

Nova Abordagem para Linearização de Modelos de Hammerstein Identificados por Métodos de Subespaço^{*}

Luís H. Santos, Márcio F. Braga, Rodrigo A. Ricco

Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal de Ouro Preto — UFOP, 35931-008, João Monlevade, MG, Brasil (e-mail: luis.hs@aluno.ufop.edu.br, {mfbraga, ricco}@ufop.edu.br).

Abstract: The quality of the model is an impacting factor on the accuracy and response speed of a control system. To maintain the trade-off between model and controller complexity, the use of interconnected blocks in the Hammerstein structure is an interesting alternative. The motivation is that linearizing such models allows the use of classical control techniques in a wider range of process operation. After several tests performed in this work, it was observed that static functional functions in small process operating ranges are not effective as described in the literature. Therefore, this paper proposes, by means of algebraic manipulations, the use of an algebraic inverse of the static curve estimated for the Hammerstein model. In the first approach, the static curve and the linear block are estimated in one step. In the second, each of the plots is estimated in two steps. The numerical results suggest that the algebraic inverse coupled with the two-step methodology provides greater accuracy in control, however a detailed feasibility analysis should be done in each case.

Resumo: A qualidade do modelo é um fator impactante na precisão e velocidade de resposta de um sistema de controle. Para manter o compromisso entre a complexidade do modelo e do controlador, o uso de blocos interconectados na estrutura de Hammerstein é uma alternativa interessante. A motivação é que linearizar tais modelos permite o uso de técnicas clássicas de controle em uma faixa mais ampla de operação do processo. Após vários testes realizados neste trabalho, observou-se que funções estáticas funcionais em pequenas faixas de operação do processo não são eficazes como descrito na literatura. Sendo assim, este trabalho propõe, por meio de manipulações algébricas, o uso de uma inversa algébrica da curva estática estimada para o modelo de Hammerstein. Na primeira abordagem, a curva estática e o bloco linear são estimados em uma etapa. Na segunda, estima-se cada uma das parcelas em duas etapas. Os resultados numéricos sugerem que a inversa algébrica aliada à metodologia em duas etapas proporcionam maior precisão no controle, todavia uma análise detalhada de viabilidade deve ser feita em cada caso.

Keywords: Hammerstein model; Algebraic Linearization; Subspace methods; Nonlinear system identification; Identification for control.

Palavras-chaves: Modelos de Hammerstein; Linearização Algébrica; Métodos de subespaço; Identificação de sistemas não lineares; Identificação para controle.

1. INTRODUÇÃO

Os modelos lineares se tornaram populares devido à sua simplicidade de representação e ao uso no projeto de controle. No entanto, os sistemas reais possuem certo grau de não linearidade, de modo que, ao serem representados por modelos lineares, ficam limitados a operar em regiões específicas de operação. Devido a essa limitação, quando existe a necessidade de operar em uma ampla faixa de operação, pode ser vantajoso utilizar modelos não lineares.

Ademais, tais modelos possuem uma maior capacidade de representação do sistema (Haryanto e Hong, 2013).

Uma classe de modelos não lineares frequentemente estudada é a dos modelos de blocos interconectados (Giri e Bai, 2010). Eles consistem na interconexão em cascata de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) e uma não linearidade estática. Dentro dessa classe, as duas estruturas mais comuns são as de Hammerstein, em que um bloco estático não linear precede um bloco dinâmico linear, e a de Wiener, que possui os mesmos blocos, porém com a ordem invertida (Gómez e Baeyens, 2005; de Paula et al., 2015; Schoukens e Tiels, 2017).

O modelo de Wiener produz resultados mais acurados quando o sistema tem dinâmica variável com o ponto

^{*} Os autores agradecem às agências Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Universidade Federal de Ouro Preto (Número do Processo 23109.004080/2019-88) pelo apoio financeiro.

de operação, ao passo que o de Hammerstein se ajusta melhor quando o sistema tem ganhos variáveis. Se comparadas aos modelos de Volterra e bilinear, as estruturas de Hammerstein e de Wiener apresentam como vantagem adicional a simplicidade das suas representações (Haryanto e Hong, 2013; Mzyk, 2014). Além disso, tais estruturas foram usadas com sucesso para representar sistemas não lineares em diversas aplicações práticas na área de processos químicos (Zou et al., 2015), biológicos (Jalaleddini e Kearney, 2013; Abedini Najafabadi e Shahrokh, 2016; Narayanan et al., 2017) e de controle (Gao et al., 2015; Zhang et al., 2017).

