

Estimação de Estados de um Carro-Pêndulo Invertido Usando um Algoritmo *Fuzzy* Adaptativo Baseado em Inovação [★]

Miriam M. Serrepe Ranno ^{*},
Francisco das Chagas de Souza ^{*}, Ginalber L. O. Serra ^{**}

^{*} *Laboratório de Sistemas Adaptativos e Processamento de Sinais (LSAPS), Universidade Federal do Maranhão (UFMA), São Luís-MA, Brasil, (e-mail: serrepe.miriam@discente.ufma.br; francisco.souza@ufma.br)*

^{**} *Inteligência Computacional Aplicada à Tecnologia, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), São Luís-MA, Brasil, (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: State estimation is a technique used in system control and identification, fault detection, monitoring, and prediction. In this work, state estimation of a cart-inverted pendulum system is developed using a *fuzzy* innovative-based adaptive algorithm, taking into account that the cart-inverted pendulum is a relevant system in real-world applications, such as space vehicle and missile launches, cranes for container handling, and self balancing robots. Numerical simulation results show the effectiveness and robustness of the used method compared to the extended Kalman filter, considering four challenging scenarios.

Resumo: Estimação de estados é uma técnica usada em controle e identificação de sistemas, detecção de falhas, monitoramento e previsão. Neste trabalho, a estimação de estados de um sistema carro-pêndulo invertido é desenvolvida usando um algoritmo *fuzzy* adaptativo baseado em inovação, levando-se em consideração que o carro-pêndulo invertido é um sistema relevante com muitas aplicações no mundo real, tais como lançamentos de foguetes e mísseis, guindastes para manuseamento de contêineres e robôs com auto-equilíbrio. Resultados de simulações numéricas mostram a eficácia e robustez do método utilizado em relação ao filtro de Kalman estendido, considerando quatro cenários desafiadores.

Keywords: Cart-inverted pendulum; extended Kalman filter; *fuzzy* innovative-based adaptive filter; state estimation.

Palavras-chave: Carro-pêndulo invertido; filtro de Kalman estendido; filtro *fuzzy* adaptativo baseado em inovação; estimação de estados.

1. INTRODUÇÃO

A estimação de estados de sistemas dinâmicos não lineares é importante em controle e identificação, monitoramento, previsão e detecção de falhas (Mokhtari and Yen, 2020; Patra, 2020). O objetivo da estimação é obter os estados de um sistema dinâmico baseado em observações corrompidas por ruído (Hu et al., 2015).

O carro-pêndulo invertido é um sistema não linear, que pode ser tratado como um problema de controle típico para estudar as teorias de controle modernas (Kumar and Jerome, 2013), assim como as teorias de estimação (Mokhtari and Yen, 2020). Inúmeros métodos de estimação foram propostos para encontrar algoritmos rápidos e confiáveis

que sejam capazes de estimar com precisão os estados e as medidas de um sistema dinâmico. Além disso, o desempenho dos filtros requerem o conhecimento da equação de estado da planta e das fontes de estatísticas de ruído que afetam o sistema (Belanger, 1974). Dentre os métodos adaptativos existentes na literatura, o filtro de Kalman adaptativo (AKF) tem sido uma das estratégias consideradas para estimar o vetor de estado, visando prevenir problemas de divergência devido a erros de modelagem (Mohamed and Schwarz, 1999).

Muitos esforços foram feitos para melhorar a estimativa das matrizes de covariância usando o método estimativa adaptativa baseada na inovação (IAE) em que os processos e matrizes de covariância de medição são adaptados (Belanger, 1974). O método IAE apresenta o problema de falta de convergência e exigência de janela grande. Neste contexto, é considerada a teoria da máxima verossimilhança (MV) para calcular as matrizes de covariância de ruído (Kay, 1993).

[★] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, da Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

A fim de resolver os problemas de precisão e divergência, é necessária uma tecnologia de aprimoramento de desempenho adicional, como é o sistema *fuzzy*, que é uma das abordagens comuns empregadas para otimizar o algoritmo AKF, especificamente as matrizes de covariância. Inúmeros métodos foram propostas para a modificação do IAE usando sistema *fuzzy*, visando obter os valores das matrizes de covariância (Ranno et al., 2020; Woo et al., 2019; Hamid et al., 2018).

