

Estabilização de Sistemas Incertos e com Direção de Controle Desconhecida via Método ADRC e Função de Monitoração

Aline Freixo Teixeira* Josiel Alves Gouvea**
Alessandro Rosa Lopes Zachi** Tiago Roux Oliveira*

* Departamento de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro,
Brasil (e-mail: aline_freixo@hotmail.com; tiagoroux@uerj.br)

** Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
(CEFET/RJ), RJ.

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPEEL)
Laboratório de Controle e Automação (LACEA), Maracanã, RJ
Núcleo de Pesquisa em Mecatrônica (NUPEM), Nova Iguaçu, RJ
(e-mail: alessandro.zachi@cefet-rj.br; josiel.gouvea@cefet-rj.br)

Abstract: This paper proposes an improved active disturbance rejection control (ADRC) method for output tracking of uncertain plants with unknown control direction. A basic design procedure in the ADRC methodology is to assume the exact knowledge of the system control direction, that is, the sign of its input channel coefficient. Recent works have been proposed to relax such a requirement by performing modifications in its control structure. However, despite considering uncertainties in the input coefficient, many variants of the ADRC method still assume the knowledge of the control direction. For solving the latter case, and also aiming to generalize the earlier ADRC results for a larger class of systems, the present work incorporates the concept of monitoring functions in the controller design. It is a switching-based strategy whose main function is to determine the correct sign of the control direction, which is directly related to the sign of the plant input channel coefficient.

Resumo: Este trabalho propõe um método aprimorado de controle com rejeição ativa de distúrbios (ADRC) para o rastreamento de saída aplicado em plantas incertas e com direção de controle desconhecida. Um procedimento básico de projeto na metodologia ADRC é assumir o conhecimento exato da direção de controle do sistema, ou seja, do sinal do coeficiente do canal de entrada. Trabalhos recentes têm sido propostos realizando modificações em sua estrutura de controle. Porém, apesar de considerar as incertezas no coeficiente de entrada, muitas variantes do método ADRC ainda assumem o conhecimento da direção do controle. Para resolver o último caso, e também com o objetivo de generalizar os resultados anteriores do ADRC para uma classe maior de sistemas, o presente trabalho incorpora o conceito de funções de monitoração no projeto do controlador. É uma estratégia baseada em chaveamento cuja função principal é determinar o sinal correto da direção de controle, que está diretamente relacionado ao sinal do coeficiente do canal de entrada da planta.

Keywords: Uncertain Systems, ADRC, Robust Control, Monitoring Function, Unknown Control Directions.

Palavras-chaves: Sistemas Incertos, ADRC, Controle Robusto, Função de Monitoração, Direções de Controle Desconhecidas .

1. INTRODUÇÃO

Os controladores baseados em Rejeição Ativa de Distúrbio (ADRC) são amplamente pesquisados pela comunidade de sistemas de controle desde o trabalho pioneiro (Han, 1998), que introduziu o ADRC como uma solução de controle viável para aplicações industriais, por apresentar uma propriedade de robustez à incertezas paramétricas, dinâmicas não modeladas e distúrbios externos, bastante atrativa. A metodologia básica, que está presente na maioria dos esquemas de variantes ADRC, envolve o uso

de um observador estendido para estimar os sinais não mensuráveis da planta (variáveis de estado, dinâmica não modelada e distúrbios externos) e alimentar uma lei de controle por realimentação de estado (Zhao and Huang, 2012; Linares-Flores et al., 2020). No entanto, como hipótese geral, muitos dos métodos citados assumem o conhecimento do coeficiente de entrada da planta (coeficiente de controle), o que é difícil de inferir no caso de sistemas com conjunto completo de parâmetros incertos (Miklosovic and Gao, 2004). Uma vez que esse tipo de incerteza no coeficiente de controle afeta a amplitude do sinal de con-

trole e/ou sua direção, uma atenção deve ser dada a esse problema.

Neste contexto, em (Zachi et al., 2019) é proposta uma extensão do método ADRC, denominada ADRC com planta modificada (MP-ADRC, *Modified Plant ADRC*), que introduz mudanças na dinâmica de entrada/saída da planta para gerar equações do observador e da lei de controle que não requerem o conhecimento do coeficiente de controle. Apesar de introduzir um grande nível de robustez para sistemas com conjunto completo de incertezas paramétricas, o método MP-ADRC (Zachi et al., 2019) ainda assume o conhecimento da direção de controle. Para lidar com a dificuldade de resolver problemas de rastreamento de saída de sistemas com direções de controle desconhecidas, uma solução apareceu em (Nussbaum, 1983). Desde então, as funções do tipo Nussbaum foram efetivamente incorporadas no projeto de controle de várias propostas na literatura, como as reportadas nas referências (Chen et al., 2013; Wang et al., 2016). Embora, em teoria, essa abordagem possa levar a uma solução rigorosa para o problema, ela também resulta em um comportamento transitório que geralmente é inaceitável. No trabalho de Oliveira (Oliveira et al., 2010), o sinal de controle foi ajustado com base nas *Funções de Monitoração* (Yan et al., 2008) como uma abordagem alternativa para o método de ganho de Nussbaum. É uma função baseada em chaveamento para determinar o sinal correto da direção de controle. A característica atrativa da abordagem de monitoração é sua capacidade de encontrar a direção de controle correta após um número finito de trocas de sinal. Em resumo, as contribuições do presente trabalho são:

- (i) Reforço das propriedades de robustez do esquema MP-ADRC no que diz respeito às incertezas no coeficiente de controle da planta;
- (ii) Generalização do método MP-ADRC para sistemas com direção de controle desconhecida;

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Este artigo considera o problema de controle de rastreamento aplicado a uma classe geral de plantas de ordem n , cuja dinâmica de erro de saída pode ser descrita por:

$$e^{(n)} = f[Y(t), d(t), h(t), y^{(n)*}] + bu(t), \quad (1)$$

$$Y(t) = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T, e(t) := y - y^*.$$

na qual $e(t) \in \mathbb{R}$ é o erro de rastreamento de saída, $y \in \mathbb{R}$ é a variável de saída da planta, $y^* \in \mathbb{R}$ é a trajetória de referência desejada, $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável de entrada da planta e a constante $b \in \mathbb{R}$ é o coeficiente de controle, também conhecido como *ganho de controle*. A notação $e^{(n)}$ é adotada aqui para representar a derivada de ordem n do erro de saída. O termo $f[Y(t), d(t), h(t), y^{(n)*}]$ é uma função definida para reunir as variáveis de estado da planta $Y(t)$, os distúrbios externos, representados pela função $d(t) \in \mathbb{R}$, e as não-linearidades e dinâmicas não modeladas, ambas representadas pela função $h(t) \in \mathbb{R}$. Neste artigo, apenas para simplificar as notações, passa-se a usar $f(t)$ para representar a função $f[Y(t), d(t), h(t), y^{(n)*}]$. Na literatura, é comum denotar $f(t)$ como o *distúrbio generalizado* da planta.