Até a década de 90, as pesquisas encontravam-se focadas no desenvolvimento de estruturas polinomiais para representar tanto a parte linear, quanto a parte não linear de modelos de Hammerstein e Wiener. A partir dessa década, o interesse por métodos de subespaços que estimam modelos lineares representados em espaço de estados vem aumentando (Verhaegen e Verdult, 2007). O algoritmo MOESP (do inglês, *Multivariable Output Error State sPace*) proposto por Verhaegen e Dewilde (1992) é um método de identificação por subespaços frequentemente utilizado para modelar a dinâmica linear de sistemas representados na estrutura de blocos interconectados. Por exemplo, em Gómez e Baeyens (2005), essa metodologia foi utilizada junto com a SVD (do inglês, *Singular Value Decomposition*) para estimar tanto a parte linear em espaço de estados, quanto a parte não linear do modelo de Hammerstein por meio de um experimento dinâmico, por isso nomeada neste artigo como identificação em uma etapa. Por outro lado, em de Paula et al. (2015), um ensaio estático e outro dinâmico foram empregados para estimar a curva não linear estática e o bloco linear em espaço de estados, respectivamente, portanto, nomeada como identificação em duas etapas. O MOESP produz modelos não polarizados para ruído de medição branco. Porém, o MOESP é um estimador polarizado quando o ruído de medição é colorido. Segundo Verhaegen e Verdult (2007), uma alternativa não polarizada é o método de variáveis instrumentais MOESP-PO, em que PO significa *Past Outputs* (Verhaegen e Dewilde, 1992).

Ao estimar os parâmetros do bloco estático não linear, sob algumas considerações, é possível obter uma estimativa da inversa da curva estática. O objetivo é, por meio da estimativa da inversa da curva estática, tentar anular o efeito da não linearidade estática quando ambas são dispostas em cascata. Consequentemente, técnicas consolidadas de controle linear podem ser aplicadas. Porém, essa inversa nem sempre pode ser determinada e os algoritmos para sua obtenção são complexos (Hong e Mitchell, 2006; Hong et al., 2012). Por isso, em Rayouf et al. (2018), propõe-se a inversão da curva estática de modelos do tipo Hammerstein por meio de uma metodologia simplificada, que tenta anular a não linearidade em uma faixa de operação definida graficamente. A dificuldade é que essa faixa diminui à medida que a influência do termo não linear aumenta, o que inviabiliza o controle de diversos sistemas.

Visto isso, a proposta do presente trabalho é usar uma metodologia algébrica de cálculo da curva inversa obtida a partir de uma estimativa da curva estática para modelos de Hammerstein. Ademais espera-se que ela opere em uma faixa de operação ampla e ainda seja simples para

controlar sistemas reais. A fim de comparar o desempenho e efeitos no controle de sistemas não lineares, são aplicadas as metodologias de identificação de sistemas apresentadas em Gómez e Baeyens (2005) com a vantagem de utilizar um experimento apenas e em de Paula et al. (2015) que apesar de utilizar dois experimento, não precisa de excursão por uma faixa tão ampla quanto à primeira. Diferentemente da proposta em Rayouf et al. (2018), foi utilizado o MOESP-PO nas metodologias de identificação do modelo de Hammerstein.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Tome o modelo de Hammerstein apresentado na Figura 1. Considere em tal caso que o bloco não linear é representado por uma função polinomial $f(\cdot)$, enquanto que o bloco dinâmico linear \mathcal{L} é representado em espaço de estados.

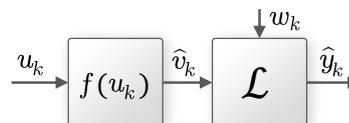


Figura 1. Modelo de Hammerstein em malha aberta.