A metodologia apresentada neste artigo está baseada no filtro IAE utilizando sistema *fuzzy* Mamdani tipo 1 (MF-IAE) no domínio do tempo discreto para estimar os estados de um sistema carro-pêndulo invertido. A principal contribuição deste artigo consiste em destacar o mecanismo de ajuste *on-line* das matrizes de covariância do ruído de processo e medição para obter maior precisão na estimação dos estados do sistema carro-pêndulo invertido, em um ambiente com estatísticas incertas de ruído, utilizando análise de estimativa adaptativa baseado em inovação.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, é apresentado o sistema dinâmico carro-pêndulo invertido. Na Seção 3, o algoritmo IAE baseado na máxima verossimilhança (IAE-MV) é descrito. O algoritmo *fuzzy* adaptativo baseado na inovação é apresentada na Seção 4. As simulações computacionais bem como a métrica para avaliação da aplicação do método MF-IAE no carro-pêndulo invertido são apresentadas na Seção 5. Na Seção 6, apresentam-se as conclusões.

2. SISTEMA DINÂMICO CARRO-PÊNDULO INVERTIDO

Nesta seção, apresenta-se o modelo do sistema dinâmico carro-pêndulo invertido, o qual será usado para ilustrar a eficácia dos algoritmos EKF e MF-IAE.

O carro-pêndulo invertido é um sistema instável, não linear, multivariável e quarta ordem (Kumar and Jerome, 2013). A representação deste sistema pode ser observada na Figura 1.

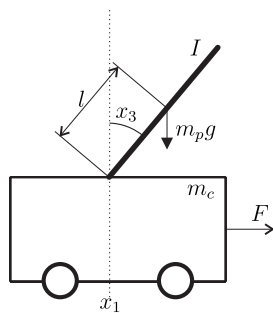


Figura 1: Representação do sistema carro-pêndulo invertido (Chen, 1998).

Considere o sistema dinâmico no tempo contínuo dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{w}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{v}(t), \quad (2)$$

onde \mathbf{f} corresponde ao conjunto de funções não lineares de estados, \mathbf{h} corresponde ao conjunto de equações não lineares de saída, $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estados do sistema e $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entrada do sistema. Os ruídos de processo e medição são $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, respectivamente. O

ruído de processo afeta a dinâmica do modelo e o ruído de medição impacta a saída do modelo, sendo considerados não correlacionados, brancos e gaussianos, com matrizes de covariância conhecidas \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k , respectivamente.

As estatísticas dos ruídos de processo e medição são, respectivamente, representadas por

$$\mathbf{w}_k \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{Q}_k) \quad (3)$$

e

$$\mathbf{v}_k \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{R}_k). \quad (4)$$

As matrizes de covariância são obtidas como

$$\mathbf{Q}(i, j) = E[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(i, j) = E[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T]. \quad (6)$$

Além disso, como os ruídos de processo e medição são não correlacionados para todo i e j , tem-se

$$E[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j] = 0. \quad (7)$$

Desse modo, as equações que descrevem a dinâmica do sistema carro-pêndulo invertido são representadas como

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & -\frac{B_c M_2}{M_3} x_2(t) + \frac{m_p l B_p}{M_3} x_4(t) \cos x_3(t) \\ & - \frac{m_p^2 l^2 g}{M_3} \sin x_3(t) \cos x_3(t) + \frac{m_p l M_2}{M_3} x_4^2(t) \\ & \times \sin x_3(t) + \frac{M_2}{M_3} F(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & -\frac{B_p M_1}{M_3} x_4(t) + \frac{m_p l B_c}{M_3} x_2(t) \cos x_3(t) \\ & - \frac{m_p^2 l^2}{M_3} x_4^2(t) \sin x_3(t) \cos x_3(t) + \frac{m_p l g M_1}{M_3} \\ & \times \sin x_3(t) - \frac{m_p l}{M_3} \cos x_3(t) F(t) \end{aligned} \quad (11)$$

onde x_1 é a posição do carro em relação ao eixo horizontal, x_2 é a velocidade linear do carro, x_3 é a posição angular do pêndulo, x_4 é a velocidade angular do pêndulo, m_c é a massa do carro, m_p é a massa do pêndulo, l é a distância do centro de massa do pêndulo ao pivô que prende o pêndulo ao carro, g é a aceleração da gravidade, I é o momento de inércia do pêndulo, F é a força aplicada ao carro, B_c e B_p são os coeficientes de atrito do carro com o solo e do pêndulo com o pivô, respectivamente. Os parâmetros M_1 , M_2 e M_3 são dados na Tabela 1.

