

# SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS COM OTIMIZAÇÃO VIA LQR: APLICAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS SUJEITOS A FALHAS ESTRUTURAIS

**Renam De A. Barreto\***, **Luiz F. S. Buzachero\***, **Emerson R. P. Da Silva\***, **Edvaldo Assunção\*\***, **Marcelo C. M. Teixeira\*\***, **Rodrigo P. Caun\*\*\***

*\*Laboratório de Controle e Otimização de Sistemas - LACOS, Departamento de Engenharia Elétrica UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio Avenida Alberto Carazzai, 1640, 86300-000, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil*

*\*\*Laboratório de Pesquisa em Controle, Unversidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia Av. Jose Carlos Rossi, no 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil*

*\*\*\*Coordenação de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná Rua Marcílio Dias, 635, 86812-460, Apucarana, Paraná, Brasil*

Emails: renambarreto@alunos.utfpr.edu.br, luizf@utfpr.edu.br, emersonr@utfpr.edu.br, edvaldo.assuncao@unesp.br, marcelo.minhoto@unesp.br, rodrigocaun@utfpr.edu.br.

---

**Abstract:** In this work, a design technique is proposed to guarantee the stability of continuous switched linear systems, based on the linear quadratic regulator (LQR) by approximation via linear matrix inequalities (LMIs) in uncertain linear systems, or subject to failures to occur. This technique is of a feedback nature and the project is based on the solution of the so-called Lyapunov-Metzler inequalities, based on quality, the condition of stability is expressed. The technique is applied to an active suspension system in order to compare the performance of motors with and without switching as a way of illustrating the efficiency of the proposed theorems. At the end of this work, a performance analysis of this design technique applied to systems with invariant uncertainties without time.

**Resumo:** Neste trabalho, é proposta uma técnica de projeto para garantir a estabilidade de sistemas lineares chaveados contínuos, tendo como base o regulador linear quadrático (do inglês, Linear Quadratic Regulator - LQR) por aproximação via desigualdades matriciais lineares (do inglês, Linear Matrix Inequalities - LMIs) em sistemas lineares incertos, ou sujeitos a falhas estruturais. Esta técnica é de natureza realimentada e o projeto se baseia na solução das chamadas desigualdades de Lyapunov-Metzler, a partir da qual expressa-se a condição de estabilidade. A técnica é aplicada a um sistema de suspensão ativa de modo a comparar o desempenho dos controladores projetados, como forma de ilustrar a eficiência dos teoremas propostos. Ao final deste trabalho é apresentado uma análise de desempenho desta técnica de projeto aplicada a sistemas com incertezas invariantes no tempo.

**Keywords:** Optimal controlers; Linear Quadratic Regulator; Robust Stability, Robust switched control; Structural Failures; Decay Rate.

**Palavras-chaves:** Controle Ótimo; Regulador Linear Quadrático; Estabilidade Robusta; Controle Robusto Chaveado; Falhas Estruturais; Taxa de Decaimento.

---

## 1. INTRODUÇÃO

As técnicas de controle ótimo baseiam-se na obtenção de uma lei de controle por meio da minimização ou maximização do custo funcional associado a índices de desempenho, garantindo não apenas estabilidade, mas também a satisfação dos critérios de desempenho estabelecidos pelos projetistas (Zhai et al., 2014). O Regulador Linear Quadrático se trata de uma aplicação particular de um problema de otimização e

destaca-se por sua ampla aplicação prática e abordagens em diversos trabalhos, como em Das et al. (2013), que traz a aplicação do LQR na sintonia de controladores PID ótimos.

Esse tipo de controlador ótimo quadrático pondera os estados e o sinal controle, com objetivo de otimizar a trajetória dos estados ao mesmo tempo que minimiza a energia gasta pelo controlador mediante a definição de uma função objetivo, cuja otimização garante a estabilidade do sistema em malha fechada, satisfazendo as restrições do projeto (Zhai et al.,

2014; Das et al., 2013). Algumas características tornam a utilização de controladores do tipo LQR vantajosa, como: (a) possibilidade de utilizar do modelo em espaço de estados; (b) geração do sinal ótimo de controle por meio da resolução da Equação de Riccati – ARE (do inglês, Algebraic Riccati Equation); (c) Ponderação dos vetores de estado e controle por meio das matrizes Q e R, respectivamente (Caun et al., 2018; Das et al., 2013).