As metodologias de identificação desenvolvidas utilizam essas mesmas representações, de forma que justificam tais escolhas para a descrição dos blocos. A não linearidade estática é modelada como uma função polinomial de ordem r dada por

$$\hat{v}_k = f(u_k) = \sum_{i=d}^r \hat{\alpha}_i u_k^i, \quad (1)$$

em que $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_d, \dots, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \dots, \hat{\alpha}_r]^T \in \mathbb{R}^{r+(1-d)}$ é um vetor contendo os parâmetros da curva não linear estática, d deve ser escolhido igual a 1 no caso da identificação em uma etapa ou 0 para a identificação em duas etapas, u_k é a sequência de entrada do sistema e \hat{v}_k é a sequência intermediária gerada pela curva não linear (veja a Figura 1). Por sua vez, a dinâmica linear é modelada como uma representação em espaço de estados de ordem n , com m entradas e p saídas, dada por

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{v}_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{v}_k + w_k, \end{cases} \quad (2)$$

na qual $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz da dinâmica, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entradas, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saídas, $\hat{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é a matriz de transmissão direta, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de ruídos de medição e $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema.

A partir do modelo composto por (1) e (2), uma metodologia de linearização pode ser usada para possibilitar o uso de estratégias consolidadas de controle linear. Assumindo que a não linearidade estática é representada por (1), a inversa pode ser calculada por algoritmos aproximados e simples, como o apresentado em Rayouf et al. (2018), ou exatos e complexos, tais como, os algoritmos de Casteljou's (Hong e Mitchell, 2006) e de De Boor (Hong et al., 2012).

Apesar da simplicidade, a metodologia proposta por Rayouf et al. (2018) funciona apenas em um pequeno intervalo, de forma que o sinal de controle deve ser limitado para não ultrapassar a região de validade da inversa.

Vista a influência da identificação e da linearização na simulação, predição e controle, o objetivo deste trabalho é apontar uma composição inversa-modelo que resulte no controlador com o melhor desempenho e funcionalidade dentre 4 cenários estudados com tratamento especial ao ruído na estimação de parâmetros. A saber: (i) em uma etapa e linearização algébrica; (ii) em duas etapas e linearização algébrica; (iii) em uma etapa e linearização por regiões de operação; (iv) em duas etapas e linearização por regiões de operação.

3. IDENTIFICAÇÃO E LINEARIZAÇÃO

Dado que o objetivo é representar matematicamente um sistema não linear real por meio da estrutura mostrada na Figura 1, torna-se fundamental encontrar as estimativas transformadas $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ e $\hat{\alpha}$ das matrizes A, B, C, D e do parâmetro α do sistema real. Além disso, deseja-se encontrar uma inversa por meio dos parâmetros $\hat{\alpha}$.

3.1 Identificação em uma etapa — Id-1E

Segundo Jalaeddini e Kearney (2011), é necessário definir uma estrutura para a entrada do sistema que a transforme de acordo com a representação não linear escolhida, ou seja, como definida em (1). Substituindo (1) em (2), obtém-se a estrutura MIMO (do inglês, *Multiple Input, Multiple Output*) em espaço de estados

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}U_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}U_k + w_k, \end{cases}$$

desde que seja definida $\hat{B} \triangleq \hat{B}\hat{\alpha}^T$, $\hat{D} \triangleq \hat{D}\hat{\alpha}^T$, e

$$U_k \triangleq [u_k \ u_k^2 \ \dots \ u_k^r]^T. \quad (3)$$

De acordo com de Paula et al. (2015), a escolha dessa estrutura — que assume infinitas possibilidades — leva o problema de identificação a uma tonalidade que varia de cinza claro a cinza escuro de maneira que quanto mais informação sobre o sistema real for utilizada, mais clara é a tonalidade do modelo resultante (Ljung, 2010).

A partir da entrada transformada por (3) e da saída obtida no ensaio dinâmico, o MOESP-PO pode ser utilizado para estimar o modelo de Hammerstein.

Os passos a seguir resumem o procedimento para obtenção de modelos de Hammerstein em etapa única.

