, com o objetivo de validar e analisar o desempenho do modelo neste tipo de sistema. Nas seções subsequentes, será visto inicialmente o sistema de quatro tanques a ser identificado, com suas características, como a não linearidade. Posteriormente, serão explicados os procedimentos do algoritmo de identificação do sistema com base no modelo fuzzy ALMMo-1. Depois, os procedimentos de simulação e os resultados serão expostos, e por fim, as considerações finais sobre o trabalho.

## 2. SISTEMA DE QUATRO TANQUES

O sistema em questão é um sistema de quatro tanques acoplados, similar ao do trabalho de Johansson (2000), que pode ser visto na figura 1. O sistema é multivariável com duas entradas, as tensões nas bombas ( $v_1$  e  $v_2$ ), e duas saídas, que são os níveis dos dois tanques inferiores ( $h_1$  e  $h_2$ ). Por questão de simplicidade, foram escolhidos apenas os níveis dos tanques inferiores como saídas, de modo que o sistema seja quadrado (mesmo número de entradas e saídas).

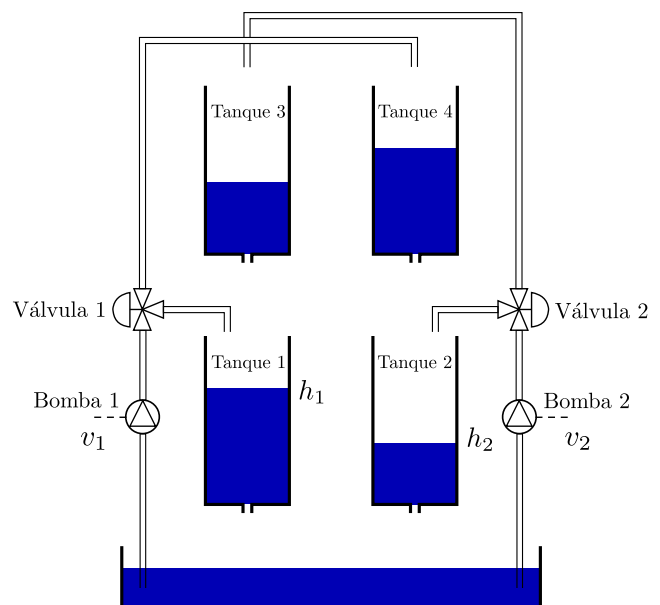


Figura 1. Sistema de quatro tanques acoplados.

No sistema, o tanque  $i$  possui área de seção  $A_i$ , área de furo de saída  $a_i$ , e nível de água  $h_i$ . Cada válvula possui um

fator  $\gamma_i$ , que determina a fração da vazão total da bomba que vai para o tanque inferior, enquanto  $(1 - \gamma_i)$  é a fração que vai para o tanque superior. Cada tanque possui 130 cm de altura máxima e cada bomba opera na faixa de 0 a 12 V e possui um coeficiente  $k_i$ , que determina a quantidade de vazão por unidade de tensão que ela fornece. Os valores dos parâmetros do sistema podem ser vistos na tabela 1, em que  $g$  é a gravidade local. Para a obtenção dos dados que

Tabela 1. Parâmetros do sistema de tanques.

Parâmetro	Valor
$A_1, A_2, A_3, A_4$	30 cm <sup>2</sup>
$a_1, a_2, a_3, a_4$	0,1 cm <sup>2</sup>
$\gamma_1, \gamma_2$	0,6
$k_1, k_2$	4,2458 cm <sup>3</sup> /V.s
$g$	981 cm/s <sup>2</sup>

são utilizados para treinamento e validação dos modelos *fuzzy* identificados, obtém-se inicialmente um modelo caixa branca do processo. Através da aplicação da equação de Bernoulli e a aplicação do balanço de massa para cada tanque, encontra-se o seguinte conjunto de equações de estado referente ao sistema:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1, \quad (1a)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2, \quad (1b)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1 - \gamma_2)k_2}{A_3} v_2, \quad (1c)$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1 - \gamma_1)k_1}{A_4} v_1. \quad (1d)$$

As equações são não lineares devido à presença da raiz quadrada, logo, a relação entre as variações de entrada e de saída não são as mesmas em todos os pontos de operação. O modelo caixa branca em (1) foi simulado com o uso do MATLAB e Simulink, de modo que os dados importantes para a identificação foram obtidos.