O objetivo é definir uma lei de controle estabilizante para a variável de entrada $u(t)$ para garantir a convergência do

erro de rastreamento $e(t)$ para zero. O projeto de controle deve considerar desconhecidos a direção de controle da planta (sinal de b) e o termo de perturbação $f(t)$.

3. METODOLOGIA

Uma vez que a planta é representada na forma (1), então uma lei de controle u^* que poderia resolver o problema de rastreamento é

$$u(t) = u^* = \left(\frac{1}{b}\right) [-f(t) + v(t)], \quad (2)$$

na qual $v(t) \in \mathbb{R}$ é uma realimentação de estados composta pela combinação linear de $e(t)$ e suas derivadas de ordem superior até $n - 1$. No entanto, tal controlador ideal u^* requer o conhecimento do ganho de controle b , a disponibilidade da função $f(t)$ e também a disponibilidade das derivadas de ordem superior do erro de saída para a implementação de $v(t)$. No entanto, neste artigo considera-se plantas com parâmetros dinâmicos incertos e uma lei de controle por realimentação de saída, logo $f(t)$ e $v(t)$ não podem ser calculados diretamente. Além disso, em um cenário real, uma dificuldade adicional é que o coeficiente de controle b pode ser incerto. Para superar essas dificuldades, este trabalho propõe uma estratégia de controle baseada no método MP-ADRC, uma extensão do método ADRC proposta em (Zachi et al., 2019). A vantagem do MP-ADRC é a sua robustez com relação aos distúrbios externos e à dinâmica não modelada da planta, pois usa um Observador de Estados Estendido (ESO) para estimar tanto a lei de realimentação de estados $v(t)$, como a perturbação generalizada $f(t)$, incluindo o coeficiente de controle b , sendo exigido somente o conhecimento do seu sinal. Para retirar essa última exigência, este trabalho incorpora a *função de monitoração*, proposta em (Oliveira et al., 2010), ao MP-ADRC, levando em consideração uma classe mais geral de sistemas com direções de controle desconhecidas. Um diagrama ilustrativo do esquema de controle proposto é apresentado na Figura 1.

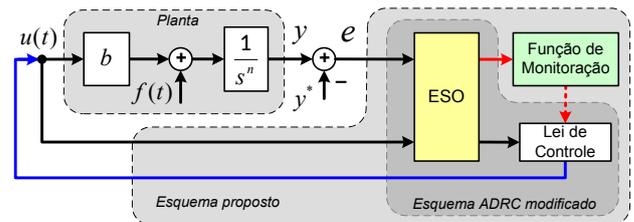


Figura 1. Diagrama de blocos do esquema de controle proposto: MP-ADRC com função de monitoração.

4. ADRC COM PLANTA MODIFICADA

Em (Han, 1998) foi proposta a estratégia ADRC (do inglês *Active Disturbance Rejection Control*), que consiste em utilizar um ESO para estimar o distúrbio generalizado $f(t)$, usando esta estimativa em (2). No entanto, essa estratégia não apresenta boa robustez às incertezas no coeficiente de controle b . Para superar essa limitação, em (Zachi et al., 2019) foi proposta uma extensão do ADRC, denominada ADRC com planta modificada (MP-ADRC, *Modified Plant ADRC*). A ideia principal desta seção é realizar uma breve introdução desta estratégia.

Na equação (1), para fins de análise e projeto, destaca-se a parte linear $a^T Y(t)$ da planta, tornando-a explícita na descrição da dinâmica, que passa a ser descrita por

$$e^{(n)} = \underbrace{a^T Y(t) + g(t)}_{f(t)} + bu(t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a &= [-a_0, -a_1, \dots, -a_{(n-1)}]^T, \\ Y(t) &= [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T, \\ g(t) &= d(t) + h(t) - y^{(n)*}. \end{aligned} \quad (4)$$

Na equação (3), $a \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos parâmetros constantes da parte linear da planta, cujos valores podem ser positivos, negativos ou nulos. Algumas hipóteses iniciais são necessárias:

Hipótese 1. As funções $h(t)$ e $d(t)$ são limitadas e têm derivadas de primeira ordem uniformemente limitadas $\forall t$:

$$H > |h(t)|, \quad D > |d(t)|, \quad \bar{H} > |\dot{h}(t)|, \quad \bar{D} > |\dot{d}(t)|, \quad (5)$$

em que H, D, \bar{H}, \bar{D} são constantes reais positivas conhecidas.

Hipótese 2. Os componentes do vetor a em (3) são limitados por uma constante conhecida $a_M > 0 \in \mathbb{R}$:

$$a_M > |a_i|, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

Hipótese 3. O parâmetro b da planta tem magnitude e sinal incertos, mas é limitado inferiormente por uma constante b_m conhecida, ou seja:

$$b_m < |b|, \quad b_m > 0 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Hipótese 4. A trajetória de referência $y^*(t)$ e suas derivadas de ordem superior são funções uniformemente limitadas $\forall t$.

A Hipótese 1 assume que as amplitudes dos sinais $d(t)$, $h(t)$ e suas derivadas são limitadas. Tal conhecimento a priori é fundamental para a escolha da largura de banda (polos) do estimador. Nos casos nos quais se permite que aqueles sinais possam mudar muito rapidamente, requerem que a largura de banda do observador seja escolhida excessivamente ampla para obter estimativas precisas dos mesmos. É um consenso na literatura de que a suposição sobre a ausência de limites nas amplitudes de $d(t)$ e $h(t)$, poderia permitir que suas taxas de mudança sejam ilimitadas, o que seria muito difícil de estimar na prática. Ao assumir as Hipótese 2 e 3, o presente trabalho visa considerar uma classe mais geral de plantas que possuem um conjunto completo de parâmetros incertos. Na verdade, considerar tal conhecimento reduzido sobre o sistema é um passo importante na direção de reduzir o conservadorismo no desenvolvimento do controlador proposto. A Hipótese 4 é assumida por simplicidade.

