

## Controle Preditivo da Frenagem de um Monociclo em Terreno Desconhecido<sup>\*</sup>

Henrique Barros Pinto<sup>\*</sup> Anna Rafaela Silva Ferreira<sup>\*</sup>  
Marco Antonio Meggiolaro<sup>\*</sup> Helon V. Hultmann Ayala<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,  
R.J.

---

**Abstract:** Braking systems that prevent wheel locking are employed in both land and air vehicles. This work develops a control that avoids the locking of the wheels during braking. For this purpose, a slip control was carried out for the case where there is only the longitudinal movement of the unicycle. The slip, calculated from the states (longitudinal speed of the vehicle and angular speed of the wheel), is compared to a reference slip, which is updated through the feedback of the states and torque. The control uses the *Nonlinear Model Predictive Control* (NMPC) strategy, considering the system restrictions. Finally, performance cost functions were calculated to validate the results obtained in the control.

**Resumo:** Sistemas de frenagem que evitam o travamento da roda são empregados tanto em veículos terrestres quanto aéreos. Este trabalho desenvolve um controle que evita o travamento das rodas durante uma frenagem em movimento apenas longitudinal de um modelo de monociclo por meio do controle do deslizamento entre a roda e o solo. O deslizamento, calculado por meio dos estados (velocidade longitudinal do veículo e velocidade angular da roda), é comparado a um deslizamento de referência, este sendo atualizado por meio do *feedback* dos estados e do torque. O controle utiliza a estratégia do *Nonlinear Model Predictive Control* (NMPC), comportando as restrições do sistema. Por fim, funções de custo de performance foram calculadas para validar os resultados obtidos do controle.

*Keywords:* NMPC; Braking Control; Anti-skid Control; Unicycle; Unknown Environment

*Palavras-chaves:* NMPC; Frenagem; ABS; Monociclo; Ambiente Desconhecido;

---

### 1. INTRODUÇÃO

Sistemas de frenagem são de fundamental importância para o desempenho de veículos de um modo geral, tanto nos terrestres - que requerem uma resposta rápida sem que ocorra o travamento das rodas - quanto dos aéreos, os quais fazem uso do freio no momento do pouso e em decolagens abortadas (D'Avico et al., 2017). Com essas necessidades, em 1965, foi criado o primeiro sistema eletrônico de frenagem atuando na redução do travamento da roda, conhecido como ABS (*Anti-Lock Braking System*) (Heißing and Ersoy, 2010).

Esse sistema trabalha em ciclos, liberando o freio quando é identificado um travamento das rodas. Com isso, o ABS proporciona mais segurança ao motorista, uma vez que possibilita a execução de manobras durante a frenagem ao evitar o travamento das rodas dianteiras e previne a guinada do veículo, que poderia ocorrer com o travamento das rodas traseiras. Além disso, o ABS é capaz de alcançar uma desaceleração mais rápida do veículo (Kahane and Dang, 2009).

Este trabalho foca na simulação de um controle preditivo de frenagem aplicado em um modelo de um monociclo com movimento apenas longitudinal. Tal modelo pode

ser utilizado para representar 1/4 de um veículo terrestre como um carro ou o trem de pouso de uma aeronave, por exemplo.

Vários trabalhos têm focado em controle híbrido de freio motor e freio de fricção, como é o caso de Satzger and De Castro (2014) e Satzger et al. (2016), nos quais o controle é feito pela minimização de uma função custo que tem como referência o deslizamento e torque a ser aplicado efetivamente nas rodas. Deslizamento de referência também é utilizado em Chiang et al. (2014) e Satzger et al. (2014). Em aviões, D'Avico et al. (2017) e Lonbani et al. (2017) utilizam a medida da desaceleração para criar ciclos de torques de frenagens nos trens de pouso, já sendo observado o uso das medidas de desaceleração para o controle do torque de frenagem na roda.

Freios totalmente elétricos são utilizados em Cai et al. (2010) e Liu et al. (2016), que utilizam um controle antiderrapante com o uso de uma relação, com restrições de segurança, entre aceleração da roda e o torque do motor elétrico, empregando-se sensores para a medição da aceleração da roda e da estimativa da força de contato entre a roda e o solo.