### 3. PROCEDIMENTO DE APRENDIZAGEM DO SISTEMA ALMMO-1

O procedimento para identificação do sistema de quatro tanques baseado nos modelos *fuzzy* ALMMo-1 foi feito com base no trabalho de Angelov e Gu (2019). Como o sistema é MIMO, há a necessidade de se identificar dois modelos *fuzzy*, sendo um para a saída  $h_1$ , e o outro para a saída  $h_2$ . Os modelos a serem identificados possuem a estrutura com base nos modelos FRB do tipo AnYa, que foi introduzido no trabalho de Angelov e Yager (2012), que é:

$$\mathfrak{R}_i : \mathbf{SE} (\mathbf{x} \sim \mathbf{p}_i), \text{ ENTÃO } (y_i = \lambda_i \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{a}_i). \quad (2)$$

O sistema possui  $M$  regras, em que  $\mathfrak{R}_i$  é a regra  $i$ ,  $y_i$  é a saída consequente numérica da regra  $i$ ,  $\mathbf{a}_i = [a_{i0} a_{i1} \dots a_{iN}]^T$  é o vetor de parâmetros da regra  $i$ ,  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T$  é o vetor das variáveis de entrada do sistema,  $\bar{\mathbf{x}} = [1, \mathbf{x}^T]^T$  é o vetor de entradas expandido,  $\mathbf{p}_i$  é o protótipo da  $i$ -ésima nuvem de dados ( $\mathbf{C}_i$ ), a expressão “ $\sim$ ” diz respeito à similaridade, um grau de pertencimento em relação à nuvem  $\mathbf{C}_i$ , e  $\lambda_i$  é o peso da  $i$ -ésima regra sobre a saída final. A saída do sistema então é:

$$y = \sum_{i=1}^M y_i = \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{a}_i. \quad (3)$$

O sistema *fuzzy* do tipo AnYa é caracterizado por simplificar a parte antecedente das regras em relação aos sistemas

*fuzzy* tradicionais (Mamdani e Takagi-Sugeno), com a introdução do conceito de nuvem de dados. Diferentemente dos métodos de agrupamento tradicionais, que estabelecem distâncias em relação aos seus centros sem levar em consideração a forma como os dados estão distribuídos, essas nuvens refletem a real distribuição dos dados de forma não paramétrica, levando em conta a distribuição espacial exata e a similaridade de todos os dados (Angelov e Yager, 2012, p.163). Diferentemente de funções de pertinência usuais, no qual há bastante subjetividade do especialista presente, os modelos ALMMo-1 empregam sistemas FRB do tipo AnYa com o uso de ferramentas da análise de dados empírica, presente em Angelov et al. (2017a), mais precisamente a densidade unimodal discreta,  $D$ , que se refere à distribuição espacial de uma amostra de dados em relação a todas as outras amostras. Nesta abordagem, a densidade unimodal discreta de cada nuvem de dados se assemelha bastante às funções de pertinência (Angelov et al., 2017b, p.3).

Nesta modelagem, pode-se dizer que cada nuvem de dados está associada a uma regra, e cada regra representa um subsistema linear que compõe o sistema não linear, referente a algum ponto ou faixa de operação. Para entradas de cada modelo, foram escolhidos os valores anteriores (1 passo atrás) das entradas e saída de cada modelo MISO do sistema, formando um modelo ARX (autorregressivo com entradas exógenas) de primeira ordem para cada um. Logo, para o primeiro sistema, tem-se o vetor de entradas  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) x_2(k) x_3(k)]^T = [v_1(k-1) v_2(k-1) h_1(k-1)]^T$  e a saída  $y(k) = h_1(k)$ , e para o segundo sistema, o vetor de entradas  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) x_2(k) x_3(k)]^T = [v_1(k-1) v_2(k-1) h_2(k-1)]^T$  e a saída  $y(k) = h_2(k)$ . Para cada amostra de dados, a identificação dos modelos é feita *online* em dois passos, sendo que primeiro ocorre a modelagem da parte antecedente (a estrutura), e depois a da parte consequente (os parâmetros). A primeira parte consiste em identificar, a partir da nova amostra de dado em tempo real, a que nuvem de dados pertence esta nova amostra, ou se esta vai ser a pioneira de uma nova nuvem, atualizando todos os parâmetros necessários e protótipos das nuvens; enquanto a segunda consiste em desenvolver recursivamente os parâmetros da parte consequente através do algoritmo de mínimos quadrados recursivos ponderados por graus *fuzzy* (*fuzzily weight recursive least square* - FWRLS).