- **Passo 1:** Aplicar um sinal de teste persistentemente excitante conhecido u_k na entrada do sistema e coletar os dados de saída y_k . O sinal u_k pode ser um sinal PRBSM (do inglês, *Pseudo Random Binary Signal Modulated*) que consiste em um sinal PRBS modulado em amplitude, que varie de E_{\min} a E_{\max} e mude de valor a cada M instantes de tempo.
- **Passo 2:** Aplicar a transformação (3) na sequência de entrada u_k , obtendo uma matriz de entradas U_k .
- **Passo 3:** Utilizar U_k e y_k no algoritmo MOESP-PO a fim de obter $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$, estimativas de (A, B, C, D) .
- **Passo 4:** Computar \check{B}, \check{D} , e $\hat{\alpha}$ empregando a SVD ‘*economy size*’ como mostra o Teorema 1 (Apêndice A).
- **Passo 5:** Encontrar a transformação em espaço de estados

$$T_{ee} \triangleq \check{C}^\dagger \check{C},$$

em que o símbolo \dagger indica a pseudoinversa, e utilizá-la para obter as matrizes $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e \hat{D} , por meio de

$$\hat{A} = T_{ee}^{-1} \check{A} T_{ee}, \quad \hat{B} = T_{ee}^{-1} \check{B}, \quad \hat{C} = \check{C} T_{ee}, \quad \hat{D} = \check{D}.$$

- **Passo 6:** Validar o modelo estimado utilizando algum índice de desempenho como VAF (do inglês, *Variance Accounted For*) ou RMSE (do inglês, *Root Mean Square Error*) (Verhaegen e Verdult, 2007).

Observação 1. O **Passo 5** evidencia os estados na saída do modelo, suprimindo a necessidade da implementação de um observador de estados para o emprego de controladores por realimentação de estados.

3.2 Identificação em duas etapas — Id-2E

Uma metodologia de duas etapas para obter o modelo de Hammerstein foi desenvolvida em de Paula et al. (2015). A primeira etapa da técnica consiste em estimar os parâmetros da curva não linear por meio de um ensaio estático, enquanto que a segunda etapa resume-se a utilizar a curva estática para obter a sequência intermediária \hat{v}_k e, conseqüentemente, identificar o bloco dinâmico linear. A aplicação dessa metodologia é restrita à Premissa 1.

Premissa 1. (de Paula et al. (2015)). A curva não linear estática deve ser nula para uma entrada nula, ou seja, $f(0) = 0$.

O ensaio estático consiste na aplicação de múltiplos degraus ascendentes, tornando possível interpolar uma curva por meio dos dados coletados da saída do sistema. A partir da curva obtida, estimam-se os termos do polinômio que representam a não linearidade do sistema. E, por fim, aplicando os dados de um ensaio dinâmico no polinômio, obtém-se \hat{v}_k . Esse sinal e a saída do sistema coletada no ensaio dinâmico podem ser utilizados para estimar o bloco linear, completando o modelo.

O seguinte algoritmo detalha os passos para a identificação em duas etapas orientado pelas estruturas (1) e (2).

- **Passo 1:** Determinar as amplitudes mínima Q_{\min} e máxima Q_{\max} dos sinais de entrada que podem ser aplicados ao sistema de forma que excite completamente a não linearidade dele.
- **Passo 2:** Aplicar degraus ascendentes na entrada do sistema variando de Q_{\min} até Q_{\max} . A entrada pode ser criada por meio da função

$$u_{e,k} = Q_{\min} \deg(k) + J_0 \sum_{l=1}^q \deg(k - lM_e),$$

em que o subíndice e indica que os sinais pertencem ao ensaio estático, $J_0 = (Q_{\max} - Q_{\min})/q$, $\deg(\cdot)$ é a função degrau em tempo discreto, M_e é o maior tempo necessário para o sistema estabilizar e q é a quantidade de patamares escolhida. Registrar a resposta em regime permanente do sistema y_{e,lM_e} , ou seja, a saída do sistema obtida no ensaio estático a cada lM_e instantes de tempo.

