

# Controle de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo: uma abordagem usando função de Lyapunov aumentada

Felipe A. Silva\* Paulo S. P. Pessim\* Márcio J. Lacerda\*

\* Grupo de Controle e Modelagem,  
Departamento de Engenharia Elétrica,  
Universidade Federal de São João del-Rei, MG,  
(e-mails: felipeaugusto120@gmail.com, paulopessim777@hotmail.com,  
lacerda@ufsj.edu.br).

---

**Abstract:** This paper presents new conditions in the form of Linear Matrix Inequalities capable of designing state-feedback controllers for discrete-time positive switched systems, subject to arbitrary switching. The presented conditions may be employed in the development of mode-dependent or mode-independent control strategies. Differently from existing conditions, the results are obtained through the use of an augmented Lyapunov function, that considers high-order shifted states in its state vector. Numerical experiments illustrate the performance and efficiency of the proposed approach in comparison with existing techniques from the literature.

**Resumo:** Este artigo apresenta novas condições na forma de desigualdade matriciais lineares capazes de realizar o projeto de controladores por realimentação de estados para sistemas positivos chaveados de tempo discreto, sujeitos a chaveamento arbitrário. As condições apresentadas podem ser empregadas no desenvolvimento de estratégias de controle dependentes e independente dos modos. Diferentemente das condições existentes na literatura, os resultados foram obtidos com a utilização de uma função de Lyapunov aumentada, que considera taxas de deslocamento de ordem superior em seu vetor de estados. Exemplos numéricos ilustram o desempenho e a eficácia do método proposto em comparação com métodos existentes na literatura.

*Keywords:* Positive switched linear systems; Discrete-time systems; State-feedback control; Lyapunov theory; Linear Matrix Inequalities.

*Palavras-chaves:* Sistemas lineares positivos chaveados; Sistemas discretos no tempo; Controle por realimentação de estados; Teoria de Lyapunov; Desigualdades Matriciais Lineares.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados são uma importante classe de sistemas híbridos. Esta classe de sistemas possui vários campos de aplicação na engenharia, incluindo conversores DC/DC (Deaecto et al., 2010), osciladores (Torikai and Saito, 1998), circuitos eletrônicos (Zhang et al., 2011), aplicações na indústria automotiva, sistemas de potência e sistemas mecânicos (Zhu and Antsaklis, 2015). Um sistema chaveado possui um número finito de subsistemas, também chamados de modos, que são acionados de acordo com uma lei de chaveamento (Huang et al., 2020). A lei de chaveamento pode ser conhecida, e o chaveamento pode ser dependente do tempo ou dos estados, por exemplo. Porém, em outros casos a sequência de chaveamento pode não ser conhecida a priori e, com isto, resultados para a estabilidade e controle foram desenvolvidos considerando o chaveamento arbitrário (Daafouz et al., 2002; Lacerda and Gomide, 2020).

Nos últimos anos, trabalhos relacionando sistemas chaveados e sistemas positivos, tem sido reportados na literatura de controle. A classe de sistemas positivos, abrange sistemas que assumem valores não negativos na evolução temporal dos estados e na saída, quando entradas e condições iniciais não negativas são consideradas. Aplicações de sistemas positivos podem ser encontradas em diversas áreas da ciência, por exemplo, redes de sistema hidráulicos, processos industriais envolvendo reatores químicos, modelos envolvendo poluição da atmosfera e da água, modelos econômicos, controle populacional e também modelos epidemiológicos (Farina and Rinaldi, 2000).

Tratando especificamente do controle de sistemas que mesclam as classes de sistemas positivos e chaveados, podemos citar: Liu et al. (2017) que explora a função de Lyapunov baseado no conceito de tempo médio de permanência nos modos. Spagolla et al. (2018) que aborda o controle por realimentação de estados para sistemas discretos no tempo, envolvendo uma busca de parâmetros escalares. Deaecto and Geromel (2017) que trata do problema de controle por realimentação de estados para sistemas contínuos no tempo assegurando a positividade com custo garantido

---

\* Os autores agradecem à UFSJ e ao CNPq pelo apoio financeiro (425800/2018-0).