A estrutura inicia a partir da primeira amostra de dados,  $\mathbf{x}_1$ , com os parâmetros globais (referentes a todos os dados) sendo: o número de amostras  $K \leftarrow 1$ , a média global dos dados  $\boldsymbol{\mu}_K \leftarrow \mathbf{x}_1$ , o produto escalar médio dos dados  $X_K \leftarrow \|\mathbf{x}_1\|^2$ , e o número de regras  $M_K \leftarrow 1$ , em que o símbolo “ $\leftarrow$ ” significa “atribuição”. Inicia-se então a primeira nuvem de dados, com seus parâmetros sendo: a nuvem  $\mathbf{C}_1 \leftarrow \{\mathbf{x}_1\}$ , o protótipo  $\mathbf{p}_{K,1} \leftarrow \mathbf{x}_1$ , o produto escalar médio  $\chi_{K,1} \leftarrow \|\mathbf{x}_1\|^2$ , o suporte  $S_{K,1} \leftarrow 1$ , a amostra referente ao instante de início da nuvem  $I_{M_K} \leftarrow K$ , a importância (ou utilidade) da regra da nuvem  $\eta_{K,M_K} \leftarrow 1$  e o nível de ativação acumulado da regra  $\Lambda_{K,M_K} \leftarrow 1$ . Inicia-se então os parâmetros da parte consequente, sendo: os parâmetros de estimação da saída  $\boldsymbol{\alpha}_{K,M_K} \leftarrow \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}$ , a soma acumulada do valor destes parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}_{K,M_K} \leftarrow \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}$ , e a matriz de covariância  $\boldsymbol{\Theta}_{K,M_K} \leftarrow \Omega_0 \mathbf{1}_{(N+1)}$ , em que  $\Omega_0$  é uma constante de inicialização, geralmente de alto valor,  $N = 3$  é o número

de entradas do sistema, e  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{I}$  são, respectivamente, uma matriz nula e uma matriz identidade. Desta forma, a primeira regra *fuzzy* é iniciada conforme a equação (2) para  $i = 1$ . Para cada novo dado observado ( $K \leftarrow K + 1$ ), é calculada a densidade da nova amostra em relação a cada uma das  $M_{K-1}$  nuvens de dados existentes através da seguinte expressão, para  $j = 1, \dots, M_{K-1}$ :

$$D_{K-1,j}(\mathbf{x}_K) = \frac{1}{1 + \frac{S_{K-1,j}^2 \|\mathbf{x}_K - \mathbf{p}_{K-1,j}\|^2}{(S_{K-1,j+1})(S_{K-1,j} \chi_{K-1,j} + \|\mathbf{x}_K\|^2) - \|\mathbf{x}_K + S_{K-1,j} \mathbf{p}_{K-1,j}\|^2}}. \quad (4)$$

Calcula-se então o nível de ativação de cada regra *fuzzy*:

$$\lambda_{K-1,j} = \frac{D_{K-1,j}(\mathbf{x}_K)}{\sum_{k=1}^{M_{K-1}} D_{K-1,k}(\mathbf{x}_K)}, \quad j = 1, \dots, M_{K-1}, \quad (5)$$

visando o cálculo da saída estimada:

$$y_K = \sum_{j=1}^{M_{K-1}} \lambda_{K-1,j} \bar{\mathbf{x}}_K^T \mathbf{a}_{K-1,j}. \quad (6)$$

Feito isso, desenvolve-se recursivamente os valores da média e do produto escalar médio dos dados:

$$\boldsymbol{\mu}_K = \frac{K-1}{K} \boldsymbol{\mu}_{K-1} + \frac{1}{K} \mathbf{x}_K, \quad (7)$$

$$X_K = \frac{K-1}{K} X_{K-1} + \frac{1}{K} \|\mathbf{x}_K\|^2. \quad (8)$$

A fim de verificar a consequência da nova amostra sobre a estrutura do sistema, calcula-se a densidade dele e de todos os protótipos das regras já existentes em relação a todos os outros dados. Logo, para  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_K, \mathbf{p}_{K-1,1}, \mathbf{p}_{K-1,2}, \dots, \mathbf{p}_{K-1,M_{K-1}}$ :

$$D_K(\mathbf{z}) = \frac{1}{1 + \frac{\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_K\|^2}{X_K - \|\boldsymbol{\mu}_K\|^2}}. \quad (9)$$