A ideia do MP-ADRC é realizar uma transformação estrutural na planta original, obtendo-se um sistema dinâmico resultante com um formato vantajoso. A estratégia é introduzir um ganho constante e ajustável β em série com o erro de saída da planta e um filtro linear estável $Q_0(s)$ em paralelo, conforme ilustrado na Figura 2. Em Zachi et al. (2019), o ganho β é definido como

$$\beta = K_0 \operatorname{sign}(b), \quad (8)$$

no qual $K_0 > 0 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. A constante positiva $\gamma \in \mathbb{R}$ do filtro é escolhida de modo que $(s + \gamma)^n = s^n + \alpha_{(n-1)}s^{(n-1)} + \dots + \alpha_0$. Com base na

configuração da Figura 2, o novo erro de saída $z(t)$ pode ser escrito como:

$$z(t) = \beta e(t) + u_f(t), \quad (9)$$

$$e(t) = y(t) - y^*(t), \quad (10)$$

$$u_f^{(n)} = -\alpha^T \sigma_u + \dot{u}(t), \quad (11)$$

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{(n-1)}]^T, \quad (12)$$

$$\sigma_u = [u_f, \dot{u}_f, \dots, u_f^{(n-1)}]^T. \quad (13)$$

Então, diferenciando (9) n vezes em relação ao tempo, a dinâmica da nova variável de erro de saída $z(t)$, agora com $b_p = \beta b$, será dada por:

$$z^{(n)} = \beta \underbrace{[a^T Y + g(t) + bu(t) - y^{(n)*}]_{e^{(n)}}}_{e^{(n)}} + u_f^{(n)}, \quad (14)$$

$$z^{(n)} = \beta [a^T Y + g(t) - y^{(n)*}] - \alpha^T \sigma_u + b_p u(t) + \dot{u}(t) \quad (15)$$

Da Equação (9):

$$u_f^{(i)} = z^{(i)}(t) - \beta e^{(i)}(t), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Então, substituindo (16) em (14), e também usando (3), pode-se concluir que:

$$z^{(n)} + \alpha^T Z(t) = \beta [a^T Y + g(t) - y^{(n)*}] + \beta \alpha^T e_p + b_p u(t) + \dot{u}(t), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= [z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}]^T, \\ e_p &= [e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n-1)}(t)]^T \end{aligned} \quad (18)$$

o que reduz (15) a:

$$z^{(n)} + \alpha^T Z(t) = \Omega(t) + \dot{u}(t). \quad (19)$$

Uma vez que a parte homogênea da EDO no lado esquerdo de (19) herda os coeficientes do filtro Q_0 (12), então uma lei de controle estabilizante poderia ser dada por:

$$\dot{u}(t) = -\Omega(t). \quad (20)$$

Como $\Omega(t)$ não é conhecido, utiliza-se um ESO para estimá-lo. Definindo então o vetor de estado estendido como

$$\zeta(t) := [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{(n+1)}]^T = [z(t), \dot{z}(t), \dots, \Omega(t)]^T \quad (21)$$

e assumindo que $\Omega(t)$ é diferenciável, a representação de (19) no espaço de estados, na sua forma controlável, é:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_m \zeta + B_\zeta \dot{u} + \Gamma \Omega(t), \\ z(t) &= C \zeta \end{aligned} \quad (22)$$

com

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{(n-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B_\zeta &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0]^T, \quad \Gamma = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T, \\ C &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \end{aligned}$$

Dado que o par (A_m, C) é sempre observável, o ESO de ordem completa para (22)-(23) é então descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}} = A_m \hat{\zeta} + B_\zeta \dot{u} + L e_z, \\ \hat{z} = C \hat{\zeta}, \end{cases} \quad (24)$$

na qual $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ representa o vetor de estados estimados, $e_z := (z - \hat{z})$ o erro de estimação da saída e

$L = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_{(n+1)}]^T \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ o vetor de ganhos do observador definido por

$$\det[sI - (A_m - LC)] = (s + w_0)^{(n+1)}. \quad (25)$$

onde $w_0 > 0$. Note, a partir de (24) e (21), que a equação do erro de estimação $e_\zeta = \zeta - \hat{\zeta}$ e dada por:

$$\dot{e}_\zeta = (A_m - LC)e_\zeta + \dot{\Omega}(t). \quad (26)$$

A partir de (26), utilizando a expressão

$$e_{\zeta(n+1)} = [0, \dots, 0, 1] [sI - (A_m - LC)]^{-1} \Gamma \quad (27)$$

é possível calcular a seguinte relação

$$e_{\zeta(n+1)}(t) = \left[1 - \frac{\omega_0^{n+1}}{(s + \omega_0)^{n+1}} \right] \Omega(t) \quad (28)$$

e

$$\hat{\zeta}_{(n+1)} = \left[\frac{\omega_0^{n+1}}{(s + \omega_0)^{n+1}} \right] \Omega. \quad (29)$$

Portanto, dado que (29) é BIBO estável, conclui-se que, se ω_0 for escolhido como sendo um valor suficientemente maior do que a maior frequência de $\Omega(t)$, com $|\Omega(t)|$ limitado, tem-se $\hat{\zeta}_{(n+1)} \approx \Omega$, a partir da qual se pode propor a seguinte lei de controle

$$\dot{u}(t) = -\hat{\zeta}_{(n+1)} \quad \text{ou} \quad u(t) = -\int_0^t \hat{\zeta}_{(n+1)}(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Para uma demonstração mais detalhada das propriedades de estabilidade do MP-ADRC, incluindo a condição para a limitação de $\Omega(t)$, veja (Zachi et al., 2019).

Embora o MP-ADRC tenha boa robustez à incerteza no coeficiente de controle b da planta, o conhecimento do seu sinal ainda é necessário no projeto do controlador. Na próxima seção, é abordado o relaxamento dessa Hipótese, ao incorporar a técnica da função de monitoração ao MP-ADRC.