$\mathcal{H}_2$  por meio do projeto de uma função de chaveamento. Tong et al. (2012) que projeta funções de chaveamento dependente do tempo e dependente dos estados para o controle de sistemas discretos no tempo. Além dos métodos citados anteriormente, Hernandez-Vargas et al. (2011) explorou a aplicação do controle para o estudo da dinâmica do tratamento de uma mutação viral em infecções HIV, fazendo uso de uma função de Lyapunov copositiva.

Grande parte das técnicas discutidas fazem uso da Teoria de Lyapunov (Khalil, 2002) para a obtenção das condições de análise e projeto. A teoria de Lyapunov se torna uma importante aliada, pois possibilita obter condições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês, *linear matrix inequalities*). As LMIs são uma ferramenta matemática utilizada na resolução de problemas envolvendo formulações convexas, comuns na área de controle de sistemas (Boyd et al., 1994). Existem pacotes computacionais especializados na resolução das LMIs que permitem escrever e resolver os problemas formulados (Löfberg, 2004; Sturm, 1999).

Este trabalho apresenta novas condições para a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas chaveados positivos discretos e invariantes no tempo. A sequência de comutação entre os modos do sistema chaveado é desconhecida, portanto uma lei de chaveamento arbitrária foi considerada. As condições foram obtidas explorando a existência de uma função de Lyapunov estruturada, que faz uso de um vetor de estados aumentado contendo estados deslocados em sua composição. O Lema de Finsler foi empregado na obtenção da condição de síntese apresentada. Diferente do método apresentado Spagolla et al. (2018), a técnica apresentada neste artigo não faz uso de busca escalar na solução das LMIs. A função de Lyapunov empregada neste artigo foi explorada para tratar sistemas incertos Pessim et al. (2019) e sistemas chaveados Lacerda and Gomide (2020). Funções de Lyapunov estruturadas também foram consideradas em Lacerda and Seiler (2017). O artigo se organiza da seguinte forma. Resultados preliminares são apresentados na Seção 2, enquanto os resultados principais são apresentados na Seção 3. A Seção 4 é dedicada aos experimentos numéricos que ilustram a eficácia do método proposto, e a Seção 5 conclui o trabalho desenvolvido.

**Notação:**  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  representa uma matriz com entradas reais de  $m$  linhas e  $n$  colunas. A transposta de uma matriz  $X$  é denotada por  $X^T$ .  $P \succ 0$  ( $P \prec 0$ ) representa uma matriz simétrica definida positiva (definida negativa). A condição  $M \geq 0$  indica que cada um dos elementos da matriz  $M$  deve ser não negativo. O bloco simétrico em uma matriz é denotado por  $\star$ . Para simplificar os desenvolvimentos uma matriz na forma de bloco tridiagonal é definida como  $M = \text{blktriag}(A^T, B, A)$  em que  $A = (A_1, \dots, A_m)$  e  $B = (B_1, \dots, B_{m+1})$ .

$$M = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1^T & B_2 & A_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2^T & B_3 & A_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & A_3^T & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_m & A_m \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_m^T & B_{m+1} \end{bmatrix}.$$

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES

Considere o seguinte sistema positivo chaveado discreto no tempo

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k), \quad (1)$$

em que  $x(k)$  é o vetor de estados e  $u(k)$  é o vetor de entradas. As matrizes  $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  dependem do sinal de chaveamento  $\sigma(k) : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  que é responsável por selecionar o modo ativo a cada instante de tempo. Como apenas um subsistema é ativo por vez, pode-se utilizar uma função de indicação  $\xi(k) = [\xi_1(k), \dots, \xi_N(k)]^T$  para representar o comportamento do sistema:

$$\xi_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(k) = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

resultando em,

$$x(k+1) = A(\xi(k))x(k) + B(\xi(k))u(k), \quad (3)$$

em que

$$A(\xi(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k)A_i, \quad B(\xi(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k)B_i.$$

Assume-se que o sistema (3) é um sistema positivo de acordo com a seguinte definição:

**Definição 1.** (Farina and Rinaldi, 2000) Um sistema é dito positivo se para qualquer condição inicial  $x(0)$  não negativa e entrada  $u(k)$  também não negativa, os estados e as saídas são não negativas.