Feitos os cálculos, tem-se que se a densidade da nova amostra for maior ou menor que todas a densidades dos protótipos das regras existentes, então uma nova nuvem de dados vai ser formada ao redor dela:

$$\text{SE} \left( D_K(\mathbf{x}_K) > \max_{j=1, \dots, M_{K-1}} [D_K(\mathbf{p}_{K-1,j})] \right) \\ \text{OU} \left( D_K(\mathbf{x}_K) < \min_{j=1, \dots, M_{K-1}} [D_K(\mathbf{p}_{K-1,j})] \right), \quad (10)$$

**ENTÃO** (Forma-se uma nuvem em torno de  $\mathbf{x}_K$ ).

Com a condição em (10) satisfeita, deve-se checar se existe sobreposição entre a nuvem que há de ser criada e alguma nuvem já existente. Faz-se isso através da seguinte condição, em que  $j = 1, \dots, M_{K-1}$ :

$$\text{SE} \left( D_{K-1,j}(\mathbf{x}_K) \geq \frac{1}{1+n^2} \right), \quad (11)$$

**ENTÃO** ( $\mathcal{C}_j$  e a nova nuvem se sobrepõem),

em que  $n$  é uma constante relacionada à distância do dado em relação ao protótipo da nuvem; neste trabalho,  $n = 0,5$ . Se a condição em (11) for satisfeita para um ou mais valores de  $j$ , então não haverá a criação de uma nova nuvem em torno de  $\mathbf{x}_K$ , e ao invés disso, a amostra será incluída na nuvem de dados  $\mathcal{C}_{n^*}$  cujo protótipo está mais próximo do novo dado:

$$n^* = \arg \min_{j=1, \dots, M_{K-1}} (\|\mathbf{x}_K - \mathbf{p}_{K-1,j}\|). \quad (12)$$

Assim, nesta situação, com as condições em (10) e (11) satisfeitas, é certo que na amostra atual não haverá a

criação de uma nova regra ( $M_K \leftarrow M_{K-1}$ ), e os parâmetros da nuvem  $\mathcal{C}_{n^*}$  são desenvolvidos da seguinte maneira:  $\mathcal{C}_{n^*} \leftarrow \mathcal{C}_{n^*} + \mathbf{x}_K$ ,

$$\mathbf{p}_{K,n^*} \leftarrow \frac{\mathbf{p}_{K-1,n^*} + \mathbf{x}_K}{2}, \quad (13)$$

$$\chi_{K,n^*} \leftarrow \frac{\chi_{K-1,n^*} + \|\mathbf{x}_K\|^2}{2}, \quad (14)$$

$$S_{K,n^*} \leftarrow \left\lceil \frac{S_{K-1,n^*} + 1}{2} \right\rceil. \quad (15)$$

Caso a condição em (11) não seja satisfeita para nenhum valor de  $j$  (com a condição em (10) ativada), então é de fato adicionada uma nova nuvem de dados em torno de  $\mathbf{x}_K$  ( $M_K \leftarrow M_{K-1} + 1$ ), com os parâmetros sendo:  $\mathcal{C}_{M_K} \leftarrow \{\mathbf{x}_K\}$ ,  $\mathbf{p}_{K,M_K} \leftarrow \mathbf{x}_K$ ,  $\chi_{K,M_K} \leftarrow \|\mathbf{x}_K\|^2$ ,  $S_{K,M_K} \leftarrow 1$ ,  $I_{M_K} \leftarrow K$ ,  $\eta_{K-1,M_K} \leftarrow 1$  e  $\Lambda_{K-1,M_K} \leftarrow 0$ . Ademais, os parâmetros da parte consequente da nova regra são iniciados como sendo  $\Theta_{K-1,M_K} \leftarrow \Omega_0 \mathbf{I}_{(N+1)}$  e:

$$\mathbf{a}_{K-1,M_K} \leftarrow \frac{1}{M_{K-1}} \sum_{j=1}^{M_{K-1}} \mathbf{a}_{K-1,j}; \quad (16)$$

e uma nova regra *fuzzy* pode ser criada conforme (2) para  $i = M_K$ . Caso a condição em (10) não seja satisfeita, então a amostra simplesmente é adicionada à nuvem de dados mais próxima  $\mathcal{C}_{n^*}$  ( $M_K \leftarrow M_{K-1}$ ), porém com os parâmetros da nuvem variando conforme:  $\mathcal{C}_{n^*} \leftarrow \mathcal{C}_{n^*} + \mathbf{x}_K$ ,  $S_{K,n^*} \leftarrow S_{K-1,n^*} + 1$ ,

$$\mathbf{p}_{K,n^*} \leftarrow \frac{S_{K-1,n^*}}{S_{K,n^*}} \mathbf{p}_{K-1,n^*} + \frac{1}{S_{K,n^*}} \mathbf{x}_K, \quad (17)$$

$$\chi_{K,n^*} \leftarrow \frac{S_{K-1,n^*}}{S_{K,n^*}} \chi_{K-1,n^*} + \frac{1}{S_{K,n^*}} \|\mathbf{x}_K\|^2. \quad (18)$$