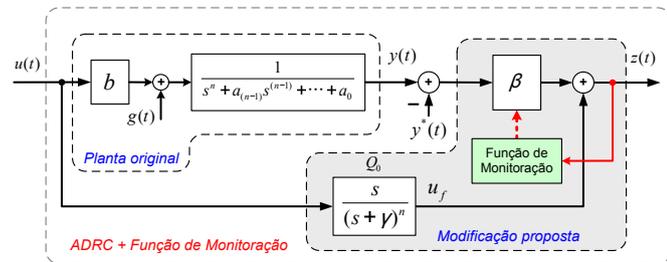


Figura 2. Diagrama de blocos do MP-ADRC (Zachi et al., 2019).

5. UTILIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO NO MP-ADRC

Baseado em chaveamento, a função de monitoração determina o sinal correto da direção de controle, que está diretamente relacionada ao sinal do coeficiente de controle b da planta. Em geral, essa técnica é implementada da seguinte forma:

- (i) Uma função matemática $\varphi_m(t)$ é definida como estritamente positiva e tem um perfil decrescente.
- (ii) A amplitude desta função $\varphi_m(t)$ é continuamente comparada ao módulo da amplitude do erro de saída $|z(t)|$. É importante enfatizar que $\varphi_m(t)$ é escolhida de forma que, se o sistema em malha fechada for

assintoticamente estável, então $\varphi_m(t) \geq |z(t)| \forall t > 0$ se $\varphi_m(0) \geq |z(0)|$.

- (iii) Os instantes de comutação, denotados por t_k , são definidos como aqueles instantes de tempo t nos quais ocorrem as interseções entre as curvas $\varphi_m(t)$ e $|z(t)|$, isto é, quando $\varphi_m(t_k) = |z(t_k)|$. Eles correspondem aos momentos em que a direção de controle é alterada.
- (iv) No entanto, é bem sabido que, embora sob a direção de controle correta, $|z(t)|$ pode exibir um comportamento transitório imprevisível que pode levar à comutações errôneas. Para evitar esse tipo de dificuldade durante a tarefa de monitoração, a função $\varphi_m(t)$ é projetada para ter algumas descontinuidades do tipo "salto" exatamente nos instantes $t = t_k$, conforme exemplificado nos gráficos da Figura 3.
- (v) Conforme as trajetórias de $\varphi_m(t)$ saltam em $t = t_k, t = t_{k+1}, t = t_{k+2}$, e assim por diante, eles assumem formatos ligeiramente diferentes nesses intervalos, que geralmente são descritos pela notação $\varphi_k(t), t \in [t_k, t_{k+1})$.

Neste trabalho, a estratégia de comutação mencionada no item (iii) é realizada em todos os instantes de tempo t_k , alterando o valor de um ganho auxiliar $K_s \in \mathbb{R}$, que pode assumir dois valores possíveis: 1 ou -1 , isto é

$$K_s(t_k) = (-1) \times K_s(t_{k-1}), \quad \forall k = 1, \dots, \infty. \quad (31)$$

Nesse caso, o ganho de saída β em (8) é substituído por um novo ganho β_s dado por:

$$\beta_s = K_s \beta = K_s K_0 \text{sign}(b). \quad (32)$$

Para definir a equação matemática para a função de monitoração $\varphi_m(t)$, é necessário inferir um limite superior para a versão estável da solução da equação de erro $z(t)$, que será discutido na próxima seção. A Figura 4 ilustra o esquema geral de controle proposto neste trabalho.

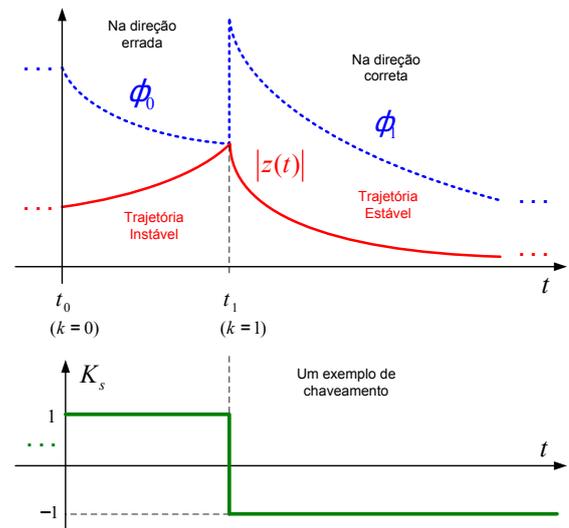


Figura 3. Representação ilustrativa da implementação da função de monitoração (Oliveira et al., 2010) e das trajetórias de $\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ (linha tracejada) e $|z(t)|$ (linha sólida). A função de monitoração é um operador híbrido que salta e segue o fluxo temporal.

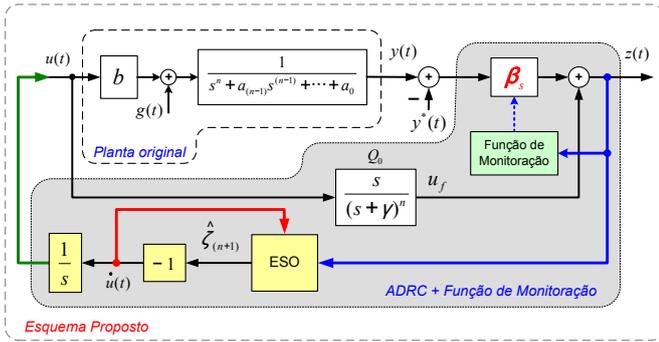


Figura 4. Diagrama de blocos do esquema MP-ADRC com a técnica da função de monitoração.