Neste artigo, utilizaremos a seguinte lei de controle por realimentação de estados

$$u(k) = K(\xi(k))x(k), \quad (4)$$

em que  $K(\xi(k))$  é denominada matriz de ganhos dependente de modos, responsável por assegurar a estabilidade e positividade do sistema em malha fechada. Aplicando a lei de controle (4) no sistema (3) tem-se

$$x(k+1) = A_{cl}(\xi(k))x(k), \quad (5)$$

em que  $A_{cl}(\xi(k)) = A(\xi(k)) + B(\xi(k))K(\xi(k))$ . A positividade do sistema em malha fechada é assegurada de acordo com o lema apresentado a seguir.

**Lema 2.** (Farina and Rinaldi, 2000) O sistema em malha fechada é dito positivo se, e somente se, todos elementos da matriz em malha fechada  $A_{cl}(\xi(k))$  são não negativos.

Levando em consideração a existência de uma função de Lyapunov quadrática e chaveada  $V(\xi(k), x(k)) = x(k)^T P(\xi(k))x(k)$ , condições para a análise da estabilidade de sistemas chaveados podem ser encontradas na literatura.

**Lema 3.** (Daafouz et al., 2002) Seja o seguinte sistema autônomo chaveado

$$x(k+1) = A(\xi(k))x(k). \quad (6)$$

As abordagens a seguir são equivalentes:

i Existe uma função de Lyapunov  $V(\xi(k), x(k))$ , tal que:

$$V(\xi(k), x(k)) \succ 0, \quad (7)$$

$$V(\xi(k+1), x(k+1)) - V(\xi(k), x(k)) \prec 0, \quad (8)$$

que certifica a estabilidade do sistema (6)

ii Se existirem  $N$  matrizes simétricas  $P_1, \dots, P_N$ , que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} \succ 0 \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

o sistema (6) é considerado assintoticamente estável.

Observe que o Lema 3 não considera a positividade dos sistemas. O problema de controle para sistemas chaveados positivos, objeto de estudo deste artigo, também já foi abordado por trabalhos existentes na literatura. O Lema a seguir apresenta uma condição de projeto na forma de LMIs para um dado valor do parâmetro escalar.

Lema 4. (Spagolla et al., 2018) Para um valor dado do parâmetro escalar  $\xi \in (-1, 1)$ , se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonais e matrizes  $Z_i \in \mathbb{R}^{u \times n}$  com  $i = 1, \dots, N$ , tais que

$$\begin{bmatrix} \xi A_i G_i + \xi G_i^T A_i^T + \xi B_i Z_i - P_j & & \\ & \star & \\ & & -\xi G_i^T + A_i G_i + B_i Z_i \\ & & & P_i - G_i - G_i^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (10)$$

$$A_i G_i + B_i Z_i \geq 0, \quad (11)$$

para todo  $i, j = 1, \dots, N$ , então  $K_i = Z_i G_i^{-1}$  assegura a estabilidade assintótica e a positividade do sistema chaveado em malha fechada.

Diferentemente do resultado obtido por Spagolla et al. (2018), que faz uso do Lema da Projeção, as condições desenvolvidas neste trabalho são obtidas com a aplicação do Lema de Finsler, enunciado a seguir.

Lema 5. (de Oliveira and Skelton, 2001) Sejam  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{rank}(B) < n$  e  $BB^T = 0$ . Então, as seguintes condições são equivalentes

- i  $w^T Q w < 0, \quad \forall w \neq 0: Bw = 0,$
- ii  $B^{\perp T} Q B^{\perp} \prec 0,$
- iii  $\exists \mu \in \mathbb{R}: Q - \mu B^T B \prec 0,$
- iv  $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n}: Q + X B + B^T X^T \prec 0.$

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Assim como em Pessim et al. (2018, 2019), as condições desenvolvidas neste artigo são baseadas em uma função de Lyapunov construída por meio de um vetor de estados aumentado. Antes de apresentar o caso genérico, o lema a seguir introduz o método por meio de um caso particular, em que o vetor de estados da função de Lyapunov é aumentado em apenas um instante de tempo.