A discretização deste sistema (Equações 8 até 11) é obtida usando-se a aproximação $\dot{x}_i(t) \cong (\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}_i(k))/T$, com o período de amostragem em $T = 0,01$ s. Dessa forma, obtém-se as equações dinâmicas não lineares no domínio do tempo discreto dadas por

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) + \mathbf{v}_k, \quad (13)$$

onde $k = 1, \dots, N_k$ é o índice temporal, N_k é o número total de iterações (amostras de dados). Assim, resulta

$$x_{1,k} = x_{1,k-1} + Tx_{2,k-1} \quad (14)$$

$$x_{2,k} = x_{2,k-1} - T \frac{B_c M_2}{M_3} x_{2,k-1} + T \frac{m_p l B_p}{M_3} x_{4,k-1} \\ \times \cos x_{3,k-1} - T \frac{m_p^2 l^2 g}{M_3} \sin x_{3,k-1} \cos x_{3,k-1} \\ + T \frac{m_p l M_2}{M_3} x_{4,k-1}^2 \sin x_{3,k-1} + T \frac{M_2}{M_3} F_{k-1} \quad (15)$$

$$x_{3,k} = x_{3,k-1} + Tx_{4,k-1} \quad (16)$$

$$x_{4,k} = x_{4,k-1} - T \frac{B_p M_1}{M_3} x_{4,k-1} + T \frac{m_p l B_c}{M_3} x_{2,k-1} \\ \times \cos x_{3,k-1} - T \frac{m_p^2 l^2}{M_3} x_{4,k-1}^2 \sin x_{3,k-1} \\ \times \cos x_{3,k-1} + T \frac{m_p l g M_1}{M_3} \sin x_{3,k-1} \\ - T \frac{m_p l}{M_3} \cos x_{3,k-1} F_{k-1} \quad (17)$$

e

$$y_{1,k} = x_{1,k-1} + v_{1,k-1} \quad (18)$$

$$y_{2,k} = x_{3,k-1} + v_{2,k-1}. \quad (19)$$

Agora, aplica-se a expansão da série de Taylor até a primeira ordem às Equações 14 até 17 para obter-se a representação linearizada do sistema carro-pêndulo invertido em espaço de estados como

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k, \quad (21)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{D} são as matrizes Jacobianas (Brown and Hwang, 2012) calculadas como

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -M_2 B_p & \frac{m_p l^2 g l^2}{I M_1 + m_c m_p l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_p l B_p & \frac{m_p g l}{I M_1 + m_c m_p l^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ I + m_p l^2 \\ \frac{I M_1 + m_c m_p l^2}{I M_1 + m_c m_p l^2} \\ 0 \\ \frac{m_p l}{I M_1 + m_c m_p l^2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (22)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (23)$$

Assim, as matrizes de covariância de ruídos de processo e medição são representadas da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{r,k}^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{q,k}^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

e

$$\hat{\mathbf{Q}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{q,k}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{q,k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_{q,k}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{q,k}^2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

onde $\hat{\sigma}_{r,k}^2$ e $\hat{\sigma}_{q,k}^2$ são as variâncias de processo e medição, respectivamente.

Tabela 1. Valores dos parâmetros utilizados no sistema carro-pêndulo invertido (Kumar and Jerome, 2013).

