

# Projeto de controladores PI para sistemas lineares utilizando técnicas de análise de estabilidade robusta<sup>★</sup>

Leonardo F. Sabra,<sup>\*</sup> Ricardo C. L. F. Oliveira,<sup>\*</sup>  
Pedro L. D. Peres<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP  
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil  
(e-mails: leonardo.sabra@gmail.com, {ricfow,  
peres}@dt.fee.unicamp.br).

---

**Abstract:** The aim of this work is to investigate the problem of PI (Proportional-Integral) control design for linear systems using robust stability analysis conditions. Assuming that the proportional and integral gains are confined into limited intervals, a condition for closed-loop stability is formulated in terms of a matrix with two uncertain parameters. Using robust stability analysis jointly with domain partitioning techniques, a synthesis procedure that provides a family of stabilizing gains is proposed, also qualifying the gains in terms of some performance criterion and identifying regions of instability. The accuracy of the technique can be arbitrarily adjusted, demanding proportional computational effort. Numerical experiments based on a practical model illustrate the results, exploring different techniques for stability analysis (LMIs and Hurwitz determinant) and semidefinite program solvers.

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é investigar o problema de projeto de controladores PI (Proporcional-Integral) para sistemas lineares utilizando condições de análise de estabilidade robusta. Considerando que os ganhos proporcional e integral estão confinados em faixas limitadas, uma condição para a estabilidade do sistema em malha fechada é formulada em termos de uma matriz com dois parâmetros incertos. Utilizando condições de análise de estabilidade robusta conjuntamente com técnicas de particionamento de domínios, propõe-se um procedimento de síntese que fornece uma família de ganhos estabilizantes, além de qualificar os ganhos em termos de algum critério de desempenho e identificar regiões de instabilidade. A acurácia da técnica pode ser ajustada de maneira arbitrária, demandando esforço computacional proporcional. Experimentos numéricos baseados em um modelo prático ilustram os resultados, explorando diferentes técnicas de análise de estabilidade (LMIs e determinante de Hurwitz) e resolvidores de programação semidefinida.

**Keywords:** PI control; robust stability analysis; Hurwitz determinant,  $\mathcal{H}_\infty$  norm; linear matrix inequalities.

**Palavras-chaves:** controle PI; análise de estabilidade robusta; determinante de Hurwitz; norma  $\mathcal{H}_\infty$ ; desigualdades matriciais lineares.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, diversos procedimentos de otimização foram sendo incorporados ao estudo de sistemas dinâmicos, provendo condições de análise e de síntese baseadas em programação matemática. Em particular, destacam-se os métodos de programação convexa, como, por exemplo, a programação semidefinida expressa em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (Boyd et al., 1994; Palhares and Gonçalves, 2007; Oliveira and Peres, 2010). Nesse contexto as formulações analíticas dos problemas deixam de ser

o foco das pesquisas, e procura-se expressar as soluções (controladores, filtros, critérios de desempenho, etc.) em termos das variáveis de um problema de otimização.

No contexto de análise de estabilidade robusta, importantes contribuições foram obtidas por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov. Graças aos algoritmos de pontos interiores (Nesterov and Nemirovskii, 1994), capazes de resolver problemas de programação semidefinida (LMIs) em tempo polinomial (Gahinet et al., 1995; Sturm, 1999), as condições baseadas na existência de funções de Lyapunov puderam ser resolvidas de forma eficiente (Boyd et al., 1994), atraindo um grande esforço de pesquisa para a área. Depois da estabilidade quadrática, surgiram métodos baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, primeiro com dependência linear nos parâmetros e a

---

<sup>★</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e CNPq.

seguir polinomial de grau genérico (Bliman, 2004; Chesi et al., 2005; Oliveira and Peres, 2007). Neste último caso é possível provar que se o sistema for robustamente estável, as condições (formuladas em termos de LMIs) sempre fornecem uma solução factível para um grau suficientemente grande da aproximação polinomial. Também destacam-se nesse contexto as técnicas de sub-particionamento do domínio incerto, que permitem a construção de testes conclusivos de estabilidade (Gonçalves et al., 2006) e cômputo de critérios de desempenho com precisão arbitrária (Gonçalves et al., 2007).

Por outro lado, o sucesso alcançado pelas condições de análise não pode ser observado na mesma proporção nas condições de síntese. De fato, técnicas de controle são mais difíceis de serem traduzidas em termos de programação convexa sem a imposição de restrições, tanto nos dados do modelo quanto na formulação do problema de otimização. Essas restrições costumam ser fontes de conservadorismo, que impedem a obtenção de controladores (ou filtros) com desempenho ótimo. Nesse contexto destaca-se a dificuldade de computar controladores de baixa ordem, como os controladores Proporcional-Integral (PI) ou Proporcional-Integral-Derivativo (PID), muito utilizados na prática (Åström and Hägglund, 1995) e que continuam sendo estudados com demandas cada vez mais exigentes de robustez e desempenho (Ho et al., 1995; Takahashi et al., 1997; Zheng et al., 2002). Particularmente sobre o controle PID utilizando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como critério de desempenho, destacam-se, entre outros, Ge et al. (2002); Saeki (2006); Rosinová and Veselý (2007).