Lema 6. Se existirem matrizes simétricas  $P_{1,i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_{2,i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_{i_1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , e matrizes diagonais  $X_{i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que:  $P_{2,i_1} \succ 0$ ,

$$\begin{bmatrix} -P_{1,i_1} & A_{i_1} X_{i_1} + B_{i_1} Z_{i_1} & & 0_{n \times n} \\ \star & P_{1,i_2} - P_{2,i_1} - X_{i_1} - X_{i_1}^T & A_{i_2} X_{i_2} + B_{i_2} Z_{i_2} & \\ \star & & \star & P_{2,i_2} - X_{i_2} - X_{i_2}^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (12)$$

$$A_{i_1} X_{i_1} + B_{i_1} Z_{i_1} \geq 0, \quad (13)$$

sejam satisfeitas em que  $i_1, i_2 = 1, \dots, N$ , então os ganhos  $K_{i_1} = Z_{i_1} X_{i_1}^{-1}$ , certificam a estabilidade e a positividade do sistema chaveado em malha fechada (5).

**Prova.** O primeiro passo consiste em realizar a mudança de variáveis  $Z_{i_1} = K_{i_1} X_{i_1}$  e  $Z_{i_2} = K_{i_2} X_{i_2}$  em (12). Na seqüência escreva

$$\begin{aligned} A_{i_1} X_{i_1} + B_{i_1} K_{i_1} X_{i_1} &= A_{cl,i_1} X_{i_1}, \\ A_{i_2} X_{i_2} + B_{i_2} K_{i_2} X_{i_2} &= A_{cl,i_2} X_{i_2}. \end{aligned}$$

Multiplicando a condição resultante à esquerda e à direita por  $B^{\perp T} = [I \quad A_{cl,i_1} \quad A_{cl,i_1} A_{cl,i_2}]$ , e por  $B^{\perp}$ , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_{cl,i_1} A_{cl,i_2} P_{2,i_2} A_{cl,i_2}^T A_{cl,i_1}^T \\ + A_{cl,i_1} (P_{1,i_2} - P_{2,i_1}) A_{cl,i_1}^T - P_{1,i_1} \prec 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Multiplicando (14) por  $\xi_{i_1}(k)^2 \xi_{i_2}(k+1)^2$  e somando o resultado, é possível reescrever a desigualdade anterior como

$$\begin{aligned} A_{cl}(\xi(k)) A_{cl}(\xi(k+1)) P_{2,i_2} A_{cl}(\xi(k+1))^T A_{cl}(\xi(k))^T \\ + A_{cl}(\xi(k)) (P_1(\xi(k+1)) - P_{2,i_1}) A_{cl}(\xi(k))^T \\ - P_1(\xi(k)) \prec 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Note que (15) foi obtido considerando as característica da função de indicação,  $\xi_{i_1}(k) \xi_{i_2}(k) = 0$  se  $i_1 \neq i_2$ ,  $\sum_{i_1=1}^N \xi_{i_1}(k) = 1$ , e  $\sum_{i_2=1}^N \xi_{i_2}(k+1) = 1$ , de modo que

$$\sum_{i_1=1}^N \xi_{i_1}(k) A_{cl,i_1} \sum_{i_2=1}^N \xi_{i_2}(k+1) A_{cl,i_2} = A_{cl}(\xi(k)) A_{cl}(\xi(k+1)).$$

Utilizando a mesma estratégia, e multiplicando (15) por  $\xi_{i_1}(k) \xi_{i_2}(k+1)$  e somando o resultado obtém-se

$$\begin{aligned} A_{cl}(\xi(k)) A_{cl}(\xi(k+1)) P_2(\xi(k+1)) A_{cl}(\xi(k+1))^T A_{cl}(\xi(k))^T \\ + A_{cl}(\xi(k)) (P_1(\xi(k+1)) - P_2(\xi(k))) A_{cl}(\xi(k))^T \\ - P_1(\xi(k)) \prec 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Pré e pós multiplicando (16) por  $x(k)^T$  e  $x(k)$  respectivamente, e empregando um argumento de dualidade resulta em

$$\begin{aligned} x(k+2)^T P_2(\xi(k+1)) x(k+2) \\ + x(k+1)^T (P_1(\xi(k+1)) - P_2(\xi(k))) x(k+1) \\ - x(k)^T P_1(\xi(k)) x(k) \prec 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a condição i do Lema de Finsler, que garante  $\Delta V(\xi(k), x(k)) < 0$  com

$$\begin{aligned} V(\xi(k), x(k)) &= x(k)^T P_1(\xi(k)) x(k) \\ &+ x(k+1)^T P_2(\xi(k)) x(k+1). \end{aligned}$$

Note que o Lema 6 garante que as matrizes  $P_1$  e  $P_2$  são definidas positivas, garantindo desta forma que a função de Lyapunov é definida positiva.