5.1 Cálculo do limite superior do erro auxiliar

Para determinar o limite da trajetória do erro $z(t)$, primeiro substitui-se (30) em (19), resultando em:

$$z^{(n)} + \alpha^T Z(t) = \Omega(t) - \hat{\zeta}_{(n+1)} = e_{\zeta(n+1)}. \quad (33)$$

Defina-se $z(0), \dot{z}(0), \dots, z^{(n-1)}(0)$ como as condições iniciais de (33). Como o lado esquerdo de (33) corresponde a uma equação linear, invariante no tempo e BIBO estável, pode-se garantir que a limitação de $e_{\zeta(n+1)}$ resultará em um $z(t)$ limitado. Portanto, a solução completa para (33) é descrita por:

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t), \quad (34)$$

onde $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são as respostas de estado zero e entrada zero de (33), respectivamente. Então, para analisar a limitação do erro de estimação do último estado do observador ($e_{\zeta(n+1)}$), considera-se a função de transferência da entrada $\Omega(t)$ para a saída $e_{\zeta(n+1)}$ descrita por (28). Note que (28) é BIBO estável e, portanto, dada a hipótese inicial da limitação de $|\Omega(t)|$, existe uma contante positiva \bar{C} tal que $|e_{\zeta(n+1)}(t)| \leq \bar{C}$. Assim, pode-se concluir que

$$|z_1(t)| \leq \left| \frac{1}{s(s+\gamma)^n} \right| \bar{C}. \quad (35)$$

No entanto, como γ é uma constante real e positiva, então é garantido que $z_1(t)$ não possui percentual de ultrapassagem. Aplicando o Teorema do Valor Final em (35), obtém-se a condição de limitação superior, em estado estacionário,

$$|z_1(t)| \leq \frac{\bar{C}}{\gamma^n}. \quad (36)$$

Para analisar a resposta de entrada zero $z_2(t)$, considere, a partir de (33), que

$$z_2^{(n)} + \alpha^T z_2(t) = 0. \quad (37)$$

Assim, representando (37) no domínio da frequência, tem-se

$$(s+\gamma)^n Z_2(s) = \sum_{k=1}^n s^{n-k} z^{(k-1)}(0) + \alpha_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1-k} z^{(k-1)}(0) + \alpha_{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} (s^{n-2-k} z^{(k-1)}(0)) + \dots + \alpha_1 z(0). \quad (38)$$

Expandindo (38) e agrupando os termos semelhantes, obtém-se

$$(s+\gamma)^n Z_2(s) = s^{n-1} z(0) + s^{n-2} (\dot{z}(0) + \alpha_{n-1} z(0)) + s^{n-3} (\ddot{z}(0) + \alpha_{n-1} \dot{z}(0) + \alpha_{n-2} z(0)) + \dots \quad (39)$$

que pode ser escrito, de forma compacta, como

$$(s+\gamma)^n Z_2(s) = \sum_{k=1}^n s^{n-k} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{n-l} z^{(k-1-l)}(0), \quad (40)$$

na qual $\alpha_n = 1$. Então,

$$Z_2(s) = \frac{s^{n-1} z(0) + \sum_{k=2}^n s^{n-k} \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{n-l} z^{(k-1-l)}(0)}{(s+\gamma)^n}. \quad (41)$$

Assim, calculando os resíduos c_i da expansão em frações parciais de (41), tem-se que

$$c_{n-j} = (-\gamma)^j z(0) + \sum_{k=2}^{j+1} (-\gamma)^{j-k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{n-l} z^{(k-1-l)}(0) \quad (42)$$

na qual $j = 0, 1, \dots, n-1$. Portanto,

$$Z_2(s) = \frac{c_n}{s+\gamma} + \frac{c_{n-1}}{(s+\gamma)^2} + \frac{c_{n-2}}{2!} \frac{2!}{(s+\gamma)^3} + \dots + \frac{c_1}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{(s+\gamma)^n}. \quad (43)$$

Pode-se concluir então, após alguma manipulação algébrica, que $z_2(t)$ pode ser descrito da seguinte forma geral:

$$z_2(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-\gamma)^j z(0) \frac{t^j}{j!} e^{-\gamma t} u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=2}^n (-\gamma)^{n-k} \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{n-l} z^{(k-1-l)}(0) \right] \frac{t^j}{j!} e^{-\gamma t} u(t). \quad (44)$$

Então, definindo

$$\bar{c}_{n-j} = \gamma^j |z(0)| + \sum_{k=2}^{j+1} \gamma^{j-k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{n-l} |z^{(k-1-l)}(0)|, \quad (45)$$

pode-se concluir que $c_{n-j} \leq \bar{c}_{n-j}$. Além disso, se $\gamma > 1$, então

$$\bar{c}_n \leq \bar{c}_{n-1} \leq \dots \leq \bar{c}_1. \quad (46)$$

Assim, a partir de (44) pode-se concluir que

$$|z_2(t)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1 t^j e^{-\gamma t}. \quad (47)$$

A partir de (34), (36) e (47), pode-se estabelecer um limite superior para $|z(t)|$ descrito por

$$|z(t)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1 t^j e^{(-\gamma t)} + \frac{\bar{C}}{\gamma^n}, \quad \forall t > 0, \quad (48)$$

que pode ser finalmente reescrito para considerar qualquer tempo inicial arbitrário $t_i \neq 0$, ou seja

$$|z(t)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1 (t-t_i)^j e^{-\gamma(t-t_i)} + \frac{\bar{C}}{\gamma^n}, \quad \forall t > t_i. \quad (49)$$

Sabe-se que a desigualdade (49) será válida se K_s em (32) tiver o mesmo sinal do coeficiente de controle b , pois, caso contrário, a estabilidade em malha fechada não pode ser assegurada. Na seção seguinte, um esquema de chaveamento baseado em uma função de monitoração é desenvolvido para lidar com a falta de informação de direção de controle, que é representada neste trabalho pelo termo $sign(b)$.

5.2 Projeto da função de monitoração

Uma descrição detalhada da definição e projeto da função de monitoração pode ser encontrada em (Oliveira et al., 2010). Nesta seção, apenas uma breve descrição é abordada. Ao lembrar que a desigualdade em (49) é válida se a direção do controle estiver correta, parece natural usar o lado direito para decidir se uma troca de sinal de $K_s(t_k)$ em (31) é necessária. Neste caso, a troca ocorre apenas quando o limite em (49) for violado. Portanto, para $\gamma \geq 1$ em (49), considere a função

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a(k)(t - t_k)^j e^{-\bar{\gamma}(t-t_k)} + r, \quad (50)$$

onde $0 < \bar{\gamma} \leq \gamma$, t_k é o tempo de chaveamento, k é o número de chaveamentos, $a(k)$ é qualquer sequência monotonicamente crescente em k e $r > 0$ é uma pequena constante de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^n}\right)$ satisfazendo $0 < \frac{\bar{C}}{\gamma^n} \leq r$. A constante r pode ser substituída pela sequência $r(k) = k \frac{1}{\gamma^n}$, também da ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^n}\right)$ ¹.