O propósito deste artigo é utilizar técnicas de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares com parâmetros incertos para calcular ganhos associados a um controlador PI de modo a estabilizar e garantir algum critério de desempenho para o sistema. Considerando uma faixa limitada de valores para os ganhos proporcional e integral, e reescrevendo o sistema em malha fechada como uma matriz incerta em que os ganhos são os parâmetros desconhecidos, formula-se a busca dos ganhos como um problema de estabilidade robusta. Utilizando condições de estabilidade robusta para sistemas incertos e um procedimento de subdivisão recursiva do domínio, determinam-se regiões estáveis dentro do domínio incerto (caso existam) associadas aos ganhos do controle. Além disso, as regiões estáveis podem ser qualificadas em termos de algum critério de desempenho, como por exemplo um limitante superior para a taxa de decaimento do sistema (associada ao autovalor de maior parte real), ou em termos de alguma norma, como as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . A vantagem da técnica proposta é que a acurácia dos resultados é arbitrária, sendo vinculada à granularidade especificada para a subdivisão do domínio incerto. Quanto menor a granularidade, maior a precisão e o esforço computacional demandado pelo método. A técnica é ilustrada por meio de exemplos numéricos de controle PI de um emulador industrial.

## 2. PRELIMINARES

Considere um sistema linear a tempo contínuo de uma entrada e uma saída na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  são respectivamente o vetor de estados, entrada de controle e saída medida. As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  são conhecidas.

O objetivo deste trabalho é fornecer um procedimento de síntese para a lei de controle na forma  $U(s) = K(s)Y(s)$  (com  $U(s)$  e  $Y(s)$  sendo as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente) em que  $K(s)$  é uma função de transferência dada por

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

com  $k_p, k_i \in \mathbb{R}$ . Essa lei de controle é conhecida como PI e uma realização de estados possível para a função de transferência  $K(s)$  é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (2)$$

com  $A_c = 0$ ,  $B_c = 1$ ,  $C_c = k_i$  e  $D_c = k_p$ . A dinâmica de malha fechada pode ser representada na forma

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \quad (3)$$

e a matriz dinâmica em (3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A(k_p, k_i) &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} + k_i \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} BC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_0 + k_i A_1 + k_p A_2 \end{aligned} \quad (4)$$

em que  $A_0, A_1$  e  $A_2$  são matrizes conhecidas. Caso o interesse seja projetar um controlador apenas proporcional, então deve ser escolhido  $A_0 = A$ ,  $A_1 = 0$  e  $A_2 = BC$  (a equação (2) reduz-se a  $u = D_c y$ ,  $D_c = k_p$ ). Considerando que os ganhos  $k_p$  e  $k_i$  estão confinados a faixas limitadas na forma

$$\underline{a} \leq k_p \leq \bar{a}, \quad \underline{b} \leq k_i \leq \bar{b}$$

$A(k_p, k_i)$  pode ser considerada uma matriz com incerteza afim (ou hiperretangular) (Boyd et al., 1994). Inicialmente o objetivo é determinar regiões retangulares estáveis (todos os autovalores de  $A(k_p, k_i)$  possuem parte real negativa) dentro dos domínios de  $k_i$  e  $k_p$ , sendo que as dimensões mínimas dos retângulos são especificadas *a priori*. Por exemplo, considere  $k_p \in [1 \ 2]$  e  $k_i \in [1 \ 2]$  com 0,1 para a menor granularidade dos dois parâmetros. A Figura 1 ilustra uma situação em que existem valores de  $k_i$  e  $k_p$  que estabilizam o sistema (retângulos em azul). Nesse caso, são duas regiões disjuntas. A região de estabilidade poderia ser mais refinada com menores valores para a granularidade mínima, exigindo uma maior complexidade computacional para ser determinada.

## 3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A técnica de síntese consiste basicamente na aplicação de condições de estabilidade robusta no domínio incerto. Caso o teste de estabilidade forneça uma solução afirmativa, então a região retangular considerada é estável, isto é, todos os valores de  $k_i$  e  $k_p$  pertencentes ao retângulo correspondente são estabilizantes. Caso contrário, divide-se a região retangular, por exemplo, em quatro subregiões (também retangulares). Aplica-se o mesmo procedimento em cada uma das quatro subregiões e prossegue-se subdividindo as regiões em que o teste de estabilidade falha até que

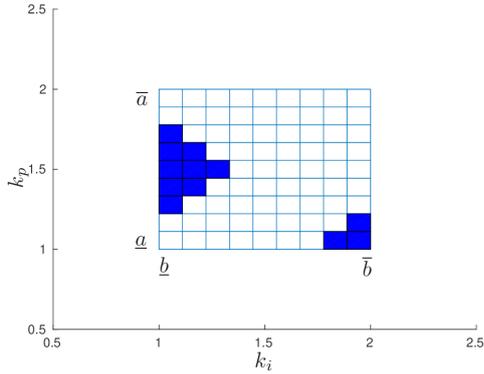


Figura 1. Região de estabilidade (retângulos azuis) da matriz  $A(k_p, k_i)$  em função dos parâmetros  $k_p \in [a, \bar{a}]$  e  $k_i \in [b, \bar{b}]$ .

seja encontrada uma região garantidamente instável (um dos vértices do retângulo é instável) ou até a granularidade mínima pré-especificada ser atingida. Como resultado espera-se uma malha em que os retângulos estáveis estejam identificados, como no exemplo da Figura 1.