Por fim, note também que caso (12) seja satisfeita temos que

$$P_{2,i_2} \prec X_{i_2} + X_{i_2}^T,$$

o que assegura a existência da inversa, e a positividade da variável de folga chaveada  $X(\xi(\cdot))$ . Consequentemente, multiplicando (13) à direita por  $X_{i_1}^{-1}$  obtém-se

$$A_{i_1} + B_{i_1} Z_{i_1} X_{i_1}^{-1} \geq 0, \quad (17)$$

ou ainda

$$A_{i_1} + B_{i_1} K_{i_1} \geq 0, \quad (18)$$

que multiplicando por  $\xi_{i_1}(k)^2$  e somando o resultado, pode ser reescrito como

$$A_{cl}(\xi(k)) = A(\xi(k)) + B(\xi(k)) K(\xi(k)) \geq 0,$$

garantindo a positividade do sistema em malha fechada e concluindo a prova. ■

No Teorema a seguir uma formulação genérica é desenvolvida levando em consideração uma função de Lyapunov com vetor de estados aumentado em  $p$  instantes de tempo.

**Teorema 7.** Se existirem matrizes simétricas  $P_{m,i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_{i_1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , e matrizes diagonais  $X_{i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A_{i_1} X_{i_1} + B_{i_1} Z_{i_1} \geq 0, \quad (19)$$

$$P_{j,i_1} \succ 0, \quad j = 2, \dots, p+1, \quad (20)$$

$$\text{blktriag}(S^T, L, S) \prec 0, \quad (21)$$

sejam satisfeitas com

$$L = (-P_{1,i_1}, R_1, \dots, R_p, P_{p+1,i_2} - X_{i_{p+1}} - X_{i_{p+1}}^T),$$

$$R_p = P_{p,i_2} - P_{p+1,i_1} - X_{i_p} - X_{i_p}^T,$$

$$S = (S_1, \dots, S_{p+1}), \quad S_m = A_{i_m} X_{i_m} + B_{i_m} Z_{i_m},$$

em que  $m = 1, \dots, p+1$ ,  $i_m = 1, \dots, N$ , então os ganhos  $K_{i_m} = Z_{i_m} X_{i_m}^{-1}$ , certificam a estabilidade e a positividade do sistema chaveado em malha fechada (5).

**Prova.** A Prova segue o mesmo procedimento realizado na prova do Lema 6, considerando  $\mathcal{B}^{L^T} = [I \quad F_1 \quad \dots \quad F_{p+1}]$  em que

$$F_l = \prod_{r=1}^l A_{cl,i_r}.$$

Multiplicando a desigualdade resultante por  $x(k)^T$  e  $x(k)$ , e empregando um argumento de dualidade resulta em

$$\begin{aligned} & x(k+p+1)^T P_{p+1}(\xi(k+1)) x(k+p+1) \\ & + x(k+p)^T (P_p(\xi(k+1)) - P_{p+1}(\xi(k))) x(k+p) \\ & + \dots + x(k+1)^T (P_1(\xi(k+1)) - P_2(\xi(k))) x(k+1) \\ & \quad - x(k)^T P_1(\xi(k)) x(k) \prec 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\Delta V(\xi(k), x(k)) \prec 0$  com

$$V(\xi(k), x(k)) = [x(k)^T \quad \dots \quad x(k+p)^T]^T \Upsilon \begin{bmatrix} x(k) \\ \vdots \\ x(k+p) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} P_1(\xi(k)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & P_{p+1}(\xi(k)) \end{bmatrix}.$$

Note ainda que (20) é suficiente para garantir que a função de Lyapunov seja definida positiva, e (19) conforme demonstrado em (17)-(18), garante a positividade do sistema em malha fechada, concluindo a prova. ■

Caso desejado, é possível adaptar os resultados do Teorema 7 para o projeto de um único ganho  $K$  independente de modos, que será capaz de assegurar a estabilidade e a positividade do sistema em malha fechada. Tal adaptação pode ser realizada com a troca de variáveis  $Z_{i_m} = Z$  e  $X_{i_m} = X$  para todo  $m = 1, \dots, p+1$ , e  $i_m = 1, \dots, N$ , resultando no seguinte Corolário.