- **Passo 3:** Estimar uma curva polinomial que melhor se aproxime dos pontos produzidos pelos valores coletados no **Passo 2**, ou seja, os pontos $\{u_{e,lM_e}, y_{e,lM_e}\}$, com $l = 1, \dots, q$.
- **Passo 4:** Aplicar um sinal de teste persistentemente excitante conhecido u_k , por exemplo, PRBSM, na entrada do sistema, obtendo o vetor de saída y_k .

- **Passo 5:** Aplicar a sequência de entrada u_k na curva não linear estática estimada no **Passo 3** coletando a saída \hat{v}_k . Utilizar \hat{v}_k e y_k para identificar o bloco dinâmico linear por meio do MOESP-PO.
- **Passo 6:** Validar a curva estática e o modelo de Hammerstein utilizando, por exemplo, os índices VAF e RMSE.

3.3 Linearização por regiões de operação

A metodologia de linearização por regiões de operação é válida em um certo intervalo ao inverter a função não linear estática e colocá-la em cascata com o modelo de Hammerstein, dessa forma, cancelando os efeitos não lineares, como mostrado na Figura 2.

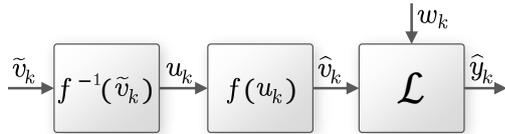


Figura 2. Modelo de Hammerstein linearizado em malha aberta.

Ao escolher a função inversa da não linearidade com a mesma estrutura apresentada em (1) e considerando uma escolha particular para ilustrar o procedimento, por exemplo $r = 3$, encontra-se

$$u_k = f_{ro}^{-1}(\tilde{v}_k) = \beta_1 \tilde{v}_k + \beta_2 \tilde{v}_k^2 + \beta_3 \tilde{v}_k^3 = \sum_{i=1}^3 \beta_i \tilde{v}_k^i, \quad (4)$$

em que $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \in \mathbb{R}^3$ é um vetor contendo os parâmetros da inversa da curva não linear estática, tal como definido para α em (1).

A função inversa estimada é utilizada para tentar anular o ganho não linear de forma que \hat{v}_k se aproxime de \tilde{v}_k em determinado intervalo definido graficamente (Rayouf et al., 2018). Para obter os parâmetros β que tornam $\hat{v}_k \approx \tilde{v}_k$ substitui-se (4) em (1). Também assume-se que essa composição anula o efeito da não linearidade, logo $f(f_{ro}^{-1}) \approx 1$. Após algumas manipulações algébricas e considerando $r = 3$ e $d = 1$, obtêm-se os parâmetros

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T = \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_1}, \frac{-\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1^3}, 2\frac{\hat{\alpha}_2^2}{\hat{\alpha}_1^5} - \frac{\hat{\alpha}_3}{\hat{\alpha}_1^4} \right]^T. \quad (5)$$

O mesmo pode ser feito para $r = 2$ e $d = 0$, resultando em

$$[\beta_0, \beta_1, \beta_2]^T = \left[-\beta_1 \hat{\alpha}_0 - \beta_2 \hat{\alpha}_0^2, \frac{1-2\beta_2 \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1}, -\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1^3} \right]^T.$$

3.4 Técnica de linearização algébrica

A inversa proposta na Subseção 3.3 permite anular o efeito de qualquer polinômio representado pela estrutura (1). Porém, quanto mais forte a não linearidade, mais restrita é a região onde a inversa é válida. Desse modo, a proposta do presente trabalho consiste em utilizar uma inversa algébrica com a capacidade de produzir um resultado quase exato e, conseqüentemente, funcionar para uma faixa mais ampla. A extensão dessa faixa depende da quantidade de algarismos significativos considerados nos cálculos.

A curva inversa pode ser encontrada para funções bijetoras, ou para as regiões onde elas são bijetoras por meio dos seguintes passos (Stewart, 2009):

- **Passo 1:** Escrever a função não linear identificada $\hat{v}_k = f(u_k)$.
- **Passo 2:** Isolar u_k na equação do **Passo 1**, escrevendo-o, se possível, em termos de \hat{v}_k , isto é, $u_k = f^{-1}(\hat{v}_k)$.
- **Passo 3:** Trocar \hat{v}_k por sua versão aproximada \tilde{v}_k a fim de expressar o resultado como uma função de \tilde{v}_k , ou seja, $u_k = f^{-1}(\tilde{v}_k)$.