De acordo com Caun et al. (2018) uma das formas de solucionar a ARE se dá por meio das Desigualdades Matriciais Lineares do inglês (Linear Matrix Inequalities - LMIs), apresentada como uma ferramenta eficiente na resolução numérica de problemas de otimização convexa. As LMIs possibilitam a incorporação de incertezas em seus modelos e são embasadas no critério de estabilidade de Lyapunov (Das et al., 2013).

No trabalho de Caun et al. (2018) é apresentada uma formulação do problema LQR via LMIs com inserção da taxa de decaimento, que possibilita a extrapolação do problema do LQR robusto. De acordo com Buzachero et al. (2014), é possível obter uma abordagem que traz resultados menos conservadores, por meio de controle robusto chaveados técnica que oferece um melhor desempenho global, além de fornecer vantagens de factibilidade e desempenho em comparação a outras técnicas existentes (Deaecto, 2010). A técnica de chaveamento de sistemas apresenta importantes resultados com abordagem em diversos trabalhos como pode ser visto em Eric Peterson e Hary G. Kwany (2014) em que é proposto um regulador adaptativo para uma família de sistemas dependente de parâmetros com chaveamento baseado nas funções de Lyapunov e em Menhour, Charara e Lechner (2014), o qual apresenta um controle de mudança de direção do veículo fornecendo condições suficientes para a convergência global para controladores chaveados.

Dentre as técnicas para a estabilidade de sistemas lineares chaveados propostas por Geromel e Colaneri (2006), encontra-se uma função Lyapunov-Metzler quadrática por partes, o que viabiliza o projeto de controladores robustos para sistemas incertos e limitados por norma com uma regra de chaveamento  $\sigma$  baseada na escolha do mínimo da função energia (Geromel and Deaecto, 2009). O resultado destas pesquisas fornece condições de estabilidade de sistemas sujeitos a incertezas politópicas do tipo LPV (garantindo a possibilidade de as incertezas sofrerem variações bruscas), garantindo que o sistema seja globalmente assintoticamente estável (Deaecto et al., 2011).

São abordados neste trabalho pontos cruciais relacionados aos projetos de controladores robustos chaveados, onde através dos conceitos e técnicas aqui expostos, objetiva-se encontrar uma estratégia embasada na teoria de controle ótimo que permita a comutação entre os controladores. A técnica é testada em um sistema de suspensão ativa, comparando-se o resultado entre controladores LQR robusto e LQR robusto chaveado, projetados com uma mesma taxa de decaimento. No conhecimento dos autores esse é um resultado inédito.

## 2. CONTROLE ÓTIMO

Considere o sistema linear, controlável, estabilizável e invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são matrizes que descrevem a dinâmica do sistema,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle.

Segundo Estévez e Yakubovich (2013), a resolução do problema ótimo quadrático se dá pela busca de uma lei de controle  $u(t)$  que minimize a função quadrática  $J(t)$  tal que:

$$J(t) \triangleq \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt, \quad (2)$$

onde Q e R são a matrizes simétricas definidas positivas, também chamadas de matrizes de ponderação.

As variáveis de controle são expressas por um vetor ganhos de realimentação de estados, da forma:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (3)$$

a solução para o problema LQR pode ser dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -(R)^{-1} B'Px(t), \quad (4)$$

de modo que satisfaça a equação de Riccati (ARE):

$$(A'P + PA - PB R)^{-1} B'P + Q = 0. \quad (5)$$

## 3. FORMULAÇÃO EM LMIs DO CONTROLE LQR

De acordo com Caun et al (2018), o problema LQR pode resolvido através das equações de Riccati (ARE), onde o Lema 1 é de grande importância para a formulação do problema LQR em termos de LMIs.