**Corolário 8.** Se existirem matrizes simétricas  $P_{m,i_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , e uma matriz diagonal  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$P_{j,i_1} \succ 0 \quad j = 2, \dots, p+1, \quad (22)$$

$$\text{blktriag}(S^T, L, S) \prec 0 \quad (23)$$

$$A_{i_1} X + B_{i_1} Z \geq 0, \quad (24)$$

sejam satisfeitas com

$$L = (-P_{1,i_1}, R_1, \dots, R_p, P_{p+1,i_2} - X - X^T),$$

$$R_s = P_{s,i_2} - P_{s+1,i_1} - X - X^T,$$

$$S = (S_1, \dots, S_{p+1}), \quad S_m = A_{i_m} X + B_{i_m} Z,$$

em que  $m = 1, \dots, p+1$ ,  $i_m = 1, \dots, N$ , então o ganho  $K = ZX^{-1}$ , certifica a estabilidade e a positividade do sistema chaveado em malha fechada (5).

#### 4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a eficácia das condições desenvolvidas neste trabalho, exemplos acadêmicos retirados da literatura foram empregados. As condições foram implementadas em MATLAB (R2020a), usando o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004), e o resolvidor SeDuMi (Sturm, 1999). O computador utilizado possui um processador Intel Core i5-8265U, 1.6GHz - 1.8GHz, 8GB de memória RAM e Windows 10 como sistema operacional.

##### 4.1 Exemplo 1

Este exemplo pode ser encontrado em Spagolla et al. (2018) e o interesse é analisar o conservadorismo e custo computacional do método proposto. Considere um sistema positivo chaveado discreto no tempo, com dois modos, e matrizes dadas por:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 1 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes  $\bar{A}_1$  e  $\bar{A}_2$  são multiplicadas por um escalar  $\gamma$  e o nosso objetivo é encontrar o maior valor de  $\gamma$  associado a uma solução factível, tal que

$$A_1 = \gamma \bar{A}_1, \\ A_2 = \gamma \bar{A}_2.$$

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para o Teorema 7 considerando diferentes valores de  $p$ , além dos resultados obtidos pelo Lema 4, com uma busca no parâmetro escalar, e com o parâmetro escalar  $\xi = 0$ . São apresentados os valores máximos de  $\gamma$  obtidos para cada caso, número de variáveis de decisão escalares ( $N_v$ ) e número de linhas ( $N_l$ ) utilizadas na resolução do problema.

Tabela 1. Valor máximo de  $\gamma$ , número de variáveis  $N_v$  e número de linhas  $N_l$ .

Método	$\gamma$	$N_v$	$N_l$
Teorema 7 ( $p = 0$ )	2.5034	44	64
Teorema 7 ( $p = 1$ )	2.5034	64	88
Teorema 7 ( $p = 2$ )	2.5125	84	176
Teorema 7 ( $p = 3$ )	2.5132	104	376
Lema 4 ( $\xi = 0$ )	2.5034	44	64
Lema 4 ( $\xi = -0.1$ )	2.5048	44	64

É possível notar que o aumento de  $p$  diminui o conservadorismo da solução obtida, ao mesmo tempo que faz uso

de um maior número de linhas de LMIs e de variáveis de decisão escalares necessárias para a resolução do problema. Porém, em termos práticos, este aumento não é proibitivo, pois o projeto do controlador não é realizado em tempo real.

A solução obtida com o Lema 4 ( $\xi = -0.1$ ), fazendo uso de busca escalar, obteve um resultado menos conservador, quando comparado ao Teorema 7 ( $p = 1$ ). Entretanto, os resultados obtidos com o Teorema 7 ( $p \geq 2$ ) são capazes de fornecer um pequeno aumento no parâmetro  $\gamma$ , sem a necessidade de busca escalar.

#### 4.2 Exemplo 2

Este exemplo poder ser encontrado em Liu et al. (2017). Considere o sistema chaveado com dois modos, e matrizes dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, o sistema em malha aberta é instável e não positivo. Logo, o controlador deve ser capaz de estabilizar e garantir a positividade da malha fechada com condições iniciais e lei de chaveamento conhecidas.