A condição de estabilidade robusta é baseada na solução das desigualdades de Lyapunov

$$A(k_p, k_i)^T P(k_p, k_i) + P(k_p, k_i) A(k_p, k_i) < 0, P(k_p, k_i) > 0$$

em que  $P(k_p, k_i)$  é a matriz de Lyapunov, por exemplo, dependendo de maneira afim dos parâmetros  $k_i$  e  $k_p$ . Nesse caso as desigualdades possuem dependência quadrática nos parâmetros  $k_i$  e  $k_p$ , e requerem procedimentos de relaxação para serem testadas (não basta testar os vértices do domínio incerto). Neste trabalho utilizam-se as relaxações propostas em Oliveira and Peres (2007).

Como uma alternativa, também é possível obter uma condição de estabilidade robusta baseada no determinante de Hurwitz (Gantmacher, 1959), que resulta no teste de positividade de polinômios escalares e pode ser mais eficiente do ponto de vista computacional. Os dois métodos de estabilidade apresentados são apenas suficientes e, por essa razão, o procedimento de subdivisão de domínio é de suma importância para a obtenção de um algoritmo conclusivo, isto é, que encontre as regiões estáveis (se existirem), ou que afirme que não existem regiões estáveis (considerando a granularidade mínima assumida). Note que uma deficiência da técnica baseada no determinante de Hurwitz em relação às desigualdades de Lyapunov é a inviabilidade de extensão para tratar parâmetros variantes no tempo.

Como uma contribuição adicional, propõe-se uma qualificação das regiões estáveis, garantindo um certo nível de desempenho para o sistema em malha fechada. Por exemplo, certifica-se um limitante superior para a taxa de decaimento das trajetórias do sistema dentro do retângulo. Nesse caso, é necessário computar o menor valor de  $\gamma > 0$  tal que as desigualdades  $P(k_p, k_i) > 0$  e

$$A(k_p, k_i)^T P(k_p, k_i) + P(k_p, k_i) A(k_p, k_i) < -\gamma P(k_p, k_i)$$

sejam verificadas. O valor  $\gamma/2$  é um limitante superior para a taxa de decaimento, e pode ser utilizado como um critério de desempenho dos ganhos associados ao retângulo correspondente.

Um segundo critério investigado neste trabalho é dado pela norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que pode ser interpretada como o pico do diagrama de módulo de Bode de sistemas de uma entrada e uma saída, isto é, a maior amplificação que um sinal senoidal pode receber ao ser aplicado na entrada do sistema. Em projetos de controle, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é comumente utilizada como um critério de desempenho que garante um limitante para a influência de perturbações externas na dinâmica da planta. Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_w w \\ z &= C_z x + D_z u + D_{zw} w \\ y &= C_y x + D_{yw} w \end{aligned}$$

em que  $w \in \mathbb{R}^r$  é uma entrada exógena e  $z \in \mathbb{R}^q$  é a saída controlada. Essa planta conectada com o controlador PI dado em (2) possui a seguinte dinâmica de malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{cl} \bar{x} + B_{cl} w \\ z &= C_{cl} \bar{x} + D_{cl} w \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_w + BD_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= [C_z + D_z D_c C \quad D_z C_c], \quad D_{cl} = [D_{zw} + D_z D_c D_{yw}] \end{aligned}$$

Um custo garantido para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (5) pode ser computado por meio da solução das seguintes desigualdades:  $P = P^T > 0$  e

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} & P B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl} \\ \star & D_{cl}^T D_{cl} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

Essa última desigualdade é conhecida como *Bounded Real Lemma* e, se satisfeita, garante que  $A_{cl}$  é Hurwitz e que  $\gamma$  é um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (5). Para que o método proposto possa ser aplicado, as matrizes  $A_{cl}$ ,  $B_{cl}$ ,  $C_{cl}$  e  $D_{cl}$  são decompostas como em (4), isto é, evidenciando  $k_p$  e  $k_i$  como os parâmetros incertos, considerando a matriz  $P(k_p, k_i)$  também dependente de parâmetros, utilizando a extensão do *Bounded Real Lemma* para sistemas incertos.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O pseudocódigo de um algoritmo de estabilização com controle PI que garante um certo nível de desempenho para o sistema em malha fechada é apresentado no Algoritmo 1, principal contribuição deste trabalho.