A função de monitoração φ_m pode ser definida como

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, +\infty). \quad (51)$$

Observe em (50) e (51), que $|z(t)| < |\varphi_k(t)|$ em $t = t_k$. O tempo de chaveamento

$$t_k := \begin{cases} \min\{t > t_{k-1} : |z(t)| = \varphi_{k-1}(t)\}, & \text{se existir,} \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (52)$$

é o instante de tempo em que a função de monitoração $\varphi_m(t)$ atende $|z(t)|$, onde $k \in \{1, 2, \dots\}$ e $t_0 := 0$. Deste ponto de vista, a função de monitoração em (50) e (51) pode ser vista como uma solução de um sistema híbrido, onde a *variável de salto* é o estado da função de monitoração no momento do chaveamento t_k e a condição de (52) define a regra ou *posição defensiva* de chaveamento. A Figura 3 ilustra a norma de erro auxiliar $|z|$ e a função de monitoração φ_m .

A seguinte desigualdade é obtida diretamente de (51):

$$|z(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (53)$$

Usando o controlador proposto, se o chaveamento da função de monitoração cessar, o conjunto residual em torno do valor de y^* é dependente dos valores para os quais a função de monitoração converge. De acordo com a definição dada em (50), o conjunto residual final será da ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^n}\right)$.

É importante observar, a partir de (45), (47), (49) e (50), que um resultado relevante do desenvolvimento matemático acima é que, se as condições iniciais $z(0), \dots, z^{(n-1)}(0)$ forem conhecidas, então $a(k)$ pode ser escolhido de forma que $\varphi_k(0) > |z(0)|$.

¹ Conforme definido na referência (Khalil, 1996), uma função vetorial $f(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ é considerada de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ em um intervalo $[t_1, t_2]$, se $\exists k, \bar{\varepsilon} : |f(t, \varepsilon)| \leq k\varepsilon, \forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Na maioria dos casos, não fornecemos estimativas precisas para as constantes $k, \bar{\varepsilon}$, e usamos $\mathcal{O}(\varepsilon)$ para ser interpretado como uma relação de ordem de magnitude para ε suficientemente pequeno

6. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Ao substituir a expressão da lei de controle (30) em (19), a dinâmica em malha fechada para o erro $z(t)$ torna-se:

$$\dot{z}^{(n)} + \alpha^T Z(t) = \Omega(t) - \hat{\zeta}_{(n+1)} = e_{\zeta(n+1)}. \quad (54)$$

O teorema a seguir apresenta a análise de estabilidade do controlador via realimentação de saída proposto baseado em função de monitoração, onde a saída $y(t)$ rastreia o modelo de referência $y^*(t)$ com um pequeno erro residual.

Teorema 1. Considere o sistema (1), o sinal de referência $y^*(t)$, a função de monitoração de (50) e (51) e a lei de controle em (30) e (31). Considere que as hipóteses de 1-4 são válidas, assim: **(a)** o erro auxiliar $z(t)$ satisfaz, $\forall t \geq t_N > 0$ e $\bar{\gamma} > 0$, a desigualdade

$$|z(t)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} a(N)(t - t_N)^j e^{-\bar{\gamma}(t-t_N)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^{(n)}}\right), \quad (55)$$

e a saída $y(t)$ tende para uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^{(n)}}\right)$ em torno de $y^*(t)$; **(b)** após um número finito de chaveamentos da função de monitoração, a direção de controle é estimada corretamente; **(c)** o sistema em malha fechada (54) é assintoticamente estável em relação a um conjunto compacto independente das condições iniciais.

Prova: A prova é feita por contradição. Consideramos dois casos: $|z(t)| > \mathcal{O}(1/\gamma^n)$ e $|z(t)| \leq \mathcal{O}(1/\gamma^n)$. Enquanto $|z(t)| > \mathcal{O}(1/\gamma^n)$, suponha por contradição que $k_s(t_k)$ em (31) aplicado na lei de controle u dada por (32) comuta sem parar, $\forall t \in [0, +\infty)$. Então, o termo $a(k)(t - t_k)^j e^{-\bar{\gamma}(t-t_k)}$ em (50) aumenta ilimitadamente à medida que $k \rightarrow +\infty$. Assim, existe um valor finito $\kappa > 0$ tal que para $k \geq \kappa$: **(i)** o termo $|\pi_z(t)| < a(\kappa)(t - t_\kappa)^j e^{-\bar{\gamma}(t-t_\kappa)}$ com $\pi_z(t) := \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1(t - t_i)^j e^{-\gamma(t-t_i)}$ sendo o primeiro termo do lado direito de (49) e **(ii)** a direção do controle está correta. Do item **(i)**, podemos concluir que $\varphi_m(t) > \zeta(t)$, $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$, com $\zeta(t) := \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1(t - t_i)^j e^{-\gamma(t-t_i)} + \frac{\bar{C}}{\gamma^n}$. Do item **(ii)**, ζ é um limitante superior válido para $|z|$. Portanto, nenhuma troca ocorrerá após $t = t_\kappa$, ou seja, $t_{\kappa+1} = +\infty$, e veja em (52) o que nos leva a uma contradição. Assim, φ_m deve parar de chavear após algum valor finito $k = N$ e $t_N \in [0, +\infty)$, sempre que $|z(t)| > \mathcal{O}(1/\gamma^n)$. Portanto, a partir de (50), (51) e (53), podemos concluir que em (55), o erro auxiliar $z(t)$ converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$.

Lembrando que no caso complementar já temos $|z(t)| \leq \mathcal{O}(1/\gamma^n)$, precisamos mostrar que o erro auxiliar $z(t)$ finalmente entra na vizinhança $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$ com o sinal de controle correto, isto é, o *sign(b)* está devidamente identificado.

Suponha que terminemos com uma estimativa de direção de controle incorreta. Portanto, $e_{\zeta(n+1)}(t)$ divergiria com $t \rightarrow +\infty$ para todas as condições iniciais, ou seja, $z(t)$, regido por (54) não permaneceria no conjunto residual, gerando uma contradição. Portanto, o *sign(b)* deve ser estimado corretamente em $k = N$. Podemos concluir que $z(t)$ sempre tende para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$, enquanto $t \rightarrow +\infty$.