Verificando fenômenos que podem diminuir a capacidade de frenagem, Klug et al. (2021) utiliza modelo similar ao aplicado neste trabalho com a inclusão de elemento de flexão entre a roda e a massa do veículo; evidenciando,

---

<sup>\*</sup> Os autores agradecem à agência CNPq e ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio pelo apoio financeiro.

desta forma, que a flexão impacta no sinal do deslizamento longitudinal na frenagem, situações que podem ser contornadas com a instalação de sensores.

D’Avico et al. (2019) mostram que o desgaste de pneu é maior em aceleração e frenagem bruscas e que a regulação do deslizamento deve ser englobada no controle de frenagem de um sistema para a minimização dessa deterioração. Com essa motivação, D’Avico et al. (2021) projetou um controle que combinava níveis de desgastes dos pneus com performance de frenagem.

Como o fenômeno de deslizamento pode ocorrer com restrições, seja de motores ou energéticas, pesquisadores têm procurado formas de controle que as aceitem bem, sendo MPC (*Model Predictive Control*) um dos mais utilizados recentemente na literatura. Em Satzger and de Castro (2017), apresenta-se uma dinâmica veicular de um eixo sendo controlada por MPC que se utiliza da eficiência energética e diminuição do deslizamento para aumentar a performance do controlador. Já em Basrah et al. (2017), controles de deslizamento e de variação de torque com MPC são empregados em modelo veicular que trafegam em pistas com coeficientes de atrito diferentes. A vantagem da utilização do MPC é a inserção de restrições sem ocorrer o comprometimento da otimização da função custo.

Nesse artigo é proposto um controle preditivo de frenagem em um terreno desconhecido. Nele são utilizados o torque e as velocidades linear e angular como variáveis de decisão. A ideia fundamental do método é controlar o deslizamento a partir de um valor de referência, que é atualizado a cada iteração. Para isso, o critério utilizado na atualização se baseia na variação do torque e no valor do erro do deslizamento ao longo da frenagem. Tal controle se difere do ABS convencional na medida que não faz uso do travamento e posterior soltura das rodas, o que resulta em um maior conforto para os passageiros. Vale ressaltar que, até onde temos conhecimento, esse método não foi apresentado anteriormente na literatura. Por se tratar de um problema não linear foi utilizada a estratégia de controle NMPC (*Nonlinear Model Predictive Control*) e as simulações foram realizadas no *MatLab* (MATLAB, 2020) com o auxílio da ferramenta de diferenciação CasADi (Andersson et al., 2019).

Na Seção II, os fundamentos teóricos utilizados são detalhados. A Seção III aborda o modelo do sistema a ser trabalhado, bem como a estratégia de controle utilizada. Em seguida, a Seção IV apresenta os resultados das simulações e, por fim, a Seção V traz as conclusões e os trabalhos futuros.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para a compreensão adequada das seções seguintes faz-se necessário esclarecer alguns conceitos que serão utilizados.

### 2.1 Deslizamento

O deslizamento é uma grandeza utilizada para medir o movimento relativo entre a roda e o solo, podendo ser subdividido em três regiões distintas. Para melhor defini-las, é utilizado o coeficiente de deslizamento  $\lambda$  que, para o caso de movimento apenas na direção longitudinal, pode ser equacionado da seguinte forma:

Tabela 1. Coeficientes da *Magic Formula* para diferentes superfícies

Terreno	B	C	D	E
Asfalto Seco	10	1.9	1	0.97
Asfalto Molhado	12	2.3	0.82	1
Neve	5	2	0.3	1
Gelo	4	2	0.1	1

$$\lambda = \frac{\omega r - v}{\max(\omega r, v)} \in [-1; 1] \quad (1)$$

em que,  $v$  é a velocidade longitudinal do veículo,  $\omega$  é a velocidade angular da roda e  $r$  é o raio da roda.

Tem-se, então, três casos distintos: quando  $\lambda < 0$ , ocorre o *skid*; quando  $\lambda = 0$ , ocorre o rolamento puro e não há movimento relativo; quando  $\lambda > 0$ , ocorre o *slip*. Isso pode ser observado na Figura 1, em que CIR é o centro instantâneo de rotação.