Os parâmetros de entrada do algoritmo são: as matrizes do sistema, as faixas (valores mínimos e máximos) dos parâmetros  $k_p$  e  $k_i$ , as áreas mínimas a partir das quais não ocorrem mais particionamentos, o critério de desempenho (foram implementados taxa de decaimento e norma  $\mathcal{H}_\infty$ ), método e parâmetro de tolerância para o desempenho relativo dos vértices.

Com relação às áreas mínimas de particionamentos, visando oferecer um maior controle ao usuário, é definida uma área mínima para as regiões estáveis e outra para as regiões instáveis. O objetivo de definir uma área mínima para as regiões estáveis é viabilizar um refinamento maior do critério de desempenho escolhido. Com relação às regiões instáveis, a área mínima permite a identificação de mais regiões estáveis, pois a única maneira de realizar essa tarefa é fazendo mais particionamentos do domínio. Ressalte-se que a diminuição dessas áreas mínimas pode gerar um grande impacto no tempo computacional do método.

---

**Algoritmo 1** Controle PI.

---

```

1: Função: controlePI
2: Entradas: matrizes do sistema; faixas de  $k_p$  e  $k_i$ ; áreas mínimas; método para cálculo; critério de desempenho; desempenho relativo dos vértices;
3: Saídas: intervalos de estabilidade; desempenho dos intervalos; tempo de cálculo; número de iterações;
4: Avalia intervalos de  $k_p$  e  $k_i$ ;
5: Se estável Então
6:     Se (desempenho relativo dos vértices for insuficiente & área maior que a mínima) Então
7:         Dividir a região em quatro;
8:         Fazer uma nova chamada da função para cada partição nova;
9:     Senão
10:        Armazenar intervalo e critério de desempenho associado;
11:    Fim Se
12: Fim Se
13: Se instável Então
14:     Se área menor que a mínima Então
15:         Dividir a região em quatro;
16:         Fazer uma nova chamada da função para cada partição nova;
17:     Senão
18:        Armazenar intervalo e critério de desempenho associado;
19:    Fim Se
20: Fim Se
    
```

---

Como métodos, se for investigada a taxa de decaimento, pode-se usar um problema de autovalor generalizado (do inglês, *Generalized Eigenvalue Problem* — GEVP), bisseção na variável  $\gamma$  e LMIs, ou ainda determinantes de Hurwitz (realizando uma adaptação da técnica para poder incluir a taxa de decaimento no teste de estabilidade). A principal vantagem do determinante de Hurwitz é que não é necessário recorrer à programação semidefinida, que em geral é mais custosa computacionalmente.

No caso da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , empregam-se LMIs e a minimização do limitante da norma. A fim de evitar a resolução das LMIs para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  nos intervalos instáveis, foi acrescentada uma verificação dos autovalores nos vértices do retângulo, sendo possível concluir sobre a instabilidade sem resolver as LMIs (poupando esforço computacional) caso pelo menos um dos vértices tenha um autovalor com parte real maior ou igual a zero.

Para aumentar o controle sobre a evolução do algoritmo, define-se um parâmetro que pode interromper o processo de subdivisão mesmo que a área mínima de particionamento (nas regiões estáveis) não tenha sido atingida. Primeiramente avalia-se a diferença relativa entre o desempenho computado nos vértices e o desempenho computado para o retângulo associado (em geral, apenas um limitante superior). Se a diferença relativa for menor que um certo limiar pré-especificado (denominado desempenho relativo dos vértices), então interrompe-se o particionamento.

Com relação aos parâmetros de saída, um dos principais é uma lista dos intervalos detectados como estáveis e instáveis. Cada intervalo é informado pelos valores mínimos e máximos de  $k_p$  e  $k_i$  e, no caso dos intervalos estáveis,

um valor bem alto é atribuído à norma  $\mathcal{H}_\infty$  (por exemplo,  $10^6$ ), pois não é possível computar a norma para intervalos instáveis. O algoritmo também fornece como parâmetros de saída o tempo de cálculo e o número de iterações realizadas.

O algoritmo é adaptável para buscar por ganhos que são apenas estabilizantes, sem critério de desempenho associado, podendo nesse caso ser utilizado como uma etapa inicial para métodos de controle iterativos, que minimizam algum custo ou que impõem uma estrutura específica para o controlador, e que precisam de ganhos estabilizantes iniciais. É importante salientar que a vantagem de trabalhar apenas com estabilização é a maior velocidade do método, que em geral demanda cálculos menos complexos quando comparados aos associados a critérios de desempenho.

Como comentário final, note que a busca pelos valores de  $k_p$  e  $k_i$  dentro de faixas pré-especificadas poderia ser realizada por meio de um procedimento de *grid*. Isto é, testa-se um conjunto de pares de valores  $(k_i, k_p)$  e determina-se a maior taxa de decaimento ou a menor norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Embora esse procedimento seja simples de implementar, a precisão do resultado depende da granularidade do *grid*, que é inversamente proporcional ao tempo computacional demandado. Por outro lado, o algoritmo proposto, mesmo com precisões elevadas, pode requerer um tempo computacional menor para convergir, pois explora a região de busca de um modo inteligente. Além disso, o procedimento baseado em *grid* está limitado ao tratamento de sistemas precisamente conhecidos, ao contrário da técnica proposta, que pode ser estendida para trabalhar com sistemas incertos e variantes no tempo.