Parâmetro	Valor
m_c	0,94 [Kg]
m_p	0,23 [Kg]
l	0,33 [m]
I	$1/3 \cdot m_p \cdot l^2$ [kg · m ²]
B_c	0,44 [N · m · s / rad]
B_p	0,05 [N · m · s / rad]
g	9,81 [m / s ²]
M_1	$m_c + m_p$ [m]
M_2	$I + m_p l^2$
M_3	$M_1 M_2 - m_c^2 l^2 \cos^2 x_{3,k}(k)$

3. ALGORITMO IAE BASEADO NA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Nesta seção, aborda-se o algoritmo adaptativo baseado em inovação (*Innovative-based adaptive estimation* - IAE). Além disso, é considerada a teoria da máxima verossimilhança (MV) para calcular a estimativa das informações estatísticas de ruído, ou seja, as matrizes de covariância de processo e medição.

As informações *a priori* sobre os ruídos de processo e medição são difíceis de obter na prática. Na verdade, o desempenho do filtro de Kalman (KF) pode diminuir e até mesmo causar a divergência no filtro se a informação *a priori* estiver errada (Woo et al., 2019). Portanto, uma abordagem usada para detectar a divergência do filtro e ajustar as matrizes de covariância de ruído é calcular a sequência de inovação do KF (Mohamed and Schwarz, 1999) dada por

$$\mathfrak{J}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-, \quad (26)$$

sendo $\hat{\mathbf{y}}_k^-$ é a saída estimada dada como

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-, \quad (27)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ é o estado de predição do filtro.

Aqui, destacamos que a sequência de inovação \mathfrak{J}_k representa o novo conteúdo de informação nas observações, sendo considerada a fonte de informação mais relevante para adaptação do filtro (Mohamed and Schwarz, 1999; Kailath, 1974). Portanto, para melhorar a estabilidade do filtro com base na estimativa adaptativa da informação estatística de ruído, o conceito de MV é usado em IAE através das novas informações. As propriedades mais importantes do método MV é a unicidade de sua solução e a consistência, o que significa que a estimativa de MV converge, no sentido probabilístico, para o valor verdadeiro da variável aleatória à medida que o número de amostras dos dados cresce sem limite.

De acordo com o teorema do limite central e considerando que a distribuição dos dados é gaussiana, a função densidade de probabilidade das medidas condicionadas no parâmetro adaptativo γ_k no tempo k (Mohamed and Schwarz, 1999) é dado como

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{y}|\gamma)_k} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-)} \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_k)^T \mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}^{-1} (\mathfrak{J}_k)} \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\mathfrak{J}_k}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_k)^T \mathbf{C}_{\mathfrak{J}_k}^{-1} (\mathfrak{J}_k)}, \quad (28)$$

onde $\mathbf{P}_{(\mathbf{y}|\gamma)_k}$ é o peso do filtro quando as medições \mathbf{y}_k estão disponíveis até o tempo k ; γ_k são os parâmetros adaptativos, ou seja, são as variações das medições de atualização; m é o número de medições e a matriz de covariância $\mathbf{C}_{\mathcal{J}_k}$ é dependente do parâmetro γ , sendo a chave para a adaptação. Dessa forma, a seguinte substituição será feita (Brown and Hwang, 2012):

$$\mathbf{C}_{\mathcal{J}_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k. \quad (29)$$

Derivando a matriz $\mathbf{C}_{\mathcal{J}_k}$ com respeito a γ_k , supondo que o processo dentro da janela de estimativa está em estado estacionário e que esta matriz é completamente conhecida e independente de γ_k , a Equação (29) pode ser reescrito como

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{\mathcal{J}_k}}{\partial \gamma_k} = \mathbf{H}_k \frac{\partial \mathbf{Q}_{k-1}}{\partial \gamma_k} \mathbf{H}_k^T + \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \gamma_k}. \quad (30)$$

Agora, considere que as N observações variam de j_0 a k . Assim, a função densidade conjunta das medições condicionadas no parâmetro adaptativo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(\mathbf{y}_{j_0}, \mathbf{y}_{j_1}, \dots, \mathbf{y}_{j_k} | \gamma)_j} &= \mathbf{P}_{(\mathbf{y}_{j_0} | \gamma)_j} \mathbf{P}_{(\mathbf{y}_{j_1} | \gamma)_j} \dots \mathbf{P}_{(\mathbf{y}_{j_k} | \gamma)_j} \\ &= \prod_{j=j_0}^k \mathbf{P}_{(\mathbf{y} | \gamma)_j}. \end{aligned} \quad (31)$$