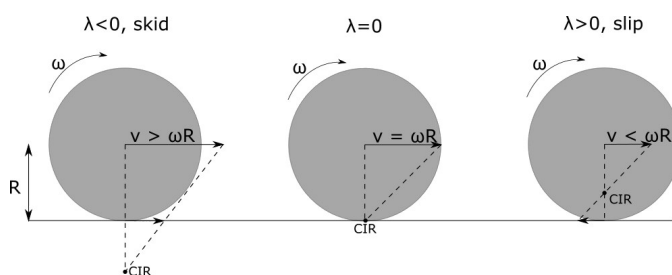


Figura 1. Intervalos do deslizamento

Considerando que o objetivo é analisar somente o caso de frenagem do veículo, o deslizamento se resume ao *skid*. Portanto, o valor de  $\lambda$  utilizado será no intervalo  $[-1, 0]$ .

### 2.2 Coeficiente de Atrito

Neste artigo é utilizado o modelo da *Magic Formula* (Pacejka, 2006) para simular o controle proposto, por ser bastante utilizado e validado no meio automobilístico. A partir dele, é possível obter o coeficiente de atrito  $\mu$  em função do deslizamento. O coeficiente de atrito depende de alguns fatores, como o material da roda, o tipo de solo em que ocorre o movimento e o deslizamento entre ambos. Sendo assim, é possível ajustar os coeficientes da *Magic Formula* para que represente os dados empíricos. Foram utilizados os valores das constantes  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  já calibrados e disponibilizados pelo *MatLab* para quatro tipos distintos de solo, conforme consta na Tabela 1. A equação da *Magic Formula* é dada por

$$\mu(\lambda) = D \sin(C \arctan(B\lambda - E(B\lambda - \arctan(B\lambda)))) \quad (2)$$

As curvas que representam  $\mu$  para cada um dos solos são mostradas na Figura 2. Uma vantagem desse modelo é o fato de ser válido em todo o domínio de  $\lambda$ , podendo ser utilizado tanto para casos de aceleração quanto de frenagem.

Sabe-se, também, que a força longitudinal de interação roda-solo  $F_x$  é diretamente proporcional à normal  $F_z$  que age sobre a roda e pode ser escrita do seguinte modo:

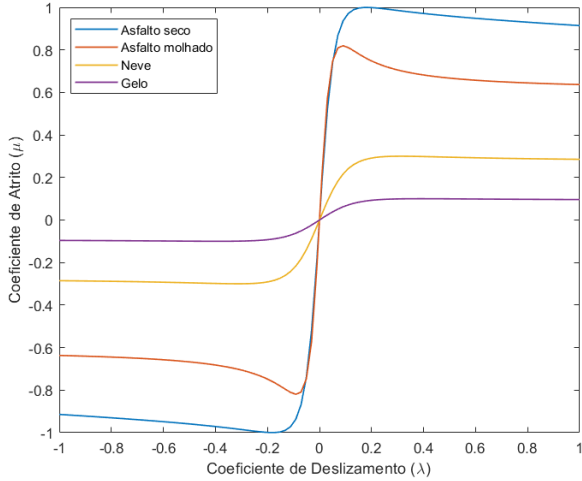


Figura 2. Gráfico de  $\mu(\lambda)$  da Magic Formula

$$F_x = F_z \mu(\lambda) = mg \mu(\lambda) \quad (3)$$

em que  $m$  é a massa do conjunto e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Já para o controle, foi adotado um modelo bastante simplificado do coeficiente de atrito, buscando um melhor tempo de processamento e uma maior generalização do método aplicado. Esse modelo foi proposto porque desejava-se ajustar a curva ao terreno em que ocorre a frenagem durante o controle e, portanto, é mais prático de se realizar com apenas dois parâmetros em comparação aos quatro da Magic Formula. Além disso, o controle sempre busca o ponto ótimo para a frenagem, o que justifica parametrizar o modelo pelas coordenadas do seu ponto de máximo ( $\lambda_{ref}$  e  $\mu_{ref}$ ).

Tal modelo é composto por duas equações, sendo uma de segundo grau e a outra de primeiro. Na parábola foram utilizadas as condições de que a função passe pela origem, tenha o valor  $\mu_{ref}$  quando o deslizamento for  $\lambda_{ref}$  e que esse também seja o ponto de máximo da função. Já no caso da reta, foram utilizadas as condições de que ela seja tangente e coincidente à parábola na abscissa  $-1,01 \lambda_{ref}$ , que foi um valor escolhido para ajuste da curva.