Um exemplo pode esclarecer os limites para funções que não sejam bijetoras.

Exemplo 1. Suponha que obteve-se como resultado da identificação a curva não linear $\hat{v}_k = u_k^2$. Se $u_k \in \mathbb{R}$, a função não é bijetora, uma vez que $\hat{v}_{k,0} = (u_{k,0})^2 = (-u_{k,0})^2$. Porém restringindo o domínio a $u_k \in \mathbb{R}_+$, a função se torna bijetora e os passos do algoritmo da inversa algébrica podem ser aplicados. Nesse caso, obtém-se $u_k = \sqrt{\hat{v}_k}$, no **Passo 2**, e $u_k = \sqrt{\tilde{v}_k}$, no **Passo 3**. A parte negativa pode ser verificada de forma similar. ■

4. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Foram implementados dois exemplos no MATLAB[®] a fim de mostrar a eficácia dos procedimentos de identificação e linearização, assim como a influência deles no controle. Foram utilizadas as metodologias Id-1E e Id-2E, com tratamento especial ao efeito de ruído colorido na estimação dos parâmetros por meio MOESP-PO.

Interessado nos melhores parâmetros para cada tipo de identificação nos exemplos abaixo, a amplitude do sinal de entrada do ensaio dinâmico E_{\min} a E_{\max} , a quantidade de instantes de tempo M que esse sinal permanece no mesmo nível, a quantidade de blocos linha q_{b1} da matriz em blocos de Hankel do MOESP-PO foram variadas. Cada combinação foi testada 1000 vezes e uma média do VAF resultante foi calculada. Para o ensaio estático, o mesmo processo foi realizado, porém, os parâmetros variados foram a amplitude do ensaio estático de Q_{\min} a Q_{\max} e a quantidade de patamares q . A quantidade de iterações e a SNR (do inglês, *Signal-to-Noise Ratio*) de cada ensaio foi indicado por t_{ensaio} e SNR , respectivamente. A melhor média do VAF revelou os melhores parâmetros, que estão presentes nas descrições abaixo.

Cada um dos modelos foi linearizado pela técnica algébrica e também pela abordagem por regiões de operação a fim de apontar as limitações e regiões de funcionamento. Empregando o modelo linearizado, uma estratégia de controle foi aplicada para estabilizar o sistema com um controlador estático K e seguir uma determinada referência y_c por meio do ganho N_k , como mostra a Figura 3, aos moldes do que foi feito em Rayouf et al. (2018), para permitir uma comparação justa entre as estratégias. Detalhes da abordagem podem ser encontrados em Rayouf et al. (2018).

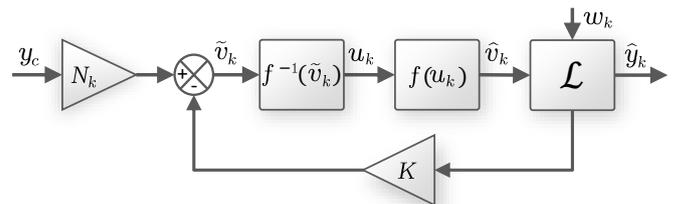


Figura 3. Esquema de controle.

4.1 Sistema Numérico

Considere um exemplo numérico projetado na estrutura de Hammerstein de forma que a não linearidade estática é baseada em (1), ou seja,

$$v_k = \begin{cases} 1u_k + 0,5u_k^2, & \text{para } d = 1, \\ 0 + 1u_k + 0,5u_k^2, & \text{para } d = 0, \end{cases} \quad (6)$$

seguida da estrutura linear (2) em que

$$A = \begin{bmatrix} 0,9314 & -0,0192 \\ 0,0922 & 0,9066 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,17 \\ -0,01 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $D = 0$, cujos autovalores de A são $0,9190 \pm j0,0402$.