Agora, determina-se o máximo do logaritmo natural da função de verossimilhança, a qual é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{func}} &= \prod_{j=j_0}^k \mathbf{P}_{(\mathbf{y} | \gamma)_j} \\ &= \prod_{j=j_0}^k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathcal{J}_j)^T \mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}^{-1}(\mathcal{J}_j)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Portanto, o logaritmo natural de \mathbf{L}_{func} é dado por (Mohamed and Schwarz, 1999):

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{L}_{\text{func}}(\mathbf{y} | \gamma)_k &= \sum_{j=j_0}^k \ln \{ \mathbf{P}_{(\mathbf{y} | \gamma)_j} \} \\ &= \sum_{j=j_0}^k \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathcal{J}_j)^T \mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}^{-1}(\mathcal{J}_j)} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ m * \ln(2\pi) + \sum_{j=j_0}^k \ln |\mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=j_0}^k \mathcal{J}_j^T \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_j}^{-1} \mathcal{J}_j \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

O critério considerado de maximizar \mathbf{P} torna-se a minimização do lado direito resultante da mesma equação; todas as inovações da estimativa dentro de uma janela de tamanho N serão somadas. A condição de MV torna-se (Mohamed and Schwarz, 1999)

$$\frac{\partial \ln \mathbf{P}_{(\mathbf{y} | \gamma)_k}}{\partial \gamma} = \sum_{j=j_0}^k \ln |\mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}| + \sum_{j=j_0}^k \mathcal{J}_j^T \mathbf{C}_{\mathcal{J}_j}^{-1} \mathcal{J}_j = 0. \quad (34)$$

Desse modo, as estimativas adaptativas das matrizes de covariância $\hat{\mathbf{R}}_k$ e $\hat{\mathbf{Q}}_{k-1}$ são dadas pelas Equações (Mehra, 1970; Kailath, 1972)

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \quad (35)$$

e

$$\hat{\mathbf{Q}}_{k-1} = \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} \mathbf{K}_k^T, \quad (36)$$

onde $\hat{\mathbf{R}}_k$ e $\hat{\mathbf{Q}}_{k-1}$ são as estimativas adaptativas do ruído de medição com base residual e ruído do sistema, respectivamente e $\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k}$ é a matriz de covariância de inovação estimada.

Assim, o cálculo da média de uma janela de estimativa móvel de tamanho N (Mohamed and Schwarz, 1999) é dada como:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=j_0}^k \mathcal{J}_j \mathcal{J}_j^T, \quad (37)$$

onde \mathcal{J}_j representa a j th inovação que ocorreu dentro da janela temporal $[j_0, k]$, sendo $j_0 = k - N + 1$.

4. ALGORITMO FUZZY ADAPTATIVO BASEADO NA INOVAÇÃO

Nesta seção, descreve-se o algoritmo MF-IAE para a estimação de estados de sistemas dinâmicos, levando em consideração o conceito do algoritmo IAE-MV e usando o sistema *fuzzy* Mamdani tipo 1 (MF) (Ranno et al., 2020).

A ideia principal do algoritmo MF-IAE é, a cada iteração, realizar o ajuste *on-line* das matrizes de covariância de ruídos usando um sistema MF. O sistema MF é popular devido ao seu simples projeto e por requerer pouca experiência do projetista (Do and Lin, 2019).

As matrizes de covariância de ruídos de processo e medição são monitoradas e ajustadas por uma variável chamada ajustes mínimos (**MAdj**) dada por

$$\mathbf{MAdj}_k = \hat{\mathbf{C}}_{T_k} - \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k}, \quad (38)$$

onde $\hat{\mathbf{C}}_{T_k}$ é a covariância teórica da sequência de inovação (Hamid et al., 2018) calculada como

$$\hat{\mathbf{C}}_{T_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \hat{\mathbf{R}}_k \quad (39)$$

e $\hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k}$ é a matriz de covariância da inovação obtida através da Equação (37). Agora, a variável de ajustes mínimos, **MAdj**, é calculada usando uma abordagem MF do tipo 1, como segue:

$$\mathfrak{R}_i : \text{SE } \hat{\mathbf{C}}_{T_k} = \mathcal{A}_i \text{ E } \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k} = \mathcal{B}_i \text{ ENTÃO } \mathbf{MAdj}_k = \mathcal{C}_i, \quad (40)$$

onde \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_i e \mathcal{C}_i são conjuntos *fuzzy* com $i = 1, \dots, r$, sendo r o número total de regras (Zadeh, 1973).