Para cada nuvem de dados  $\mathcal{C}_i$  que não recebeu nenhum novo membro, seus parâmetros não mudam:  $\mathbf{p}_{K,i} \leftarrow \mathbf{p}_{K-1,i}$ ,  $\chi_{K,i} \leftarrow \chi_{K-1,i}$  e  $S_{K,i} \leftarrow S_{K-1,i}$ . A fim de desenvolver os parâmetros da parte consequente, calcula-se a densidade nova da amostra atual em relação às nuvens ( $j = 1, \dots, M_K$ ), porém agora com a seguinte relação:

$$D_{K,j}(\mathbf{x}_K) = \frac{1}{1 + \frac{\|\mathbf{x}_K - \mathbf{p}_{K,j}\|^2}{\chi_{K,j} - \|\mathbf{p}_{K,j}\|^2}}. \quad (19)$$

O nível de ativação de cada regra é então calculado:

$$\lambda_{K,j} = \frac{D_{K,j}(\mathbf{x}_K)}{\sum_{k=1}^{M_K} D_{K,k}(\mathbf{x}_K)}, \quad j = 1, \dots, M_K. \quad (20)$$

Com isso, para  $j = 1, \dots, M_K$ , o nível de ativação acumulado da regra  $j$  passa a ser  $\Lambda_{K,j} \leftarrow \Lambda_{K-1,j} + \lambda_{K,j}$ , enquanto a utilidade da regra  $j$  passa a ser  $\eta_{K,j} \leftarrow \frac{1}{K - I_j} \Lambda_{K,j}$ .

Com a utilidade de todas as regras calculadas, tem-se que se  $\eta_{K,j} < \eta_0$  para algum  $j$ , então a regra  $\mathcal{R}_j$  é removida ( $M_K \leftarrow M_K - 1$ ), assim como a nuvem  $\mathcal{C}_j$  e todos os seus parâmetros. A constante  $\eta_0$  é um limite mínimo de importância para a regra continuar existindo, que neste trabalho vale  $\eta_0 = 0,1$ . Após isso, os parâmetros da parte consequente de todas as regras ( $j = 1, \dots, M_K$ ) são então atualizados conforme o algoritmo FWRLS (Angelov e Filev, 2004, p.487):

$$\Theta_{K,j} \leftarrow \Theta_{K-1,j} - \frac{\lambda_{K,j} \Theta_{K-1,j} \bar{\mathbf{x}}_K \bar{\mathbf{x}}_K^T \Theta_{K-1,j}}{1 + \lambda_{K,j} \bar{\mathbf{x}}_K^T \Theta_{K-1,j} \bar{\mathbf{x}}_K}, \quad (21)$$

$$\mathbf{a}_{K,j} \leftarrow \mathbf{a}_{K-1,j} + \lambda_{K,j} \Theta_{K,j} \bar{\mathbf{x}}_K (y_K - \bar{\mathbf{x}}_K^T \mathbf{a}_{K-1,j}). \quad (22)$$

Com os vetores de parâmetros atualizados, atualizam-se também os vetores com a soma acumulada de seus valores absolutos para todas as regras ( $j = 1, \dots, M_K$ ):  $\alpha_{K,j} \leftarrow \alpha_{K-1,j} + |\mathbf{a}_{K,j}|$ . Posteriormente, normalizam-se esses vetores dividindo-os pela soma de todos os seus elementos:

$$\bar{\alpha}_{K,j} \leftarrow \frac{\alpha_{K,j}}{\sum_{i=0}^N \alpha_{K,j,i}}, \quad j = 1, \dots, M_K. \quad (23)$$

O objetivo deste cálculo é verificar a importância de um dado parâmetro  $a_{K,j,i}$  em relação aos outros na mesma regra  $j$ , e comparar com a mesma importância relativa desse parâmetro nas outras regras. Desse modo, tem-se a seguinte condição:

$$\text{SE} \left( \bar{\alpha}_{K,j,i} < \frac{\varphi_0}{M_K} \sum_{k=1}^{M_K} \bar{\alpha}_{K,k,i} \right), \quad (24)$$

ENTÃO (Remove-se o conjunto  $i$  da regra  $\mathfrak{R}_j$ ).