Note que o sistema é originalmente SISO (do inglês, *Single Input, Single Output*), porém, foi considerado como SIMO (do inglês, *Single Input, Multiple Output*) para tornar conhecido todos os estados do sistema, condição necessária para a aplicação da estratégia de identificação. Dessa forma, a matriz C utilizada é uma matriz identidade de dimensão igual ao número de estados do sistema, que age como informação auxiliar para encontrar a transformação T_{ee} . Quando não se tem acesso a todos estados, pode-se empregar estimadores de estados, que não fazem parte do escopo deste trabalho.

A identificação em uma etapa foi realizada utilizando o algoritmo da Subseção 3.1 por meio dos dados apresentados na Tabela 1. Como pode ser visto na Tabela 2, os parâmetros da validação sugerem uma boa aproximação ao Sistema Numérico composto por (6) e (2).

Tabela 1. Dados do ensaio dinâmico do Sistema Numérico utilizados na metodologia Id-1E.

Parâmetro	E_{\min}	E_{\max}	M	t_{ensaio}	q_{bl}	SNR	T
Valor	0	1	20	10000	2	21,0858	1s

Tabela 2. Resumo dos resultados obtidos.

Identificação	VAF [%]	RMSE	Autovalores
Id-1E	94,2085	0,2417	$0,9129 \pm j0,0350$
Id-2E	97,3918	0,1618	$0,9190 \pm j0,0402$

A curva não linear identificada possui os parâmetros

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T = [0,8846, 0,4664]^T, \quad (7)$$

que podem parecer diferentes dos parâmetros do Sistema Numérico vistos em (6). Porém, ao normalizá-los nota-se a semelhança. Nesse caso, $\alpha_{1,n} = 1$ e $\alpha_{2,n} = 0,5273$, em que o n indica que o termo foi normalizado.

Por meio dos parâmetros dados em (7), foram encontradas duas inversas. A primeira por regiões de operação, utilizando (5) e com forma final descrita por (4), dada por

$$\beta = [\beta_1, \beta_2]^T = [1,1305, -0,6739]^T,$$

e a algébrica, utilizando o algoritmo da Subseção 3.4, com os parâmetros

$$u_k = -0,948328 + 0,000214408\sqrt{4,664 \times 10^7 \tilde{v}_k + 1,95629 \times 10^7}.$$

A identificação em duas etapas foi realizada com dados de dois ensaios, um estático e outro dinâmico. No ensaio estático, foram empregados os dados da Tabela 3 para

Tabela 3. Parâmetros da metodologia Id-2E utilizada no Sistema Numérico.

Ensaio Estático		Ensaio Dinâmico	
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Q_{\min}	0	E_{\min}	0
Q_{\max}	11	E_{\max}	10
q	10	M	130
t_{ensaio}	10000	t_{ensaio}	58000
		q_{bl}	2
		SNR	20,2376

implementar o algoritmo da Subseção 3.2 até o **Passo 3**. A curva não linear identificada resultou nos seguintes parâmetros

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]^T = [-0,0137, 0,7732, 0,3860]^T. \quad (8)$$

Tal curva e os parâmetros apropriados da Tabela 3 foram utilizados para a realização dos **Passo 4** a **Passo 6**. A validação, que tem seus parâmetros apresentados na Tabela 2, sugere uma aproximação um pouco melhor do sistema (2) que a encontrada utilizando a metodologia em uma etapa.

A inversa por regiões de operação

$$\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]^T = [-0,8350, 1,2704, 0,0176]^T,$$

e a algébrica

$$u_k = -1,00155 + 0,000732753\sqrt{4,825 \times 10^6 \tilde{v}_k + 1,93435 \times 10^6},$$

foram encontradas utilizando (8) nos algoritmos de inversão da Seção 3, assim como no caso da identificação em uma etapa.

Ao aplicar um único sinal de teste \tilde{v} , variando de -1 a 1 nas curvas inversas, é possível verificar a região de validade da linearização. Por meio da Figura 4, constata-se que a inversa algébrica funciona para além dos limites de teste, enquanto que a por regiões de operação se limita entre $-0,5$ e $0,5$. Logo, quando o sinal de controle ultrapassa $-0,5$ ou $0,5$, o modelo aproximado não representa adequadamente o sistema real e pode se tornar instável.