As funções de pertinência das variáveis de entrada e saída são gaussianas e sigmoidais, respectivamente. Na Tabela 2, é apresentado o resumo das relações entre as variáveis de entrada e saída, representadas por nove regras *fuzzy*, onde,

NP = *Negativo pequeno*, ZE = *Zero*, GA = *Grande*, AU = *Aumentar*, MA = *Manter*, e DI = *Diminuir*.

Tabela 2. Regras do sistema *fuzzy* Mamdani tipo 1.

$\hat{\mathbf{C}}_{T_k} \backslash \hat{\mathbf{C}}_{\mathcal{J}_k}$	NP	ZE	GA
NP	MA	DI	DI
ZE	AU	MA	DI
GA	AU	AU	MA

Finalmente, os valores das matrizes de covariância de processo e medição são ajustadas continuamente como:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{M} \text{Adj}_{\mathbf{Q}_{k-1}}, \quad (41)$$

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k - \mathbf{M} \text{Adj}_{\mathbf{R}_k}. \quad (42)$$

5. SIMULAÇÕES

Nesta seção, para avaliar o desempenho dos algoritmos MF-IAE e EKF, são realizadas simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações independentes) aplicadas na estimação de estados do sistema carro-pêndulo invertido, assumindo o estado inicial $\mathbf{x}_0 = [0.5 \ 0 \ 1.8 \ 0.5]^T$. Os algoritmos são comparados em 4 cenários desafiadores. Em tais cenários, as variâncias dos ruídos de processo e medição variam de valores pequenos a grandes, com o objetivo de testar o desempenho em termos de precisão e robustez dos algoritmos. Como sinal de excitação em todos os cenários de simulação, utiliza-se como entrada um sinal binário pseudo aleatório (*Pseudo random binary sequence - PRBS*) (Aguirre, 2007) (veja a Figura 2), visando destacar a robustez do MF-IAE na estimação de estados. A Tabela 1 mostra os valores usados para os parâmetros do sistema durante a simulação.

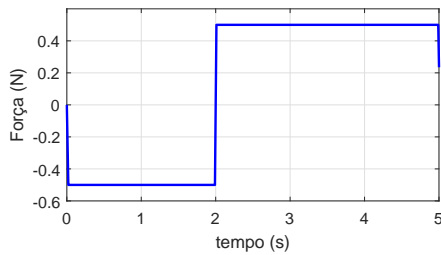


Figura 2: Sinal PRBS utilizado como entrada do sistema carro-pêndulo invertido.

A fim de demonstrar a eficiência do MF-IAE comparada com o EKF, utilizou-se métricas de avaliação baseadas na norma RMSE (*Root-Mean-Square Error*) para a verificação do desempenho do processo de estimação dos estados do carro-pêndulo invertido, as quais são ε_k e η dadas por

$$\varepsilon_k = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \sqrt{\frac{1}{n_x} \sum_{\alpha=1}^{n_x} (e_{\alpha,k}^r)^2} \quad (43)$$

$$\eta = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \frac{1}{N_k} \sum_{k=1}^{N_k} \sqrt{\frac{1}{n_x} \sum_{\alpha=1}^{n_x} (e_{\alpha,k}^r)^2} \quad (44)$$

com

$$e_{\alpha,k}^r = \hat{x}_{\alpha,k}^r - x_{\alpha,k}^r, \quad (45)$$

onde N_{MC} é o número total de realizações, r é o índice da realização, N_k é o número total de iterações (amostras), n_x é o número total de estados do sistema, α é o índice que indica o estado, $\hat{x}_{\alpha,k}$ é o estado estimado e $x_{\alpha,k}$ é o estado do sistema.