Se a condição em (24) for satisfeita para algum parâmetro  $a_{K,j,i}$  em alguma regra  $j$ , então ele é removido do vetor  $\mathbf{a}_{K,j}$ , e da mesma forma,  $\alpha_{K,j,i}$  é removido de  $\alpha_{K,j}$ . Ademais, são removidas a linha  $i$  e a coluna  $i$  da matriz  $\Theta_{K,j}$ . Com isso, cada regra do sistema da forma vista em (2) pode ser atualizada, e repete-se o algoritmo para a próxima amostra observada.

#### 4. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Para as simulações, foi escolhido um período de amostragem  $T_s = 1$  s, e todas foram realizadas com  $N_A = 2000$  amostras. Foram retirados dados de treinamento e de validação do sistema não linear (1), de modo que o modelo fosse primeiro treinado em uma faixa de operação específica. Para sinais de treinamento, foram escolhidos sinais PRBS (*pseudorandom binary sequence*) que variavam em torno de  $v_1 = 0,4$  V e  $v_2 = 1,2$  V. Os sinais pseudoaleatórios só atuam nas entradas em tempos específicos, e somente em uma de cada vez, de modo que quando uma entrada está variando conforme a sequência, o outro fica constante em seu valor central. Os dados de treinamento, assim como as saídas estimadas durante a identificação *online*, podem ser vistos na figura 2. Para alcançar um bom desempenho na estimação dos parâmetros, foi escolhido  $\Omega_0 = 10^6$ , e nota-se na figura 2 que os modelos *fuzzy* ALMMo-1 conseguiram estimar de forma apropriada as saídas do sistema não linear.

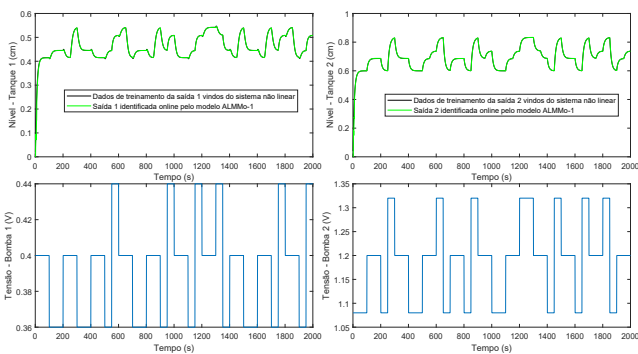


Figura 2. Dados do primeiro treinamento.

A fim de quantificar a qualidade da aproximação do modelo, utiliza-se o IAE (*Integral of the Absolute value*

*of the Error*), que por definição, é a integral do valor absoluto do erro. Entretanto, para que se possa comparar o desempenho em faixas de operação diferentes, utiliza-se, em vez do erro absoluto, o erro percentual ao longo do tempo:

$$IAE_p = \int_0^{t(N_A)} \left| \frac{y(t) - y_e(t)}{y(t)} \right| dt, \quad (25)$$

em que  $y(t)$  é a saída desejada e  $y_e(t)$  é a saída estimada pelo modelo. Os resultados de  $IAE_p$  para esta primeira estimação *online* foi de 8,6442 para o nível do tanque 1, e 7,485 para o nível do tanque 2. Até o final da identificação *online*, os modelos evoluíram para 2 regras cada, que representam dois subsistemas lineares referente ao modelo completo. Os valores finais dos protótipos das nuvens e dos parâmetros da parte consequente foram:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{K,1} &= [0,2 \ 0,54 \ 0,0098]^T, \quad \mathbf{a}_{K,1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1,0004]^T, \\ \mathbf{p}_{K,2} &= [0,392 \ 1,1881 \ 0,4624]^T, \\ \mathbf{a}_{K,2} &= [-0,0362 \ 0,0693 \ 0,0406 \ 0,9158]^T, \end{aligned} \quad (26)$$

para o sistema 1, e:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{K,1} &= [0,2 \ 0,54 \ 0,0199]^T, \quad \mathbf{a}_{K,1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1,0005]^T, \\ \mathbf{p}_{K,2} &= [0,392 \ 1,1881 \ 0,6938]^T, \\ \mathbf{a}_{K,2} &= [-0,0633 \ 0,0605 \ 0,0908 \ 0,9019]^T, \end{aligned} \quad (27)$$

para o sistema 2.