## 5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Os experimentos apresentados na sequência foram realizados em um computador pessoal com processador Intel(R) Core(TM) i5-4210U CPU @ 1.70GHz 2.40 GHz, 4,0 GB de memória RAM, Windows 10, Matlab versão R2017a. Para a taxa de decaimento, o método GEVP foi testado por meio do comando *gevp* do LMI Control Toolbox (Gahinet et al., 1995). A bisseção foi implementada utilizando o *solver* Mosek (Andersen and Andersen, 2000), que possui uma funcionalidade específica para esse fim. Nesse caso a declaração das LMIs foi realizada com o auxílio do *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019), que trabalha conjuntamente com o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004). Com relação à norma  $\mathcal{H}_\infty$ , duas implementações foram feitas. A primeira utiliza a função *mincx* do LMI Control Toolbox e a segunda o *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019) e o resolvidor Mosek. A matriz de Lyapunov  $P(k_p, k_i)$  foi considerada com dependência afim em  $k_p$  e  $k_i$ .

O problema de controle investigado é o controle PI de um modelo de Emulador Industrial (mostrado na Figura 2), cujas matrizes da representação de estados (1) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -kg_r^{-2}/J_d^* & -c_1/J_d^* & kg_r^{-1}/J_d^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ kg_r^{-1}/J_\ell & 0 & -k/J_\ell & -c_2/J_\ell \end{bmatrix} \\
 B = [0 \ k_{hw}/J_d^* \ 0 \ 0]^T, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$



Figura 2. Emulador Industrial, Modelo 205 da *Educational Control Products* (ECP) (ECP, 2000).

Tabela 1. Regiões estáveis com as 5 maiores diferenças entre os valores de  $\gamma$  calculados pelos métodos GEVP e bisseção.

Bisseção (Tempo: 106,66 s)	GEVP (Tempo: 5896,60 s)
regiões $[k_i; k_p], \gamma$	regiões $[k_i; k_p], \gamma$
$\begin{bmatrix} -0,2188 & -0,1875 \\ -0,1875 & -0,1563 \end{bmatrix}, -0,1553$	$\begin{bmatrix} -0,2188 & -0,1875 \\ -0,1875 & -0,1563 \end{bmatrix}, -0,1536$
$\begin{bmatrix} -0,1250 & -0,0938 \\ -0,1250 & -0,0938 \end{bmatrix}, -0,2129$	$\begin{bmatrix} -0,1250 & -0,0938 \\ -0,1250 & -0,0938 \end{bmatrix}, -0,2139$
$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,4375 \\ -0,4375 & -0,3750 \end{bmatrix}, -0,0234$	$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,4375 \\ -0,4375 & -0,3750 \end{bmatrix}, -0,0244$
$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,4688 \\ -0,4688 & -0,4375 \end{bmatrix}, -0,0391$	$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,46885 \\ -0,4688 & -0,4375 \end{bmatrix}, -0,0400$
$\begin{bmatrix} -0,1250 & -0,0625 \\ -0,3750 & -0,3125 \end{bmatrix}, -0,1660$	$\begin{bmatrix} -0,12507 & -0,0625 \\ -0,3750 & -0,3125 \end{bmatrix}, -0,1668$

e os parâmetros:  $J_d = 4,07 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  (momento de inércia do disco de atuação),  $J_{dl} = 6,25 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  (momento de inércia do disco de carga),  $m_{wl} = 4 \times 0,5 \text{ kg}$  (massa total sobre o disco de carga),  $r_{wl} = 0,1 \text{ m}$  (distância das massas ao centro do disco de carga),  $r_{mw} = 0,025 \text{ m}$  (raio das massas sobre o disco de carga),  $J_l = J_{dl} + m_{wl}(r_{wl}^2 + r_{mw}^2/2) \text{ kg m}^2$  (momento de inércia total no disco de carga),  $J_p = 7,8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$  (momento de inércia do pino SR),  $g_r = 4, g'_r = 2$  (relação de velocidades 4:1),  $k = 8,45 \text{ N rd}$  (constante elástica da correia flexível),  $k_{hw} = 5,76$  (ganho de hardware),  $c_1 = 7,38 \times 10^{-4}$ ,  $c_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ N m/rad}$  (coeficientes de atrito viscoso nos discos) e  $J'_d = J_d + J_p(g'_r)^{-2}$  (inércia total no disco de atuação).

O primeiro teste realizado é a aplicação do Algoritmo 1 considerando  $k_p \in [-0,5 \ 0]$  e  $k_i \in [-0,5 \ 0]$ , área mínima igual a 0,001 (regiões estáveis e instáveis) e 10% para o desempenho relativo dos vértices. O algoritmo é executado para dois métodos de cálculo da taxa de decaimento, GEVP e bisseção. Os dois métodos fornecem resultados similares, com 46 retângulos estáveis e 111 retângulos instáveis.