Variando-se o nível de ruído (variâncias de processo σ_r^2 e medição σ_q^2), observa-se que a dinâmica das variáveis de estado do carro-pêndulo invertido corrompidas por ruído foram rastreadas de forma eficiente pelo algoritmo MF-IAE, o qual apresenta um desempenho superior quando comparado ao EKF, conforme mostra a Tabela 3. Considerando-se o caso particular do cenário 1 com variâncias de processo $\sigma_r^2 = 0.1$ e medição $\sigma_q^2 = 0.2$, é mostrada na Figura

3 a comparação da evolução em termos da métrica ε_k , ressaltando que o algoritmo MF-IAE comparado com o EKF apresenta menor erro para os estados estimados do sistema dinâmico carro-pêndulo invertido. As estimações das variáveis de estado $x_{\alpha,k}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) do carro-pêndulo invertido, usando os algoritmos MF-IAE e EKF, estão ilustradas na Figura 3. Destaca-se a influência do sinal de excitação (veja a Figura 2) utilizado (o qual no instante de tempo 2s sofre uma variação de amplitude de -0.5 para $+0.5$) na estimação da posição do carro em relação ao eixo horizontal $x_{1,k}$. Entretanto, a métrica ε_k indica que o desempenho global do algoritmo MF-IAE continua superior ao EKF, conforme mostra a Figura 4. Note também que os estados $x_{2,k}$, $x_{3,k}$ e $x_{4,k}$ são adequadamente rastreadas pelo MF-IAE, evidenciando a sua eficiência e robustez no tratamento da estimativa dos estados em um ambiente com estatísticas incertas de ruído.

Tabela 3. Comparação de η obtido através das simulações de Monte Carlo para cada cenário.

Algoritmo	Métrica		η			
			$\sigma_q^2 = 0.2$		$\sigma_q^2 = 0.3$	
	$\sigma_r^2 = 0.1$ Cenário 1	$\sigma_r^2 = 0.2$ Cenário 2	$\sigma_r^2 = 0.1$ Cenário 3	$\sigma_r^2 = 0.2$ Cenário 4		
EKF	4.4782	5.2441	4.4426	4.9982		
MF-IAE	2.2153	2.2109	2.6581	2.6800		

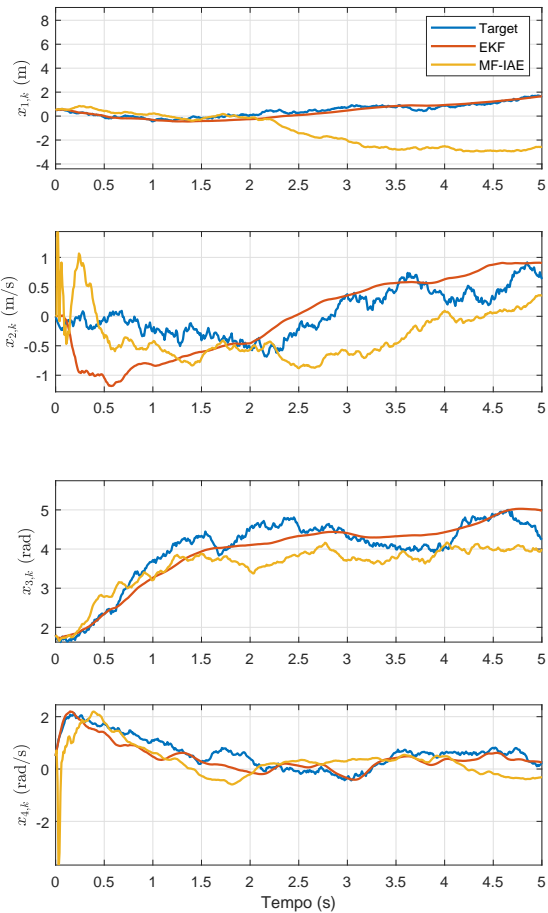


Figura 3: Estimação dos estados $x_{\alpha,k}$ para o cenário 1 com variância de processo $\sigma_r^2 = 0.1$ e medição $\sigma_q^2 = 0.2$ através de simulações de Monte Carlo com 100 realizações.