**Lema 1 (Complemento de Schur):** *Seja  $M_1(x) = M_1(x)'$ ,  $M_3(x) = M_3(x)'$ , e  $M_2$  dependente de modo afim da variável x. Então a LMI*

$$\begin{bmatrix} M_1(x) & M_2(x) \\ M_2(x)' & M_3(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (6)$$

é equivalente a desigualdade matricial

$$M_3(x) > 0, \quad M_1(x) - M_2(x)(M_3(x)^{-1})M_2(x)' > 0, \quad (7)$$

ou ainda,

$$M_1(x) > 0, \quad M_3(x) - M_2(x)(M_1(x)^{-1})M_2(x)' > 0. \quad (8)$$

A prova deste lema é bastante sementada na literatura e apresentada por Boyd et al., (1994).

De acordo com Ge et al. (2002) o problema LQR pode ser expresso via LMIs denotado pelo teorema abaixo:

**Teorema 1 (LQR-LMI):** *O sistema (1) é estável por  $u(t) = -Kx(t)$ , se existirem matrizes  $S$  e  $Y$ , tal que as seguintes LMIs são verificadas:*

$$\min_{S=S'>0, Y} \mu$$

$$\begin{bmatrix} AS + SA' + BY + Y'B' & S & Y' \\ S & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

onde o ganho de realimentação de estados dado por  $K = -YP$  e  $P = S^{-1}$ .

A prova do teorema acima é apresentada com todos os detalhes por Ge et al., (2002).

Segundo Chilali e Gahinet (1996) é possível melhorar a resposta transitória do controlador LQR utilizando o critério da  $\alpha$ -estabilidade incluindo a taxa de decaimento através das restrições de desempenho. Desta forma, como apresentado por Caun et al., (2018) o Teorema 1 pode ser reformulado contemplando também condições para estabilidade robusta.

**Teorema 2 (Generaliza LQR-LMI,  $\alpha$ -estabilidade):** *O sistema (1) é estável por (4) com taxa de decaimento maior ou igual a ( $\alpha$ ) se existirem matrizes  $S$  e  $Y$  e, tal que as seguintes LMIs são verificadas:*

$$\min_{W=W'>0, Y} \mu$$

$$\begin{bmatrix} G_i & S & Y' \\ S & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

Sendo  $G = A_iS + SA_i' + B_iY + Y'B_i' + 2\alpha S$ , o ganho de realimentação de estados dado por  $K = -YP$  e  $P = S^{-1}$ .

**Prova:** Vide (Caun et al., 2018) para maiores detalhes.

#### 4. CHAVEAMENTO DE SUBSISTEMAS

Os conceitos aqui apresentados serão usados para a formulação do projeto de controladores robustos chaveados, onde a estratégia de controle é elucidada pela Figura 1.

Considere o sistema politópico chaveado na forma de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A_{\lambda\sigma}(t)x(t), x(0) = x_0, \quad (13)$$

para qualquer  $t \geq 0$  para algum  $\sigma(x(t)) \in \mathbb{K}$  com  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ , onde  $N$  é o número de vértices do politopo de incertezas, com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda$  pertence ao simplex unitário  $\Lambda$ , conforme definido por:

$$\Lambda = \lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \quad (14)$$

o vetor de estado e a matriz  $A_{\lambda\sigma}(t)$  é apresentado abaixo:

$$A_{\lambda\sigma}(t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j A_{j\sigma}. \quad (15)$$

Quanto aos índices de  $A_{j\sigma}$ , o primeiro refere-se ao vértice do politopo e o segundo à regra de chaveamento, responsável pela escolha que verificará a estabilidade do sistema incerto.

Geromel e Colaneri (2006) definem a função de Lyapunov quadrática por partes como:

$$v(x) := \min_{i, \dots, N} x' P_i x = \min_{i, \dots, N} (\sum_{i=1}^N \lambda_i x' P_i x), \quad (16)$$

em que  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétricas e definidas positivas. Dada a existência de descontinuidades no chaveamento das funções, (16) não é diferenciável para qualquer  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Desta forma, obtém-se uma  $g(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ , e as condições para que a regra de chaveamento fornecidas por:

$$\sigma(t) = \min g(x(t)), \quad (17)$$

fazendo com que a origem do sistema (13) seja globalmente assintoticamente estável. Com base nisto, definiu-se o conjunto:

$$I(x) = \{i : v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'(t) P_i x(t)\}, \quad (18)$$

em que  $v(x)$  solução de (16) e desta forma  $I(x)$  pode possuir mais de um elemento cuja função (16) não é diferenciável, ou seja, a solução do mínimo não é única.