A Tabela 1 mostra as regiões estáveis com as 5 maiores diferenças entre os valores de  $\gamma$  calculados pelos dois métodos, sendo que a maior diferença foi de 0,0017, demonstrando que a acurácia dos dois métodos é muito similar. Por outro lado, os dois métodos demandaram um esforço computacional muito discrepante, pois o método GEVP levou 55 vezes mais tempo que o método da bisseção. O resultado evidencia que a rotina de bisseção interna utilizada pelo Mosek permite computar a taxa de decaimento de forma bem mais eficiente. A Figura 3 mostra os resultados

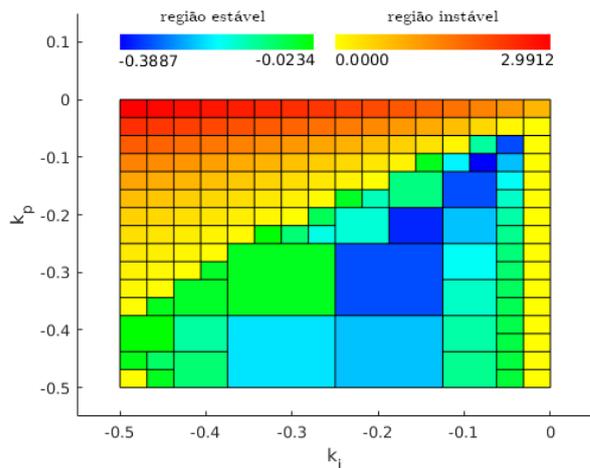


Figura 3. Regiões de estabilidade do Emulador em função de  $k_p \in [-0,5 \ 0]$  e  $k_i \in [-0,5 \ 0]$  utilizando a bisseção e a taxa de decaimento como critério de desempenho.

obtidos com bisseção (a mesma figura seria obtida com os resultados do GEVP em termos das cores). As regiões na cor azul escura são as capazes de fornecer as maiores taxas de decaimento, isto é, uma convergência mais acelerada das trajetórias para a origem. Observe que existem retângulos maiores na parte central inferior do gráfico, indicando que nessa região o valor da taxa de decaimento dos retângulos está próximo (em termos relativos) da taxa de decaimento dos vértices dos respectivos retângulos e, por essa razão, o procedimento de subdivisão não produz um refinamento maior nessas áreas. Finalmente, note que a representação de estados (3) não admite  $A(k_p, k_i)$  estável com  $k_i$  nulo. Por essa razão, era esperado que os retângulos com pelo menos um vértices com  $k_i = 0$  seriam instáveis.

O algoritmo também foi aplicado utilizando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como critério de desempenho, considerando  $B_w=0,1B$ ,  $C_z=C$  e  $D_z=D_{zw}=D_{yw}=0$ , e os resultados são apresentados nas Figuras 4 e 5. Note que os gráficos apresentados podem ajudar o projetista a encontrar ganhos PI que forneçam o melhor compromisso entre taxa de decaimento das trajetórias e rejeição de distúrbios. Para isso basta escolher as regiões que tenham em comum a cor azul escura.

Foram obtidos 49 retângulos estáveis e 111 retângulos instáveis em um tempo de 10,59 segundos com 213 iterações quando se utiliza o Mosek para resolver as LMIs, e 46 intervalos estáveis e 129 intervalos instáveis em um tempo de 303,79 segundos com 233 iterações quando as LMIs são resolvidas com a função mincx. Observa-se que o Mosek obteve as mesmas regiões estáveis tanto para a taxa de decaimento quanto para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , enquanto a função mincx precisou de um tempo maior para resolver as LMIs e encontrou um número menor de intervalos estáveis. Uma explicação para esse fato é que para regiões com autovalores no semiplano esquerdo, mas muito próximos do eixo imaginário, o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de LMIs começa a apresentar instabilidade numérica, eventualmente não sendo capaz de computar a norma em regiões estáveis. Esse comportamento depende das características do método de ponto interior utilizado para resolver as LMIs. Com base nos resultados obtidos para esse exemplo,

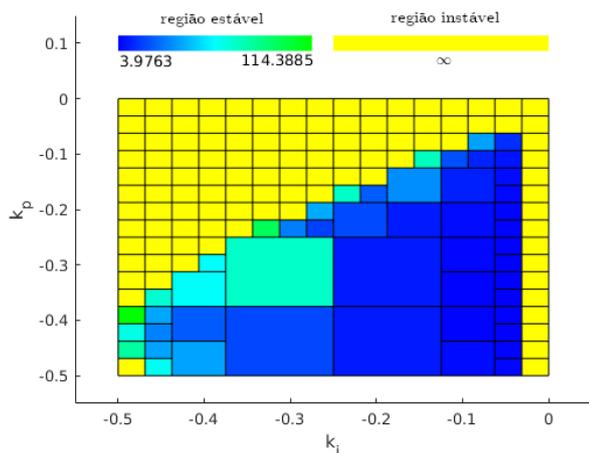


Figura 4. Regiões de estabilidade do Emulador em função de  $k_p \in [-0,5 \ 0]$  e  $k_i \in [-0,5 \ 0]$  utilizando o resolvidor Mosek e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como critério de desempenho.