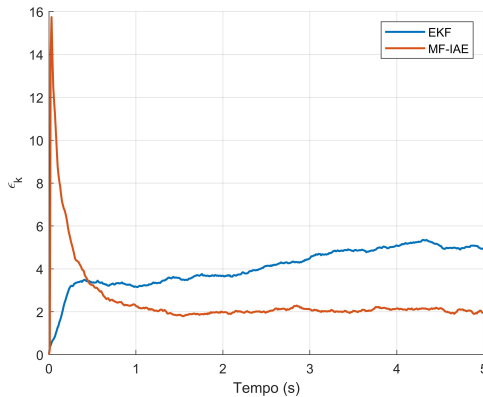


Figura 4: Evolução de ε_k para o cenário 1 com variância de processo $\sigma_r^2 = 0.1$ e medição $\sigma_q^2 = 0.2$ através de simulações de Monte Carlo com 100 realizações.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, a estimação dos estados do sistema carro-pêndulo invertido foi desenvolvida usando um algoritmo *fuzzy* adaptativo baseado em inovação (MF-IAE). O MF-IAE está fundamentado nos seguintes métodos: Estimação adaptativa baseada na inovação (IAE) e na máxima verossimilhança (MV), filtro de Kalman estendido (EKF) e sistema *fuzzy* Mamdani tipo 1. O sistema *fuzzy* é empregado para ajustar dinamicamente as matrizes de covariâncias dos ruídos de processo e medição, monitorando as informações de inovação para melhorar a precisão de estimação dos estados. A partir dos resultados obtidos, o algoritmo MF-IAE mostrou-se eficiente e robusto na estimação dos estados com covariância de ruído incerta quando comparado com o EKF.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Expressam também agradecimento ao Programa de Aliança para Educação e Capacitação (PAEC), Organização dos Estados Americanos (OEA) e Grupo Coimbra de Universidades Brasileiras (GCUB).

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG.
- Belanger, P.R. (1974). Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*, 10(3), 267–275.
- Brown, R. and Hwang, P. (2012). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*. CourseSmart Series. Wiley.
- Chen, C.T. (1998). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc., USA, 3rd edition.

- Do, C.H. and Lin, H.Y. (2019). Incorporating neuro-fuzzy with extended kalman filter for simultaneous localization and mapping. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(5), 1729881419874645.
- Hamid, K.R., Talukder, A., and Islam, A.E. (2018). Implementation of fuzzy aided kalman filter for tracking a moving object in two-dimensional space. *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, 18(2), 85–96.
- Hu, X., Bao, M., Zhang, X.P., Guan, L., and Hu, Y.H. (2015). Generalized iterated kalman filter and its performance evaluation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(12), 3204–3217.
- Kailath, T. (1972). A note on least squares estimation by the innovations method. *SIAM Journal on Control*, 10(3), 477–486.
- Kailath, T. (1974). A view of three decades of linear filtering theory. *IEEE Transactions on information theory*, 20(2), 146–181.
- Kay, S.M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice Hall PTR.
- Kumar, E.V. and Jerome, J. (2013). Robust lqr controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. *Procedia Engineering*, 64, 169–178.
- Mehra, R. (1970). On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Transactions on automatic control*, 15(2), 175–184.
- Mohamed, A. and Schwarz, K. (1999). Adaptive kalman filtering for ins/gps. *Journal of geodesy*, 73(4), 193–203.
- Mokhtari, S. and Yen, K.K. (2020). A novel bilateral fuzzy adaptive unscented kalman filter and its implementation to nonlinear systems with additive noise. In *2020 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, 1–6. IEEE.
- Patra, A.K. (2020). Adaptive kalman filtering model predictive controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series B*, 101(6), 677–688.
- Ranno, M.M.S., de Souza, F.d.C., and Serra, G.L. (2020). Maximum likelihood-based fuzzy adaptive kalman filter applied to state estimation of permanent magnet synchronous motors. In *Applications of Artificial Intelligence in Electrical Engineering*, 23–50. IGI Global.
- Woo, R., Yang, E.J., and Seo, D.W. (2019). A fuzzy-innovation-based adaptive kalman filter for enhanced vehicle positioning in dense urban environments. *Sensors*, 19(5), 1142.
- Zadeh, L.A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, (1), 28–44.