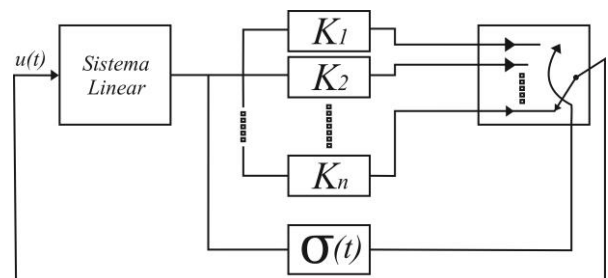


Figura 1: Esquemático do controle chaveado para uma planta incerta. Fonte: Adaptado de (Geromel and Deaecto, 2009).

##### 4.1. Condições para estabilidade robusta para sistemas chaveados.

O Teorema 3 apresentado na sequência, adequado a partir do apresentado em Deaecto (2010), será estendido para

inclusão da taxa de decaimento e otimização utilizando LQR.

**Teorema 3. (Estabilidade robusta):** Sendo  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas, se existirem um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas  $\{P_1, P_1, \dots, P_n\}$  e  $\gamma \in \mathcal{M}$  satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$A'_{ji} P_i + P_i A_{ji} + \gamma(P_j - P_i) + Q_i < 0, \quad (19)$$

em que  $i, j \in \mathbb{K}$ , então a lei de controle

$$\sigma(t) = g(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t) P_i' x(t), \quad (20)$$

faz com que o sistema (13) seja assintoticamente estável.

A prova deste teorema é apresentada de maneira detalhada por Daecto (2011).

### 5. PROJETO ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO.

O principal objetivo nesta etapa é determinar uma regra de chaveamento com foco na estabilização de sistemas politópicos realimentados, sujeitos a taxa de decaimento maior ou igual a um escalar  $\alpha$ , descrito pela seguinte equação em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = (A_\lambda + B_\lambda K_\sigma)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (21)$$

para isso, considere o Teorema 3 a seguir:

**Teorema 4.** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $S_i = P_i^{-1}$ , matrizes  $Y_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  um escalar  $\gamma \geq 0$  e um escalar  $\alpha \geq 0$  satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler:

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A_j S_i + B_j Y_i\} + (2\alpha - \gamma)S_i & \gamma S_i \\ \gamma S_i & -\gamma S_i \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

Desta forma a regra de chaveamento definida por  $\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t)$  e os ganhos de realimentação  $K_i = Y_i S_i^{-1}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  fazem com que a origem  $x = 0$  do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, estando o sistema sujeito a taxa de decaimento maior ou igual a  $\alpha$  (Buzachero et al., 2014).

Observa-se que sendo a restrição de taxa de decaimento satisfeita, assim também será a estabilidade robusta, por meio da escolha da menor função energia a cada instante de tempo.

### 6. PROJETO DE CONTROLADOR LQR ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO.

Considerando os desenvolvimentos apresentados para o controle LQR e controle chaveado robusto, foi concebida a seguinte proposta apresentada no Teorema 5.

**Teorema 5. (LQR robusto chaveado):** Dadas as matrizes de ponderação  $Q_i$  e  $R_i$ , se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $S_i = S_i' > 0$ ,  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , constantes  $\gamma \geq 0$ , para obtenção e factibilidade e  $\alpha \geq 0$  para restrição de taxa de decaimento, então, a origem  $x = 0$  do sistema realimentado com os controladores chaveados será um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, estando o sistema sujeito a taxa de decaimento maior ou igual a  $\alpha$ , se minimizarmos um escalar  $\mu > 0$  tais que as condições (22) e (23) sejam satisfeitas:

$\min \mu$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i + 2\alpha S_i & \gamma S_i & \dots & \gamma S_i & S_i & Y_i' \\ \gamma S_i & \gamma S_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma S_i & 0 & 0 & -\gamma S_N & 0 & 0 \\ S_i & 0 & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

a regra de chaveamento  $\sigma(x(t)) = \arg \min x'(t) S_i^{-1} x(t)$ ; e os controladores  $K_i = Y_i S_i^{-1}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Demonstração.** Assuma que existam matrizes  $S_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  como solução de (23) e (24) para algum  $\gamma \geq 0$  e  $\alpha \geq 0$ . Aplicando o complemento de Schur por duas vezes consecutivas em relação a última linha e última coluna de (24) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i + 2\alpha S_i + Y_i' R_i Y_i + S_i' Q_i S_i & \gamma S_i & \dots & \gamma S_i \\ \gamma S_i & -\gamma S_i & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \gamma S_i & 0 & 0 & -\gamma S_i \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

Multiplicando os dois lados de (25) por  $\text{diag}\{S_i^{-1}, \dots, I\}$ , e aplicando novamente o complemento de Schur com relação a segunda linha e segunda coluna, é obtido

$$\text{Sym}\{P_i(A_j + B_j K_i)\} + \gamma(\sum_{j=1}^N P_j + P_i) + 2\alpha P_i + K_i' R_i K_i + Q_i < 0, \quad (26)$$

com  $P_i = S_i^{-1}$ , para  $i, j \in \mathbb{K}$ . Multiplicando o resultado por  $\lambda_j \geq 0$  e somando  $\forall j = 1, 2, \dots, N$ , encontra-se

$$\text{Sym}\{P_i(A_\lambda + B_\lambda K_i)\} + \gamma \sum_{j=1}^N \lambda_j (P_j - P_i) + 2\alpha P_i + K_i' R_i K_i + Q_i < 0, \quad (27)$$

Dado que (26) é garantida para todo  $\lambda \in \Lambda$ , utilizando as condições de Lyapunov-Metzler dependente de parâmetros, então

$$\text{Sym}\{P_i(A_\lambda + B_\lambda K_i)\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\lambda) P_j - 2\alpha P_i < -(K_i' R_i K_i + Q_i), \quad (28)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ , para mais detalhes sobre as matrizes Metzler vide Daecto (2011). Sendo assim, conclui-se que:

$$\dot{v}(x) + 2\alpha v(x) < 0. \quad (29)$$

Finalizando a demonstração do Teorema 5.

### 7. EXEMPLO ILUSTRATIVO

O modelo a seguir foi apresentado por Assunção, Faria e Teixeira (2008) e utilizado neste trabalho para comparação entre os métodos aqui apresentados. O desafio consiste em atenuar as possíveis vibrações indesejáveis no assento do motorista em decorrência da passagem por superfícies irregulares, atuando sobre  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

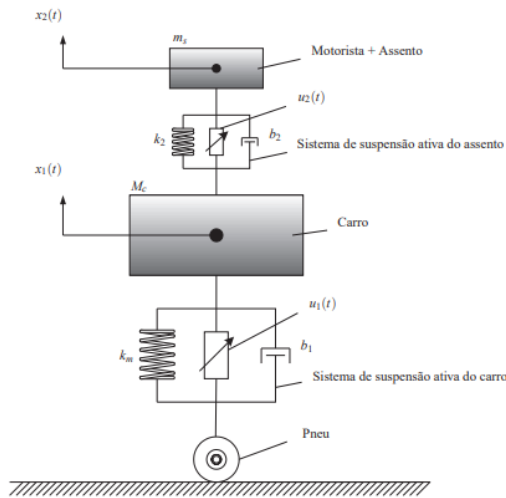


Figura 2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro.

Os estados  $x_1(t)$  e os  $x_2(t)$  estão disponíveis para realimentação, onde  $x_3 = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{x}_2$ , e  $y_1(t) = x_1(t)$  e  $y_2(t) = x_2(t)$  são as saídas do sistema. A representação em espaço de estados é descrita em (30) (Assunção; Faria; Teixeira, 2008).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_2}{M_c} & \frac{-k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{-b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{M_s} \end{bmatrix} u(t), \quad (30)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

O conjunto massa do assento (20kg) somada a massa do motorista (50 a 100kg) juntamente com a possibilidade de quebra do amortecedor do assento ( $b_2 = 0$ ), são os parâmetros incertos do problema. Constitui-se um politopo com quatro vértices, sendo eles representados pelos intervalos  $70\text{kg} < m_s < 120\text{kg}$  e  $0 \leq b_2 \leq 5 \times 10^2 \text{ Ns/m}$  respectivamente.