A fim de verificar as características não lineares do sistema de tanques, e a capacidade dos modelos *fuzzy* ALMMo-1 de desenvolverem suas estruturas em modificações extremas nos dados, foram inicialmente aplicados dados de validação (sem treinamento *online*) em uma faixa de operação muito distante do que os modelos aprenderam, sendo  $v_1(t) = 12u(t) - 2u(t - 800) + e(t)$  e  $v_2(t) = 9,5u(t) + 1,8u(t - 1200) + e(t)$  ( $u(t)$  é o degrau unitário e  $e(t)$  é ruído uniforme de média 0 e variância 0,0533), com a entrada  $v_1(t)$  saturada em 12 V. Este procedimento foi feito *offline*, com os modelos tendo os parâmetros desenvolvidos em (26) e (27), e o resultado pode ser visto na figura 3. Pode-se ver que as saídas estimadas perdem muita precisão nesta outra faixa de operação, existindo até mesmo um alto erro em regime permanente, de 4,855 cm para  $h_1$  e de 5,773 cm para  $h_2$ . O valor do  $IAE_p$  para esta estimação foi de 96,4139 para o nível do tanque 1, e 107,8466 para o nível do tanque 2, valores extremamente maiores que os anteriores.

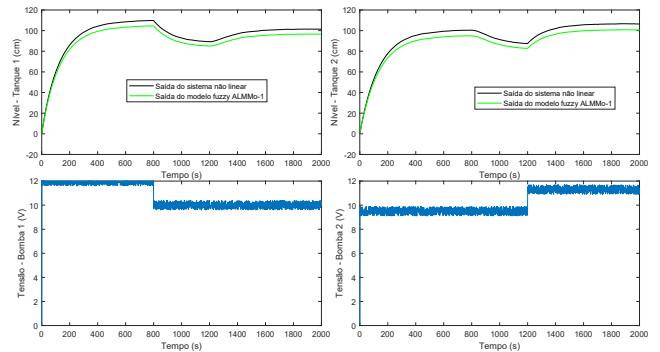


Figura 3. Estimação do modelo em faixa de operação distante da treinada.

Para que os modelos possam aprender esta nova faixa de operação, foram preparados dados de treinamento que passam por ela: sinais PRBS em torno de  $v_1 = 11$  V

e  $v_2 = 10,5$  V. Após o treinamento *online*, os sistemas *fuzzy* ALMMo-1 evoluíram para 3 regras cada, e os valores finais dos protótipos das nuvens e dos parâmetros da parte consequente foram:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{K,1} &= [0,1333 \ 0,36 \ 0,0065]^T, \\ \mathbf{a}_{K,1} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1,0006]^T, \\ \mathbf{p}_{K,2} &= [0,392 \ 1,1881 \ 0,4624]^T, \\ \mathbf{a}_{K,2} &= [-0,0303 \ 0,0482 \ 0,0121 \ 0,9941]^T, \\ \mathbf{p}_{K,3} &= [10,7644 \ 10,3949 \ 96,6228]^T, \\ \mathbf{a}_{K,3} &= [-0,2992 \ 0,0857 \ 0,0144 \ 0,9926]^T, \end{aligned} \quad (28)$$

para o sistema 1, e:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{K,1} &= [0,1333 \ 0,36 \ 0,0132]^T, \\ \mathbf{a}_{K,1} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1,0006]^T, \\ \mathbf{p}_{K,2} &= [0,392 \ 1,1881 \ 0,6938]^T, \\ \mathbf{a}_{K,2} &= [-0,0394 \ 0,0452 \ 0,0224 \ 0,9932]^T, \\ \mathbf{p}_{K,3} &= [10,7644 \ 10,3949 \ 95,3869]^T, \\ \mathbf{a}_{K,3} &= [-0,293 \ 0,0159 \ 0,0884 \ 0,9922]^T, \end{aligned} \quad (29)$$

para o sistema 2. Os modelos evoluídos foram então simulados *offline* para os mesmos dados de validação presentes na figura 3, e o resultado pode ser então visto na figura 4. Visualmente, é nítida a melhora na estimação das saídas, e o valor do  $IAE_p$  para esta estimação foi de 1,7876 para o nível do tanque 1, e 1,8455 para o nível do tanque 2, valores muito menores que os obtidos sem o treinamento adequado para a faixa de operação.