A função ajustada  $\mu(\lambda)$  é a seguinte:

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 0,02 \cdot \frac{\mu_{ref}}{\lambda_{ref}} \cdot \lambda + 1,01^2 \cdot \mu_{ref}, & \lambda \in [-1; -1,01\lambda_{ref}] \\ -\frac{\mu_{ref}}{\lambda_{ref}^2} \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \lambda_{ref}), & \lambda \in ]-1,01\lambda_{ref}; 0] \end{cases} \quad (4)$$

e a Figura 3 ilustra a comparação dos modelos quando os pontos de referência condizem com as coordenadas de máximo da Magic Formula ( $\lambda_{ref} = \lambda^*$  e  $\mu_{ref} = \mu^*$ ).

### 2.3 Análise de performance

Serão utilizadas cinco funções de custo para analisar o desempenho do controle sob diversos aspectos, como em D'Avico et al. (2017). A primeira é a função de custo que quantifica o quão próximo o deslizamento está do seu valor ótimo e é definida como

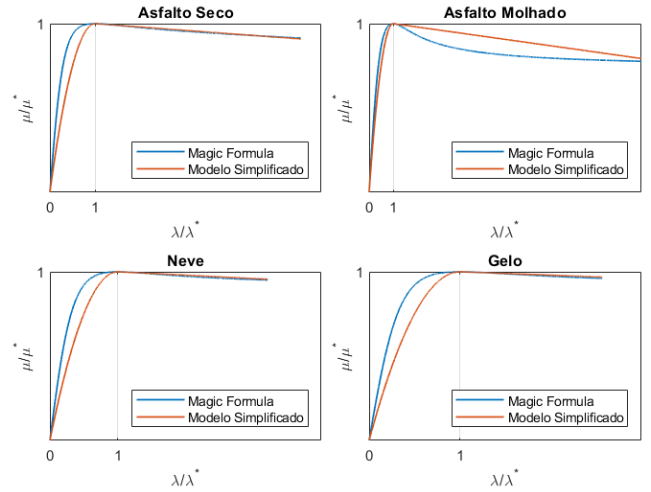


Figura 3. Comparativo Magic Formula e Modelo Simplificado

$$J_1 = 100 \cdot \frac{1}{\Delta s} \int k(\lambda) v dt \quad (5)$$

em que  $\Delta s$  é a distância percorrida durante a frenagem e  $k(\lambda)$  é uma penalização para o deslizamento da seguinte forma:

$$k(\lambda) = \begin{cases} 1,5 \frac{\lambda}{\lambda^*} - 0,5 \left( \frac{\lambda}{\lambda^*} \right)^2 & \lambda < \lambda^* \\ 1 & \lambda = \lambda^* \\ 0,5 \left( 1 + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^*} \right) & \lambda > \lambda^* \end{cases} \quad (6)$$

A segunda função de custo ( $J_2$ ) compara o coeficiente de atrito com seu valor ótimo e é definida como

$$J_2 = 100 \cdot \frac{\int v \mu dt}{\int v \mu^* dt} \quad (7)$$

Já a terceira ( $J_3$ ) é responsável por analisar a aceleração da seguinte forma:

$$J_3 = 100 \cdot \frac{1}{\Delta s} \int \frac{\dot{v}}{\dot{v}^*} v dt \quad (8)$$

em que  $\dot{v}^*$  é a aceleração ótima do veículo que ocorre quando o coeficiente de atrito é igual a  $\mu^*$ .

A quarta ( $J_4$ ) é responsável por analisar o esforço do motor comparando-o com o ideal e é definida como

$$J_4 = \frac{\|\tau(t) - \tau^*(t)\|^2}{\Delta s} \quad (9)$$

sendo,  $\tau^*$  o torque ótimo que pode ser calculado como o valor necessário para manter  $\lambda^*$  em regime permanente.

Por fim, a quinta função de custo é utilizada para avaliar o conforto dos passageiros no veículo da seguinte forma:

$$J_5 = \frac{\|\dot{v}(t) - \dot{v}^*(t)\|^2}{\Delta s} \quad (10)$$

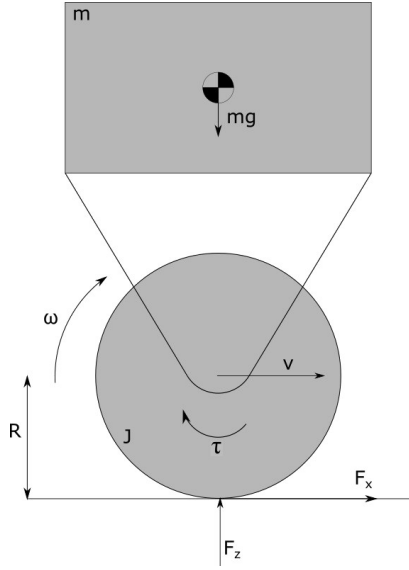


Figura 4. Esquemático do monociclo

O valor ótimo para as funções de custo  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  é de 100% e, segundo a SAE AIR1739 (Wheels (2016)), valores acima de 90% caracterizam uma frenagem excelente. Apesar do tempo não estar explícito nessas funções, maximizá-las garante uma frenagem no tempo mínimo, uma vez que a desaceleração do veículo seria a maior possível. Já quanto a  $J_4$  e  $J_5$ , o desempenho melhora à medida que seus valores diminuem e se aproximam de zero.

### 3. CONTROLE PREDITIVO DE FRENAGEM

Ao longo desta seção serão demonstrados a obtenção das equações da dinâmica para o monociclo, a formulação do problema NMPC (*Nonlinear Model Predictive Control*) correspondente e, por fim, o método utilizado para atualizar as constantes de referência.

#### 3.1 Equações de movimento

O desenho esquemático, que possui movimento apenas na direção longitudinal e com as devidas forças que atuam sobre o sistema, encontra-se na Figura 4.

A partir dela é possível obter as equações de movimento do monociclo, que são as seguintes:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= \tau - rF_x \\ m\dot{v} &= F_x \end{aligned} \quad (11)$$

sendo a aceleração angular da roda  $\dot{\omega}$ , a aceleração longitudinal do veículo  $\dot{v}$ , o torque aplicado na roda  $\tau$  e o momento de inércia da roda  $J$ . A notação utilizada assume que um torque positivo causa uma aceleração angular positiva da roda. Assim, para analisar a frenagem, os valores aplicados sobre o sistema serão negativos.

#### 3.2 NMPC

Foi utilizado o modelo de espaço de estados para formular o controle, sendo o vetor de estados  $\mathbf{x}$  e o vetor de controle  $\mathbf{u}$  dados da seguinte forma:

Tabela 2. Parâmetros do NMPC

N	T (s)	$\Delta u_{lim}$ (Nm)	$\mathbf{x}_0$ [m/s; rad/s]	U	X
25	0,02	20	[50; 166,67] <sup>T</sup>	[-1000; 0]	[0; $\infty$ ]

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}; \mathbf{u} = [\tau]$$

Partindo de (3) e (11), é possível obter  $\dot{\mathbf{x}}$  em função dos dados conhecidos do problema e chegar na seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\mu(\lambda) \\ \tau - rmg\mu(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Considerando que o terreno não é conhecido, foi adotada a estratégia de realizar o controle sobre  $\lambda$  a partir de (1), assumindo que todos os estados e o controle são conhecidos. O NMPC pode ser escrito como um problema de controle ótimo (OCP) como demonstrado abaixo:

$$J_{min} = \min_u \sum_{k=1}^N (\lambda(k) - \lambda_{ref}(k))^2 \quad (13)$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\dot{\mathbf{x}}(k), \quad (14)$$

$$\lambda(k) = \frac{rx_2 - x_1}{x_1} \in [-1, 0], \forall k \in [0, N], \quad (15)$$

$$|\mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k)| \leq \Delta u_{lim}, \quad (16)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (17)$$

$$\mathbf{u}(k) \in U, \forall k \in [0, N-1], \quad (18)$$

$$\mathbf{x}(k) \in X, \forall k \in [0, N] \quad (19)$$

sendo  $N$  o número de etapas de predição,  $T$  o tempo entre cada etapa de predição,  $\lambda_{ref}$  o deslizamento de referência que é ajustado durante o controle,  $\Delta u_{lim}$  a variação limite do controle aplicado pelo sistema,  $\mathbf{x}_0$  o vetor de estados iniciais,  $U$  um conjunto de controles factíveis e  $X$  um conjunto de estados factíveis.

Foram formuladas, então, as hipóteses de que o veículo não apresenta deslizamento no início da frenagem e de que se movimentará sempre no mesmo sentido até sua parada. Tendo isso em mente, os parâmetros utilizados foram ajustados de modo empírico e estão disponibilizados na Tabela 2.