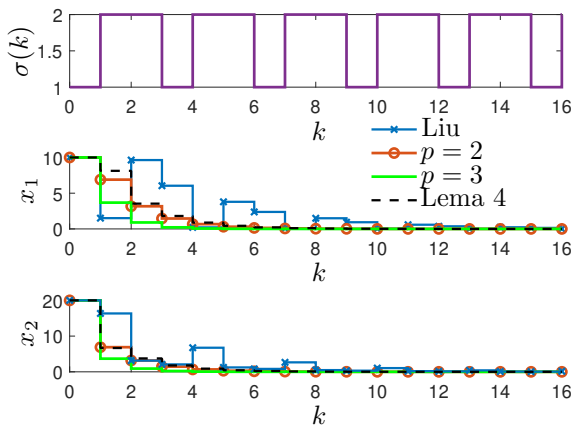


Figura 1. Sinal de chaveamento e respostas temporais obtidas pelos métodos dependente de modos considerando condição inicial  $x(0) = [10 \ 20]^T$ .

A Figura 1 representa o sinal de chaveamento  $\sigma(k)$  (curva contínua na cor roxa) e a resposta temporal do sistema utilizando o Teorema 7 para  $p = 2$  (curva contínua demarcada por círculos na cor laranja), para  $p = 3$  (curva contínua na cor verde), o Lema 4 para o melhor caso apresentado em Spagolla et al. (2018) (curva tracejada na cor preta) e para a abordagem encontrada em Liu et al. (2017) (curva demarcada por x na cor azul).

De acordo com a simulação da resposta temporal apresentada na Figura 1, percebe-se que os controladores dependentes de modo obtidos pelo Teorema 7, casos  $p = 2$ , e  $p = 3$ , proporcionam um tempo de estabilização menor, quando comparados ao resultado obtido pelo Lema 4. Destaca-se ainda, a influência da adição de instantes  $p$  na

resposta temporal. Pela Figura 1, é notável a melhoria obtida com o aumento de  $p$ .

Adicionalmente, podemos notar que a trajetória do Lema 4 foi obtida para o melhor caso ( $\xi = 0.9$ ), ou seja há necessidade de buscar a variável  $\xi$ , conseqüentemente, aumentar o esforço computacional. Em contrapartida, a utilização da técnica proposta neste artigo não faz uso de busca por parâmetro escalar.

#### 4.3 Exemplo 3

Seja o sistema positivo chaveado discreto no tempo com três modos, gerado aleatoriamente, descrito pelas seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9979 & 0.0967 & 0.6089 \\ 0.3580 & 0.7263 & 0.3939 \\ 0.5258 & 0.7206 & 0.1579 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5066 \\ 0.3415 \\ 0.9073 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.5184 & 0.9726 & 0.8800 \\ 0.8289 & 0.6502 & 0.1586 \\ 0.1971 & 0.6825 & 0.5018 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8570 \\ 0.1526 \\ 0.1949 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.2423 & 0.8403 & 0.1715 \\ 0.4799 & 0.3917 & 0.4074 \\ 0.8481 & 0.4412 & 0.6260 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.9682 \\ 0.6370 \\ 0.8687 \end{bmatrix}.$$

Ao utilizarmos o Lema 4 não foi possível obter solução factível com a busca de  $\xi \in (-1, 1)$ . Aplicando o Teorema 7, foram obtidas soluções a partir de  $p = 2$ . Os ganhos para  $p = 2$  são apresentados na sequência:

$$K_1 = [-0.5795 \ -0.1909 \ -0.1740],$$

$$K_2 = [-0.6041 \ -1.1337 \ -1.0236],$$

$$K_3 = [-0.2453 \ -0.4853 \ -0.1686].$$

Para ilustrar a efetividade dos ganhos obtidos, uma investigação da resposta temporal foi realizada, utilizando 100 condições iniciais distintas e sinais de chaveamento arbitrárias para cada simulação, geradas com o auxílio de um gerador pseudo-aleatório uniforme<sup>1</sup>. O resultado da simulação é apresentado na Figura 2.