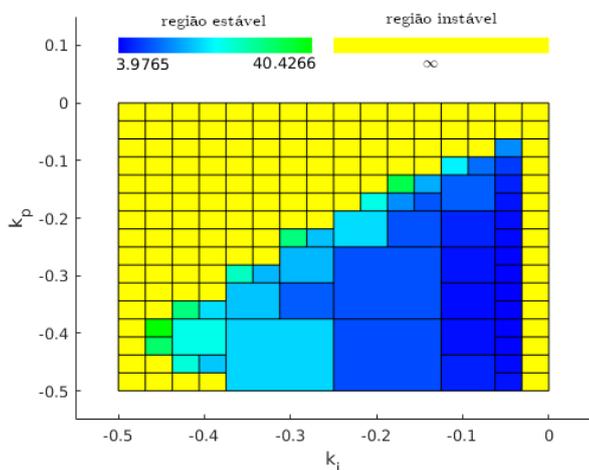


Figura 5. Regiões de estabilidade do Emulador em função de  $k_p \in [-0,5 \ 0]$  e  $k_i \in [-0,5 \ 0]$  utilizando a função mincx e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como critério de desempenho.

pode-se afirmar que bisseção fornece uma implementação mais acurada. Para ilustrar os resultados, duas regiões são selecionadas para realizar uma simulação temporal. A primeira é a melhor região encontrada pelo algoritmo, dada por

$$k_i \in [-0,0625 \ -0,0312], \quad k_p \in [-0,3438 \ -0,3125] \quad (6)$$

com custo garantido dado por  $\gamma = 3,9765$  (a Figura 6 mostra o diagrama de Bode do sistema controlado para diversos valores de  $k_i$  e  $k_p$  nas faixas dadas em (6), ilustrando a validade do custo garantido computado). Arbitrariamente, escolhem-se os limitantes inferiores dos dois intervalos, isto é,  $k_i = -0,0625$  e  $k_p = -0,3438$ . A segunda região escolhida é dada por  $k_i \in [-0,3750 \ -0,2500]$  e  $k_p \in [-0,5000 \ -0,3750]$ , que possui um custo garantido  $\gamma = 19,2622$  (aproximadamente cinco vezes maior). Também escolhem-se arbitrariamente os limites inferiores das faixas, isto é,  $k_i = -0,3750$  e  $k_p = -0,5000$ . O sinal de perturbação  $w(t) = 0,1 \exp(-0,5t) \text{sen}(30t)$  é utilizado para realizar a simulação. A Figura 7 mostra a saída  $z(t)$  do sistema controlado pelos dois pares de ganhos selecionados,

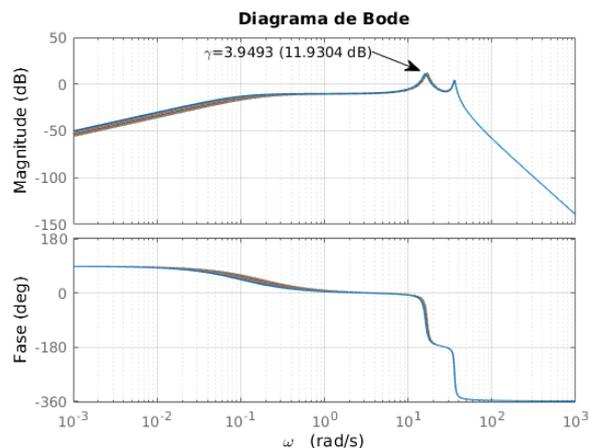


Figura 6. Diagrama de Bode do Emulador em malha fechada para diversos valores de  $k_i$  e  $k_p$  na região dada em (6).

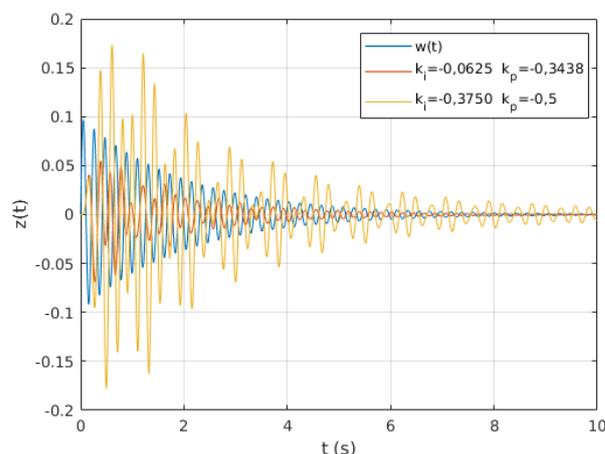


Figura 7. Resposta do sistema Emulador para dois controladores PI e  $w(t) = 0,1 \exp(-0,5t) \text{sen}(30t)$  para dois controladores PIs.

ilustrando a maior atenuação de ruídos  $w(t)$  na saída  $z(t)$  proporcionada pelo par  $(k_i; k_p) = (0,0625; -0,3438)$ .