A equação (13) é a função de custo do problema; a (14) é o método de Euler aplicado que foi escolhido para menor esforço computacional; a (15) é a restrição para valores de deslizamento no caso da frenagem; a (16) é a restrição da variação do torque aplicado; a (17) é a inicialização com as condições iniciais de estado, e as (18) e (19) são as restrições dos controles e estados para todo o horizonte de predição, respectivamente.

Para esse problema foi escolhido colocar o esforço de controle como uma restrição em vez de considerá-lo na função de custo. Tal escolha foi feita pois deseja-se que a frenagem seja ótima e, para isso, bastaria certificar-se de que o torque utilizado respeita as restrições do atuador, tanto de valores absolutos quanto da sua variação com o tempo.

Tabela 3. Valores das constantes utilizadas

m [kg]	r [m]	J [kg/m <sup>2</sup> ]	$\lambda_{ref}(0)$	$\mu_{ref}(0)$	$\epsilon$	$C_\lambda$	$C_\mu$
225	0,3	1	-0,3	-1,2	0,002	0,960	0,986

### 3.3 Ajuste do coeficiente de atrito

Como o terreno em que o veículo se encontra é desconhecido, propõe-se ajustar (4) a partir do *feedback* dos estados e do controle para que a frenagem seja a mais próxima da ideal possível. Para isso, são verificadas duas condições complementares durante a atuação do controle. A primeira checa se o torque está sendo aliviado para manter o deslizamento igual a  $\lambda_{ref}$ . A lógica por trás é que, no caso em que  $\lambda_{ref}$  é maior em módulo que  $\lambda^*$  do terreno, ocorre uma diminuição da magnitude do torque aplicado sobre a roda, o que indica a tendência de travamento desta.

Já a segunda verifica se o erro entre  $\lambda_{ref}$  e  $\lambda(\mathbf{x})$  é maior que o admissível ( $\epsilon$ ). Caso isso seja verdade, significa que o modelo de atrito não representa bem a situação e que, devido a isso, as previsões do controle não são fiéis ao terreno em que está ocorrendo a frenagem.

Para realizar o ajuste do coeficiente de atrito é verificado a cada iteração do controle se essas duas condições são atendidas simultaneamente. Caso isso seja verdade, é realizada a calibragem da curva por meio dos ganhos proporcionais  $C_\mu$  para  $\mu_{ref}$  e  $C_\lambda$  para  $\lambda_{ref}$ . Os valores dos ganhos e do erro admissível foram encontrados por meio da observação de diversas situações e estão disponíveis na Tabela 3. Pode-se então representar esse ajuste por meio do seguinte algoritmo:

se  $abs(\lambda_{ref} - \lambda(\mathbf{x})) > \epsilon$  &  $\Delta\tau < 0$  então  
 $\mu_{ref} = C_\mu \cdot \mu_{ref}$   
 $\lambda_{ref} = C_\lambda \cdot \lambda_{ref}$   
 fim se

em que,  $\Delta\tau$  é a diferença entre o módulo do torque aplicado no passo atual e o do imediatamente anterior.

## 4. RESULTADOS

Foram simulados três casos com terrenos distintos, sendo eles: 1) asfalto seco, 2) asfalto molhado e 3) uma situação com a transição do asfalto seco para o molhado durante a frenagem. Em todos eles foram utilizadas as mesmas constantes e valores iniciais para  $\lambda_{ref}$  e  $\mu_{ref}$  conforme consta na Tabela 3. Os gráficos obtidos estão nas Figuras 5, 6 e 7 com o comparativo entre a velocidade linear do veículo e a velocidade linear da roda ( $\omega r$ ), o deslizamento e o torque aplicado sobre a roda.

Nas três situações, é possível perceber que o deslizamento de referência é atualizado até um valor bastante próximo do deslizamento ótimo do terreno e, após certo tempo, o deslizamento real converge para o mesmo valor. No Caso 3, em especial, pode-se perceber que, após a mudança súbita de terreno no instante de 1,5 s, a roda apresenta um aumento do deslizamento, o que caracteriza a tendência de travamento. Esse comportamento é identificado corretamente pelo ajuste proposto, que corrige a curva do coeficiente de atrito. Dessa forma, o controle alivia o torque aplicado e alcança um novo patamar ótimo.