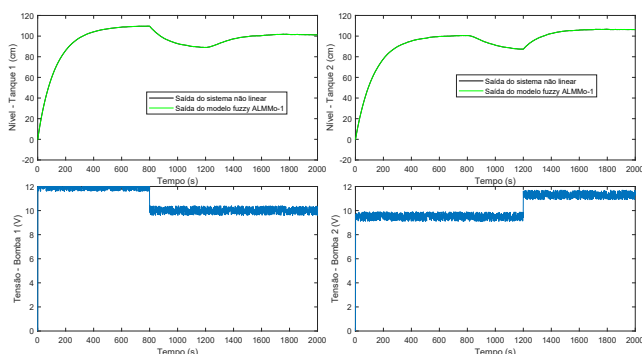


Figura 4. Estimação do modelo na segunda faixa de operação com o treinamento adequado.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho tratou da aplicação de modelos *fuzzy* ALMMo-1 para realizar a identificação de um sistema não linear multivariável. Este modelo utiliza nuvens de dados sem formas predeterminadas para agrupamento e formação de sua estrutura antecedente, e evolui os parâmetros do consequente conforme o algoritmo FWRLS. As saídas do sistema foram estimadas a partir de modelos ARX de primeira ordem.

A intenção foi modelar um sistema não linear com uma abordagem de múltiplos modelos lineares, baseado no famoso princípio “dividir para conquistar”. Foram desenvolvidos dados de treinamento e validação com o objetivo inicial de compreender o comportamento do modelo em uma faixa de operação do sistema extremamente distante da que o mesmo aprendeu, sem o treinamento adequado, e

assim observar a necessidade de modelos que se adaptam e evoluem durante a identificação de sistemas não lineares.

Por fim, com o treinamento adequado, observou-se a aprendizagem do modelo *fuzzy* ALMMo-1 nesta outra faixa de operação do sistema, de modo que é notória a robustez deste modelo quanto a essas variações na planta.

## REFERÊNCIAS

- Alghamdi, M., Angelov, P.P., Gimenez, R., Rufino, M., e Soares, E. (2019). Self-organising and self-learning model for soybean yield prediction. *Sixth International Conference on Social Networks Analysis, Management and Security*.
- Angelov, P.P. e Filev, D.P. (2004). An approach to online identification of Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*.
- Angelov, P.P. e Gu, X. (2019). *Empirical Approach to Machine Learning*. Springer Nature Switzerland AG.
- Angelov, P.P., Gu, X., e Kangin, D. (2017a). Empirical data analytics. *Internacional Journal of Intelligent Systems*.
- Angelov, P.P., Gu, X., e Principe, J.C. (2017b). Autonomous learning multi-model systems from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.
- Angelov, P.P. e Yager, R. (2012). A new type of simplified fuzzy rule-based system. *International Journal of General Systems*.
- Bulatov, Y.N. e Kryukov, A.V. (2018). Neuro fuzzy control system for distributed generation plants. *Atlantis Press - Vth International workshop “Critical infrastructures: Contingency management, Intelligent, Agent-based, Cloud computing and Cyber security”(IWCI)*.
- Farid, U., Khan, B., Ullah, Z., Ali, S.M., Mehmood, C.A., Farid, S., Sajjad, R., Sami, I., e Shah, A. (2017). Control and identification of dynamic plants using adaptive neuro-fuzzy type-2 strategy. *International Conference on Energy Conservation and Efficiency (ICECE)*.
- Gu, X., Shen, Q., e Angelov, P.P. (2020). Particle swarm optimized autonomous learning fuzzy system. *IEEE Transactions on Cybernetics*.
- Johansson, K.H. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Lughofer, E., Pratama, M., e Skrjanc, I. (2017). Incremental rule splitting in generalized evolving fuzzy systems for autonomous drift compensation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.
- Pratama, M., Pedrycz, W., e Lughofer, E. (2018). Evolving ensemble fuzzy classifier. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.
- Rodrigues Junior, S.E. e de Oliveira Serra, G.L. (2020). Intelligent forecasting of time series based on evolving distributed neuro-fuzzy network. *Wiley Periodicals LLC - Computational Intelligence*.
- Soares, E., Angelov, P.P., e Gu, X. (2020). Autonomous learning multiple-model zero-order classifier for heart sound classification. *Applied Soft Computing Journal*.
- Zhang, B. e Shin, Y.C. (2021). A data-driven approach of Takagi-Sugeno fuzzy control of unknown nonlinear systems. *Applied Sciences - Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI)*.