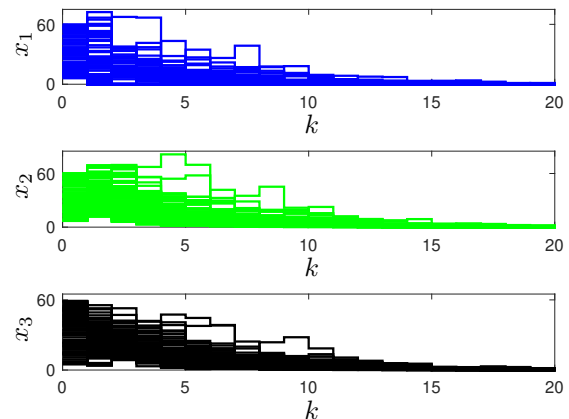


Figura 2. Conjunto de respostas temporais considerando condições iniciais e lei de chaveamento aleatórias.

<sup>1</sup> Foi utilizado a função rand(), limitada no intervalo correspondente, do MATLAB

É possível observar que as trajetórias de todos os estados convergem para zero, confirmando a solução do problema de controle. Ademais, os estados apresentam trajetórias não negativas, confirmando a positividade da malha fechada.

## 5. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou novas condições na forma de LMIs para o projeto de controle por realimentação de estados para sistemas positivos chaveados discretos no tempo. A sequência de chaveamento não é conhecida a priori. Uma função de Lyapunov que faz uso de um vetor de estados aumentado contendo estados deslocados foi considerada, e o Lema de Finsler foi empregado na obtenção das condições. Foram propostas condições para projeto de controladores dependentes de modos e independentes de modos. Experimentos numéricos ilustraram a eficácia e o potencial da técnica apresentada. Como trabalhos futuros, os autores estão investigando o projeto de controle por realimentação de saída.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao GCOM pelo suporte e à Prof. Cecília F. Morais pelas discussões.

## REFERÊNCIAS

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11), 1883–1887.
- de Oliveira, M.C. and Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.
- Deaecto, G.S. and Geromel, J.C. (2017).  $\mathcal{H}_2$  state feedback control design of positive switched linear systems. In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, 3136–3141. Toulouse, France.
- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. *IET Control Theory & Applications*, 4(7), 1201–1210.
- Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- Hernandez-Vargas, E., Colaneri, P., Middleton, R., and Blanchini, F. (2011). Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(10), 1093–1111.
- Huang, J., Ma, X., Che, H., and Han, Z. (2020). Further Result on Interval Observer Design for Discrete-Time Switched Systems and Application to Circuit Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 67(11), 2542–2546.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition.
- Lacerda, M.J. and Seiler, P. (2017). Stability of uncertain systems using Lyapunov functions with non-monotonic terms. *Automatica*, 82, 187–193. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.04.042>.
- Lacerda, M.J. and Gomide, T.d.S. (2020). Stability and stabilisability of switched discrete-time systems based on structured Lyapunov functions. *IET Control Theory and Applications*, 14(5), 781–789.
- Liu, T., Wu, B., Wang, Y.E., and Liu, L. (2017). New stabilization results for discrete-time positive switched systems with forward mode-dependent average dwell time. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 39(2), 224–229.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 284–289. Taipei, Taiwan.
- Pessim, P.S.P., Lacerda, M.J., and Agulhari, C.M. (2018). Parameter-dependent Lyapunov functions for robust performance of uncertain systems. In *Joint 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, 441–446. Florianópolis, SC, Brazil.
- Pessim, P.S.P., Leite, V.J.S., and Lacerda, M.J. (2019). Robust performance for uncertain systems via Lyapunov functions with higher order terms. *Journal of The Franklin Institute*, 356(5), 3139–3156.
- Spagolla, A., Morais, C.F., Frezzatto, L., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2018). Controle por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo. In *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*, 1–6. João Pessoa, PB, Brasil.
- Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4), 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Tong, Y., Wang, C., and Zhang, L. (2012). Stabilisation of discrete-time switched positive linear systems via time- and state-dependent switching laws. *IET Control Theory & Applications*, 6(11), 1603.
- Torikai, H. and Saito, T. (1998). Synchronization of chaos and its itinerancy from a network by occasional linear connection. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(4), 464–472.
- Zhang, L., Cui, N., Liu, M., and Zhao, Y. (2011). Asynchronous Filtering of Discrete-Time Switched. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58(5), 1109–1118.
- Zhu, F. and Antsaklis, P.J. (2015). Optimal control of hybrid switched systems: A brief survey. *Discrete Event Dynamic Systems*, 25(3), 345–364.