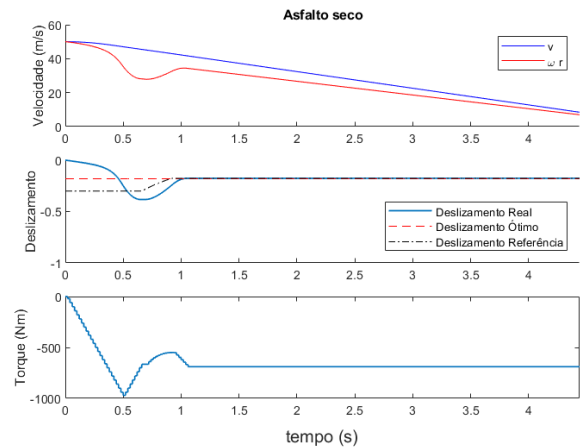


Figura 5. Caso 1- Asfalto Seco

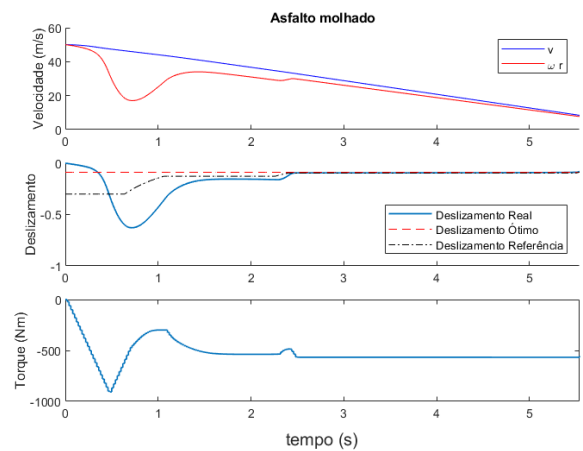


Figura 6. Caso 2- Asfalto Molhado

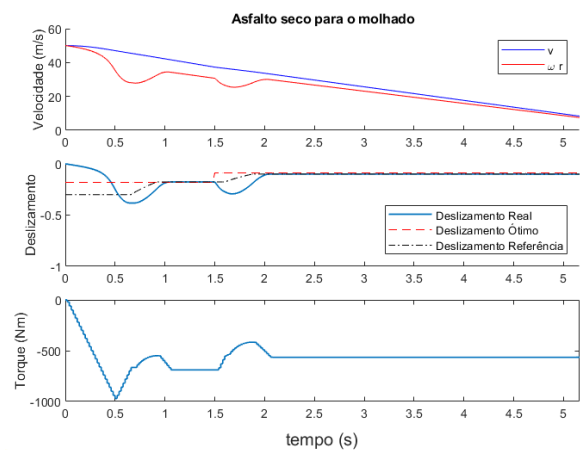


Figura 7. Caso 3- Asfalto Seco para o molhado

Outro ponto importante a ser destacado é a presença de pequenas variações no torque aplicado sobre a roda. Isso garante um maior conforto para as pessoas que estão a bordo do veículo e um menor esforço do atuador de freio.

Para o cálculo da eficiência da frenagem serão utilizadas as funções de custo apresentadas na subseção 2.3. Os valores obtidos para tais funções nos três terrenos distintos estão ilustrados na Figura 8. Como os valores obtidos em  $J_2$

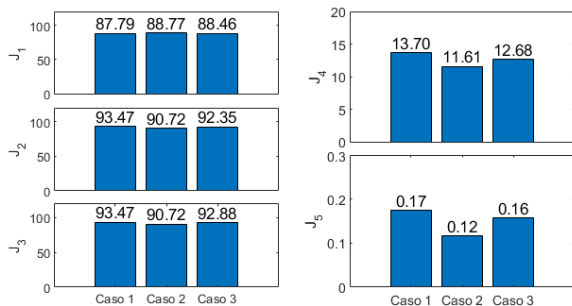


Figura 8. Valores das funções de custo

e  $J_3$  são maiores que 90% e em  $J_1$  estão apenas pouco abaixo desse valor, tem-se que o controle utilizado é eficaz e bastante próximo do que considerado excelente.

Quanto aos valores de  $J_4$  e  $J_5$ , observa-se que são maiores na condição de asfalto seco por permitir frenagens mais bruscas, uma vez que essa superfície possui um maior coeficiente de atrito. No caso 2, de asfalto molhado, são os menores valores pelos mesmos motivos, e no caso 3 são valores intermediários, como era de se esperar por ser tratar de uma condição mista de superfície.

## 5. CONCLUSÃO

Esse artigo demonstrou a simulação de um controle preditivo (NMPC) de frenagem longitudinal em terrenos desconhecidos. Para isso, foi realizada uma otimização do deslizamento do sistema para um valor de referência que é ajustado em cada etapa com base no *feedback* dos estados e do controle.