Assume-se para os demais parâmetros os seguintes valores: A mola  $k_m = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$ , o amortecedor  $b_1 = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$  e a mola  $k_2 = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$ .

A resolução das LMIs é realizada pelo *software* MatLab®, em conjunto com o solver SeDuMi (Sturm, 1999).

### 8. SINTONIA DOS PROJETOS DE CONTROLE.

#### 8.1 Sintonia do controlador LQR robusto com incertezas invariantes no tempo.

Para encontrar os ganhos dos controladores, é necessário ajustar as matrizes  $Q$  e  $R$  de acordo com necessidades do projeto. Os ganhos das matrizes de ponderação foram encontrados de maneira empírica, e encontram-se logo abaixo:

$$Q = 0,025 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R = 0,025 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Então, por meio do conjunto de matrizes acima, e das LMIs (11) e (12), fixando a taxa de decaimento  $\alpha$  em 0,5 projetou-se o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 0,1199 & -0,1079 & 0,0421 & -0,0134 \\ 1,7473 & -0,2196 & -0,4496 & 0,4205 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (32)$$

Com a estabilidade do garantida pelo Teorema 2.

#### 8.2 Sintonia do controlador LQR robusto chaveado com incertezas invariantes no tempo.

Novas matrizes de ponderação foram escolhidas de forma a atender as condições de projeto, considerando o Teorema 4, apresentadas logo abaixo:

$$Q_1 = 0,025 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_1 = 0,025 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

e

$$Q_2 = 0,025 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_2 = 0,025 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Através do conjunto de matrizes (33) e (34) e das LMIs (24) e (25), fixando a taxa de decaimento  $\alpha$  em 0,5 projetou-se os seguintes controladores:

$$K1 = \begin{bmatrix} -0,1262 & 0,1084 & -0,0458 & 0,0146 \\ -1,5455 & 0,0946 & 0,5067 & -0,4417 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (35)$$

e

$$K2 = \begin{bmatrix} -0,0494 & 0,0429 & -0,0179 & 0,0057 \\ -1,6010 & 0,1351 & 0,4882 & -0,4349 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (36)$$

Com a estabilidade do garantida pelo Teorema 5.

## 9. COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DE CONTROLE

O experimento consiste em utilizar os controladores (32), e em sequência (35) e (36) em malha fechada com o sistema incerto, considerando  $x_0 = [0,1 \ -0,1 \ 0,5 \ 0]'$  como condições iniciais. Uma falha (90%) é inserida no amortecedor do sistema de suspensão ativa do assento aos dois segundos, com a finalidade de comparar os resultados para os projetos de controle submetidos a uma situação de falha inesperada.

As figuras 3 e 4 mostram a dinâmica do sistema para ambos os projetos atuando sobre o politopo incerto, juntamente com a ocorrência da falha.

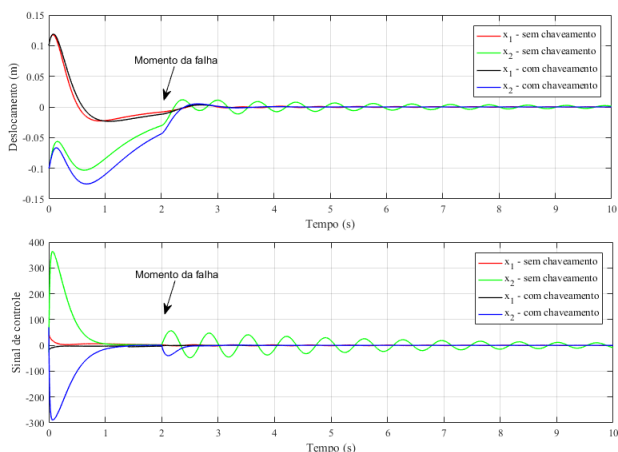


Figura 3: A) Implementação dos controladores (32) e (35) – (36) com  $m_s = 70\text{kg}$  e falha de 90% no amortecedor. B) Sinais de controle.