Além disso, a convergência final de $z(t)$ para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$ e a identificação correta do *sign(b)* nos permite invocar os resultados da referência

(Zachi et al., 2019) para concluir que o erro de rastreamento de saída $e(t)$ em (1) também converge para uma vizinhança $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$ de zero, considerando o novo tempo inicial como $t = t_N$. A seguir, $k_i > 0$ são constantes que não dependem das condições iniciais e $\Psi_i(\cdot)$ são funções de classe- \mathcal{K}_∞^2 . Como N é o número de chaveamentos necessários para garantir que a desigualdade $\pi_z(t) < a(N)(t - t_N)^j e^{-\gamma(t-t_N)}$ e $\pi_z(t) := \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_1(t-t_i)^j e^{-\gamma(t-t_i)}$, com \bar{c}_1 constante que satisfaz (46), e lembrando que r é $\mathcal{O}(1/\gamma^n)$, então N pode ser relacionado ao valor inicial $\|Z(0)\|$ do estado aumentado em (18) contendo $z(0)$ e suas derivadas de ordem superior até $z^{(n-1)}(0)$ visto que $\pi_z(0) \leq c_z \|Z(0)\|$ por definição. De fato, pode-se escrever $N \leq \Psi_1(\|Z(0)\|) + k_1$. Assim, temos $a(N) \leq \Psi_2(\|Z(0)\|) + k_2$. Da equação (49), podemos escrever $|z(t_N)| \leq \Psi_3(\|Z(0)\|) + k_3$ e, a partir de (50), (51) e (53), temos

$$|z(t)| \leq \Psi_4(\|Z(0)\|) + k_4, \quad \forall t \geq 0. \quad (56)$$

Usando a *forma regular* (Utkin et al., 1999)[pp. 39–41] para a realização no espaço de estado de (54), conclui-se que todo o estado $Z(t)$ do sistema é ISS (*Input-to-State Stable*) (Khalil, 1996) com o erro auxiliar $z(t)$, que é uniformemente limitado de acordo com (56) e, conseqüentemente,

$$\|Z(t)\| \leq \Psi_5(\|Z(0)\|) + c, \quad \forall t \geq 0, \quad (57)$$

onde c é uma constante positiva. Assim, dado $R > c$, para $\|Z(0)\| < R_0$, com $R_0 \leq \Psi_5^{-1}(R - c)$, então $\|Z(t)\|$ é limitado a partir de R com $t \rightarrow +\infty$. Isso implica que $\|Z(t)\|$ é uniformemente limitado (não há escape em tempo finito). Portanto, a estabilidade em relação à bola de raio c é garantida para $Z(0)$ em R_0 . Da propriedade de atratividade em (55), já demonstrada, também podemos concluir sobre a estabilidade assintótica com respeito a este mesmo conjunto compacto por meio de um limitante superior semelhante para $Z(t)$. ■

Corolário 1. No Teorema 1, se o sinal de referência y^* é constante, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_{\zeta(n+1)}(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$.

Prova: A prova é uma consequência direta da demonstração do Corolário 1 da referência (Zachi et al., 2019), uma vez que a direção de controle correta é finalmente identificada de acordo com a propriedade (b) do Teorema 1 anterior. ■

7. SIMULAÇÃO PARA UMA PLANTA ACADÊMICA

7.1 Descrição da planta do exemplo

Para as etapas de projeto e simulação, escolhemos a planta linear $H(s)$ que é inspirada no exemplo usado por (Zachi et al., 2019) e (Zhao and Huang, 2012):

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (58)$$

Em (58), $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ é a saída, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ é a entrada, com $\mathcal{L}\{\cdot\}$ denotando a Transformada de Laplace.

² Uma função contínua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ pertence à classe- \mathcal{K} se for estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Além disso, diz-se que uma função contínua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ pertence à classe- \mathcal{K}_∞ se também pertence a classe- \mathcal{K} , $a = \infty$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$.

Os parâmetros a_0 , a_1 , b_1 são considerados incertos, o sinal do coeficiente de controle da planta b_1 é desconhecido.

7.2 Resultados da simulação - MP-ADRC e Função de monitoração

Considerando a planta (58), os parâmetros usados na simulação são $a_1 = 3$, $a_0 = -4$, $b_1 = -500$, $\gamma = 9$, $K_0 = 0.1$, $w_0 = 170$, $\bar{L}_1 = 492$, $\bar{L}_2 = 7.8 \times 10^4$, $\bar{L}_3 = 4.9 \times 10^6$. A função de monitoração utilizada (para $n = 2$) é

$$\varphi_k(t) = a(k)e^{-8.9(t-t_k)}(1+t-t_k)+0.01, a(k) = k+0.01.$$

O desempenho da planta é mostrado na Figura 5. Os re-

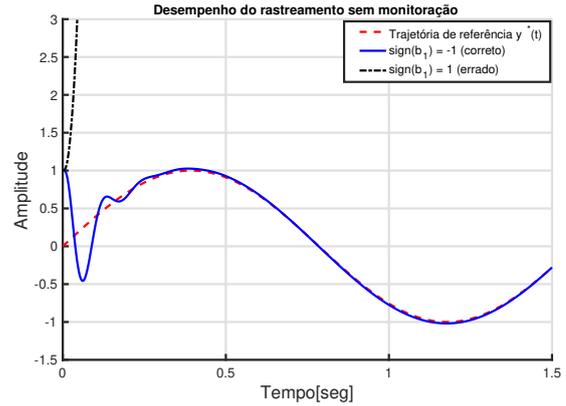


Figura 5. Resultado simulado - método MP-ADRC.

sultados obtidos na simulação revelam que o método MP-ADRC pode lidar com as incertezas do ganho de controle da planta em módulo, mas não em sinal para garantir a estabilidade em malha fechada. Se a estratégia de controle ilustrada no diagrama da Figura 4 é projetada supondo que $b_1 = -500$ (sinal correto), então o desempenho de saída da planta (e também do erro de saída) será estável. Nessa situação, possivelmente não haverá chaveamento na função de monitoração, o que indica que o erro de saída apresentará um comportamento convergente para um dado conjunto residual em torno de zero. Porém, se a lei de controle é projetada com $b_1 = 500$ (sinal errado), o sistema em malha fechada deve ter um comportamento instável inicialmente. Em geral, resulta um erro de saída divergente, em módulo, um ou mais chaveamentos da função de monitoração devem ocorrer até que o sinal de direção de controle seja compatível com o ganho correto $b_1 = -500$, e o sistema apresentará um comportamento estável e convergente.