O algoritmo se mostrou capaz de determinar um deslizamento de referência bastante próximo do valor ótimo e com baixas oscilações no controle aplicado, que converge para um valor ótimo durante o controle. Esse resultado foi refletido no cálculo das funções de custo, uma vez que mostraram valores bem próximos de uma condição excelente. Trabalhos futuros poderão ser realizados visando tornar o controle mais robusto, com o enriquecimento do modelo utilizado. Outra possibilidade será conduzir novos estudos com o intuito de ampliar o método para as demais situações nas quais o deslizamento lateral esteja incluído. Ademais, podem ser conduzidos testes em uma bancada experimental para verificar a factibilidade do modelo como foi apresentado ou a necessidade de ajustar seus parâmetros.

## REFERÊNCIAS

Andersson, J.A.E., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J.B., and Diehl, M. (2019). CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 11(1), 1–36.

Basrah, M.S., Siampis, E., Velenis, E., Cao, D., and Longo, S. (2017). Wheel slip control with torque blending using linear and nonlinear model predictive control. *Vehicle System Dynamics*, 55(11), 1665–1685.

Cai, Z., Ma, C., and Zhao, Q. (2010). Acceleration-to-torque ratio based anti-skid control for electric vehicles. In *Proceedings of 2010 IEEE/ASME International*

*Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*, 577–581. QingDao.

Chiang, W.P., Yin, D., Omae, M., and Shimizu, H. (2014). Integrated slip-based torque control of antilock braking system for in-wheel motor electric vehicle. *IEEE journal of industry applications*, 3(4), 318–327.

D’Avico, L., Tanelli, M., and Savaresi, S.M. (2019). Combining tire-wear and braking control for aeronautical applications. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 131–136. IEEE, Napoli.

D’Avico, L., Tanelli, M., Savaresi, S., Airolidi, M., and Rapicano, G. (2017). A deceleration-based algorithm for anti-skid control of aircraft. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 14168–14173.

D’Avico, L., Tanelli, M., and Savaresi, S.M. (2021). Tire-wear control in aircraft via active braking. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(3), 984–995.

Heißing, B. and Ersoy, M. (2010). *Chassis handbook: fundamentals, driving dynamics, components, mechatronics, perspectives*. Springer Science & Business Media, Berlin.

Kahane, C.J. and Dang, J.N. (2009). The long-term effect of abs in passenger cars and ltvs. Publication, National Highway Traffic Safety Administration, Washington, DC.

Klug, S., Moia, A., Verhagen, A., Gorges, D., and Savaresi, S. (2021). The influence of bicycle fork bending on brake control. *Vehicle System Dynamics*, 59(3), 375–395.

Liu, X., Li, M., and Xu, M. (2016). Model-predictive-control-based novel anti-skid method for electric vehicles using the wheel acceleration and the motor torque. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of automobile engineering*, 230(13), 1780–1790.

Lonbani, M.A., Morandini, M., Astori, P., and Ghiringhelli, G. (2017). Anti-skid braking control system design for aircraft: Multi-phase schemes approach. In *2017 5th IEEE International Conference on Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems (MT-ITS)*, 104–109. IEEE, Napoli.

MATLAB (2020). *Versão 9.9.0.1592791 (R2020b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts.

Pacejka, H. (2006). *Tire and Vehicle Dynamics*. Elsevier, Oxford.

Satzger, C. and De Castro, R. (2014). Combined wheel-slip control and torque blending using mpc. In *2014 International Conference on Connected Vehicles and Expo (ICCVE)*, 618–624. IEEE, Vienna.

Satzger, C. and de Castro, R. (2017). Predictive brake control for electric vehicles. *IEEE Transactions on vehicular technology*, 67(2), 977–990.

Satzger, C., de Castro, R., and Bünte, T. (2014). A model predictive control allocation approach to hybrid braking of electric vehicles. In *2014 IEEE Intelligent Vehicles Symposium Proceedings*, 286–292. Michigan.

Satzger, C., de Castro, R., Knoblach, A., and Brembeck, J. (2016). Design and validation of an mpc-based torque blending and wheel slip control strategy. In *2016 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 514–520. Gothenburg.

Wheels, A.A. (2016). Information on antiskid systems. Technical report, Brakes and Skid Controls Committee.