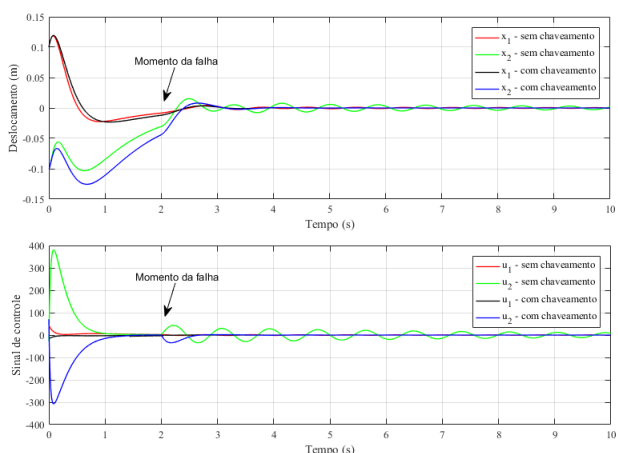


Figura 4: A) Implementação dos controladores (32) e (35) – (36) com  $m_s = 120\text{kg}$  e falha de 90% no amortecedor. B) Sinais de controle.

Durante a fase de projeto, o LQR robusto apresentou infactibilidade para condições iniciais com dimensões elevadas, além disto, a obtenção das matrizes de ponderação foi limitada em função do conservadorismo das LMIs

associadas. Em contraponto, o controlador LQR robusto chaveado apresentou maior variabilidade de configurações, tanto para as condições iniciais quanto para os ganhos das matrizes de ponderação, além da possibilidade de incluir incertezas variantes no tempo.

Através das Figuras 3A e 4A é possível afirmar de maneira concreta que após a ocorrência da falha, o sistema sem chaveamento apresentou oscilações, principalmente com relação a  $x_2$  (variável diretamente afetada pela falha), além de um elevado tempo de acomodação, ao contrário do LQR robusto chaveado que praticamente anulou os efeitos indesejados da falha, estabilizando rapidamente o sistema.

As análises gráficas indicam que as ações de controle associadas ao LQR robusto chaveado sofreram pouca influência da falha, ao contrário do LQR robusto sem chaveamento. As Figuras 3B e 4B indicam uma oscilação com tendência negativa, porém sustentada por um longo período de tempo.

Nas Figuras 5 e 6 são apresentadas as regras de chaveamento, definidas com base na escolha da menor função energia a cada instante de tempo.

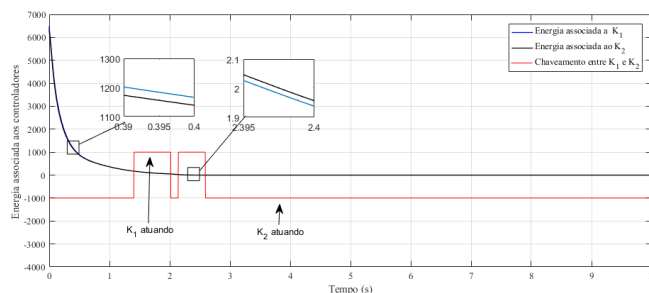


Figura 5: Energia do sistema e lei de chaveamento considerando  $m_s = 70\text{kg}$  e falha de 90% no amortecedor.

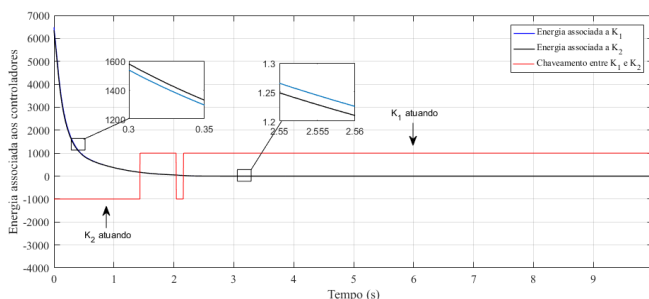


Figura 6: Energia do sistema e lei de chaveamento considerando  $m_s = 120\text{kg}$  e falha de 90% no amortecedor.