As situações mencionadas são ilustradas nas Figuras 6 e 7. Observe que as curvas de saída representadas na Figura 6, nos primeiros instantes de tempo, são semelhantes às da Figura 5. Na verdade, apresentam o mesmo comportamento inicial, exceto pelo fato da Figura 6, a função de monitoração chavear para estabilizar o sistema com o passar do tempo. Isso também pode ser visto nas curvas $|z(t)|$ na Figura 7. Nos gráficos superiores, o comportamento divergente inicial de $|z(t)|$ força a função de monitoração a chavear, assim como o sinal da direção de controle, levando o sistema a uma condição estável. Além disso, mostra-se os instantes de tempo em que há um encontro entre as curvas de $\varphi_m(t)$ e $|z(t)|$. Isso indica que a direção de controle inicialmente considerada não

é de fato a correta. Nos gráficos inferiores da Figura 7, a função de monitoração não chaveia devido ao padrão convergente do erro $|z(t)|$. Quando a direção do controle é inicialmente correta, o método proposto garante que $|z(t)|$ decaia exponencialmente.

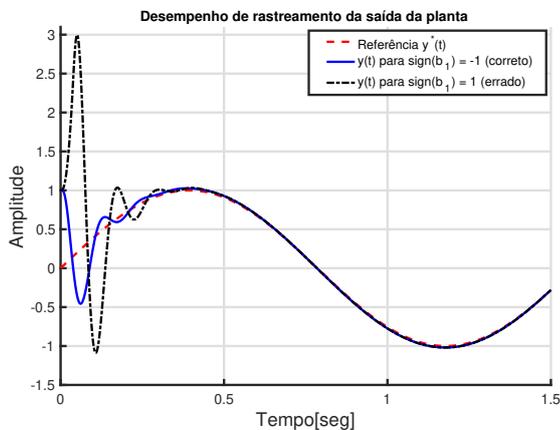


Figura 6. Resultado simulado. Aplicação do MP-ADRC com abordagem da função de monitoração. Saídas da planta.

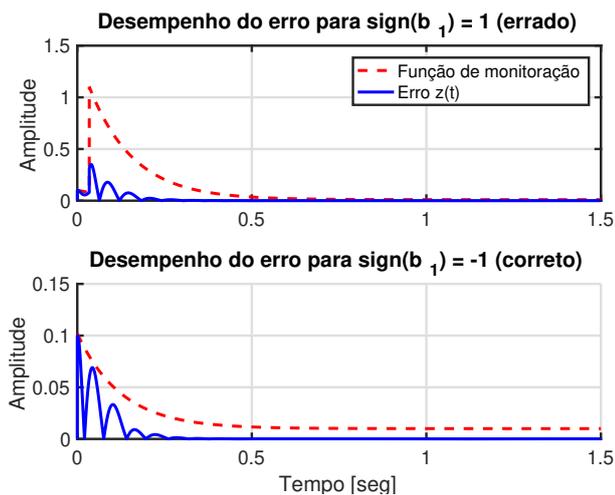


Figura 7. Resultado simulado - Curvas da função de monitoração e do erro $z(t)$.

8. CONCLUSÃO

Este artigo propôs uma extensão do método MP-ADRC (Zachi et al., 2019) para sistemas incertos com direção de controle desconhecida. Embora o método MP-ADRC possa lidar com as incertezas paramétricas no ganho de controle da planta, sua estabilidade não é preservada se o sinal deste parâmetro não é conhecido. A fim de contornar essa dificuldade para uma classe mais ampla de plantas incertas e com direção de controle desconhecida, a estratégia proposta foi incorporar a técnica da Função de Monitoração (Oliveira et al., 2010) ao método MP-ADRC. Este trabalho também forneceu uma análise matemática do sistema em malha fechada para demonstrar as propriedades de estabilidade e convergência da estrutura de controle proposta. Simulações computacionais foram

realizadas, onde observou-se que, mesmo nas situações de não conhecimento do ganho de controle em norma e no sinal, a estrutura proposta resultou em uma configuração de malha fechada assintoticamente estável.

9. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem as agências de fomento CNPq, CAPES e FAPERJ pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Chen, W., Li, X., Ren, W., and Wen, C. (2013). Adaptive consensus of multi-agent systems with unknown identical control directions based on a novel nussbaum-type function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7), 1887–1892.
- Han, J.Q. (1998). Auto disturbance rejection controller and its applications. *Control and decision*, 13(1), 19–23.
- Khalil, H.K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice Hall*.
- Linares-Flores, J., Hernández-Méndez, A., Javier Vázquez-Sanjuan, J., Guerrero-Castellanos, J.F., and Curiel-Olivares, G. (2020). Robust sensorless low-speed trajectory tracking for a permanent magnet synchronous motor: An extended state observer based backstepping control approach. *Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems*, 2(3), e49.
- Miklosovic, R. and Gao, Z. (2004). A robust two-degree-of-freedom control design technique and its practical application. In *Conference Record of the 2004 IEEE Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting.*, volume 3, 1495–1502. IEEE.
- Nussbaum, R.D. (1983). Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & control letters*, 3(5), 243–246.
- Oliveira, T.R., Peixoto, A.J., and Hsu, L. (2010). Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4), 1028–1034.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shijun, M. (1999). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volume 34. CRC press.
- Wang, C., Wen, C., and Lin, Y. (2016). Adaptive actuator failure compensation for a class of nonlinear systems with unknown control direction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(1), 385–392.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R.R., and Lizarralde, F. (2008). A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign. *Automatica*, 44(4), 1036–1044.
- Zachi, A.R.L., Correia, C.A.M., Azevedo Filho, J.L., and Gouvêa, J.A. (2019). Robust disturbance rejection controller for systems with uncertain parameters. *IET Control Theory & Applications*, 13(13), 1995–2007.
- Zhao, C. and Huang, Y. (2012). ADRC based input disturbance rejection for minimum-phase plants with unknown orders and/or uncertain relative degrees. *Journal of Systems Science and Complexity*, 25(4), 625–640.