Como experimento final, o algoritmo que trata apenas a estabilização foi aplicado, considerando dois métodos de estabilidade robusta: determinante de Hurwitz e LMIs. Com objetivo de aumentar o número de iterações e assim proporcionar uma melhor avaliação da eficiência dos métodos em cenários que demandam uma maior complexidade numérica, três valores diferentes são considerados para as áreas mínimas, em particular para a área mínima nas regiões instáveis: 0,09, 0,05 e 0,005. Os menores valores da área mínima certamente demandam um maior número de subdivisões nos retângulos que em princípio são instáveis, aumentando o número de iterações.

Os resultados, apresentados na Tabela 2, mostram que o método baseado no determinante de Hurwitz é mais eficiente, sendo 1,8 vez mais rápido (em média) que a bisseção com LMIs, merecendo ser mais profundamente investigado, principalmente por se adaptar melhor a implementações de computação paralela.

Tabela 2. Resultados obtidos para os ganhos estabilizantes do Emulador com  $k_p \in [-1 \ 1]$  e  $k_i \in [-1 \ 1]$ .

método	área min.	tempo (s)	it.	faixas $[k_i; k_p]$
det. Hurwitz	0,09	22,58	49	$\begin{bmatrix} -0,2500 & 0 \\ -0,5000 & -0,2500 \end{bmatrix}$
	0,05	93,19	185	$\begin{bmatrix} -0,3750 & -0,2500 \\ -0,3750 & -0,2500 \end{bmatrix}$
	0,005	344,20	698	$\begin{bmatrix} -0,1875 & -0,1250 \\ -0,1875 & -0,1250 \end{bmatrix}$
Bisseção	0,09	60,58	85	–
	0,05	146,95	185	$\begin{bmatrix} -0,3750 & -0,2500 \\ -0,3750 & -0,2500 \end{bmatrix}$
	0,005	652,93	698	$\begin{bmatrix} -0,1875 & -0,1250 \\ -0,1875 & -0,1250 \end{bmatrix}$

## 6. CONCLUSÃO

Este trabalho propôs um procedimento de síntese de controladores PI para sistemas lineares. A partir de limitantes para os ganhos integral e proporcional e de uma precisão pré-especificados, a técnica é capaz de encontrar um controlador estabilizante ou concluir que tal controlador não existe. Além disso, o método também pode tratar critérios de desempenho como a taxa de decaimento e a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , como ilustrado neste trabalho.

A metodologia proposta pode ser estendida para tratar o projeto de controlares PID, ou incluir nos modelos lineares parâmetros incertos, demandando porém uma maior complexidade computacional para realizar a subdivisão do espaço paramétrico.

## REFERÊNCIAS

*Model 220: Industrial Plant Emulator*, 2000. [http://www.ecpsystems.com/controls\\_emulator.htm](http://www.ecpsystems.com/controls_emulator.htm).

C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. <http://rolmip.github.io>.

E. D. Andersen and K. D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, pages 197–232. Springer US, 2000. <http://www.mosek.com>.

K. J. Åström and T. Häggglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.

P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM J. Control Optim.*, 42(6):2016–2042, 2004.

S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.

G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(3):365–370, March 2005.

P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works, Natick, MA, 1995.

F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1959.

M. Ge, M. Chiu, and Q. Wang. Robust PID controller design via LMI approach. *J. Process Control*, 21:3–13, 2002.

E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and R. C. Mesquita. New approach to robust  $\mathcal{D}$ -stability analysis of linear time-invariant systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(10):1709–1714, October 2006.

E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and R. C. Mesquita.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$   $\epsilon$ -guaranteed cost computation of uncertain linear systems. *IET Control Theory & Appl.*, 1(1):201–209, January 2007.

W. Ho, C. Hang, and L. Cao. Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications. *Automatica*, 31(3):497–502, 1995.

J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://yalmip.github.io>.

Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.

R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In A. P. Feltrin, C. R. Minussi, M. C. M. Teixeira, and R. A. R. Lázaro, editors, *Tutoriais do XVIII CBA*, pages 203–229. Cultura Acadêmica, São Paulo, 2010. ISBN 978-85-7983-061-7.

R. M. Palhares and E. N. Gonçalves. Desigualdades matriciais lineares em controle. In L. A. Aguirre, editor, *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*, volume 1, pages 155–195. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 2007.

D. Rosinová and V. Veselý. Robust PID decentralized controller design using LMI. *Int. J. Comp. Commun. & Control*, 2(2):195–204, 2007.

M. Saeki. Fixed structure PID controller design for standard  $H_\infty$  control problem. *Automatica*, 42(1):93–100, January 2006.

J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Method Softw.*, 11(1–4):625–653, 1999. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.

R. H. C. Takahashi, P. L. D. Peres, and P. A. V. Ferreira. Multiobjective  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost PID design. *IEEE Control Syst. Mag.*, 17(5):37–47, October 1997.

F. Zheng, Q. Wang, and T. H. Lee. On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. *Automatica*, 38:517–526, 2002.