É ilustrado acima o funcionamento do LQR robusto chaveado. A linha em vermelho mostra o momento de atuação de cada controlador, as linhas em azul e preto representam as funções energia relacionadas aos controladores a cada instante de tempo. Ao aproximar os gráficos, é possível destacar a inversão das funções, indicando que houve uma comutação, de

forma a garantir a atuação do controlador que forneça o menor custo de energia para a estabilização do sistema.

## CONCLUSÕES

Este trabalho propôs uma estratégia híbrida de controle com base nos conceitos de controle ótimo e controle robusto chaveado para sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais. Sua fundamentação em LMIs possibilitou a inclusão de incertezas do tipo politópicas, além da taxa de decaimento no sistema. O projeto LQR robusto chaveado proposto mostrou-se bem-sucedido em atenuar as vibrações indesejáveis causadas pela falha no amortecedor do assento, além de oferecer mais liberdade na definição das matrizes de ponderação, comprovando assim, um melhor desempenho e maior flexibilidade em relação ao LQR robusto sem chaveamento. A escolha por uma estratégia, que relacione o controle robusto chaveado ao LQR foi satisfatória, uma vez que é possível garantir resultados menos conservadores, até aqui, com base em fundamentações bibliográficas, considera-se que os resultados são inéditos. A utilização de métodos heurísticos, como algoritmos genéticos, para obtenção das matrizes de ponderação do LQR é sugerida para futuros trabalhos.

## REFERÊNCIAS

- Assunção, E.; Faria, F. A.; Teixeira, M. C. M. (2008). Controle robusto de sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 7, Presidente Prudente. Proceedings. Presidente Prudente: [s.n.], 6p.
- Assunção, E.; Teixeira, M. C. M.; Faria, F. A.; Silva, N. A. P. D. & Cardim, R. (2007). Robust state derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control* 80(8): 1260–1270.
- Boyd, S.; Ghaoui, L.; Feron, E. and Balakrishnan, V (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Volume 15 of Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.
- Buzachero, Luiz, F. S. (2014) Controle robusto chaveado de sistemas lineares variantes no tempo com aplicação em falhas estruturais. 120 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
- Caun, R. P.; Assunção, E.; Texeira, M. C. M. Caun, A. P. (2018) LQR-LMI control Applied to convex-bounded domains, 5:1457206.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 41(3): 358 –367. Das, Saptarshi; Pan, I.; Halder, K.;
- Das, S., Pan, I., Halder, K., Das, S. and Gupta, A. (2013). LQR Based Improved Discrete PID Controller Design Via Optimum Selection of Weighting Matrices Using Fractional Order Integral Performance Index, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, pp. 4253-4268.
- Deaecto, G. S. (2010). Projeto de controladores dinâmicos com comutação : aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Daecto, G. S.; Geromel, J. C.; Daafouz, J. (2011) Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 84, n. 9, p. 1500–1508.
- Estevez, D. and Yakubovich, D. V. (2013) Decay Rate Estimations for Linear Quadratic Optimal Regulators. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 439, pp. 3332-3358.
- Ge, M.; Chiu, M. and Wang, Q (2002). Robust PID controller design via LMI approach. *Journal of Process Control*, Vol. 12, pp. 3-13.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal Control Optimization* 45: 1915–193
- Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2009). Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems, *Automatica* 45(2): 593–597.
- Menhour, L. Charara, A. Lechner, D. (2014). Switched LQR/ $H_\infty$  steering vehicle control to detect critical driving situations. *Control Engineering Practice*.
- Peterson, E. Kwany, H. G. (2014). *Multi-Model Adaptive Regulation for a Family of Systems Containing Different Zero Structures*. Drexel University, Philadelphia.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* 11- 12: 625-653.
- Zhai, J.; Shenb, B.; Gao, J.; Feng, E. and Yin, H. (2014). Optimal Control of Switched Systems and its Parallel Optimization Algorithm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 261, pp. 287–298.