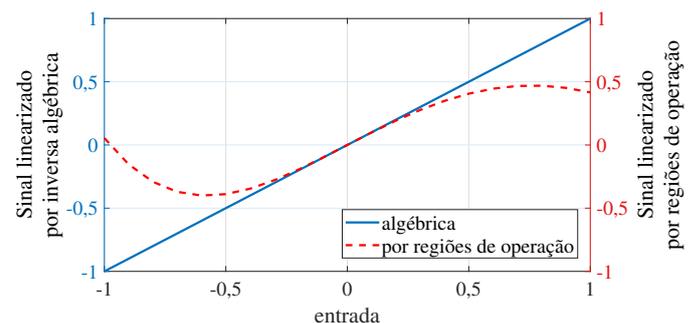


Figura 4. Teste das inversas do Sistema Numérico da Subseção 4.1 utilizando Id-2E.

Ao dispor as inversas em cascata com cada modelo estimado, o resultado é uma composição linear por regiões de operação ou para toda faixa de operação, a depender da técnica aplicada. Seguindo a estratégia de controle apresentada na Figura 3, o passo seguinte envolve obter controladores estáticos estabilizantes K para os modelos linearizados, os quais foram sintetizados empregando as condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) apresentadas em Rayouf et al. (2018). Os ganhos N_k do pré-filtro foram

calculados a cada instante de tempo para fazer com que o sistema atingisse as referências em forma de degraus de diferentes amplitudes y_c . As saídas podem ser consultadas na Figura 5.

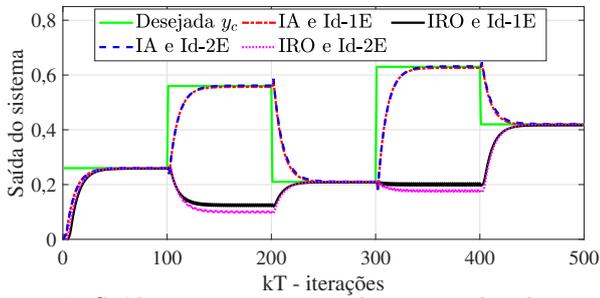


Figura 5. Saídas em resposta a degraus aplicados no Sistema Numérico da Subseção 4.1. IA, e IRO indicam utilização da inversa algébrica e por regiões de operação, respectivamente.

Por meio da Tabela 2, é possível notar que os autovalores da metodologia Id-2E se igualam aos autovalores do Sistema Numérico, enquanto os da metodologia Id-1E não. Também é possível verificar que os índices de desempenho VAF e RMSE resultantes da metodologia Id-2E são superiores aos respectivos índices da Id-1E. A superioridade se deve à utilização da informação auxiliar do teste estático para encontrar a curva não linear. Conferindo à identificação em duas etapas modelos mais acurados se comparados aos obtidos pela metodologia de uma etapa.

Além disso, a Figura 5 revela que referências maiores que 0,5 não são alcançadas ao utilizar a metodologia de inversão por regiões de operação. O motivo é que o sinal \tilde{v}_k ultrapassou a amplitude de 0,5 na Figura 6 excedendo a região de validade da inversa por regiões de operação. Como pode ser visualizado na Figura 4, os sinais \tilde{v}_k e \hat{v}_k divergem para outros valores no momento que o sinal \tilde{v}_k ultrapassa 0,5 na metodologia por regiões de operação.

Mesmo nos casos em que não ultrapasse, ainda haveria uma diferença entre o sinal \tilde{v}_k e o sinal \hat{v}_k que ficaria maior à medida que \tilde{v}_k se aproximasse de $\pm 0,5$, em virtude de se ter uma estimativa da função inversa em cada região de operação. Essa diferença poderia levar a um maior esforço de controle desnecessário na planta ou perda de desempenho, como, por exemplo, no tempo de assentamento, que será evidenciado no exemplo do Sistema de Tanques da Subseção 4.2.

Tal problema não está presente na metodologia de inversão algébrica proposta, que consegue acompanhar corre-

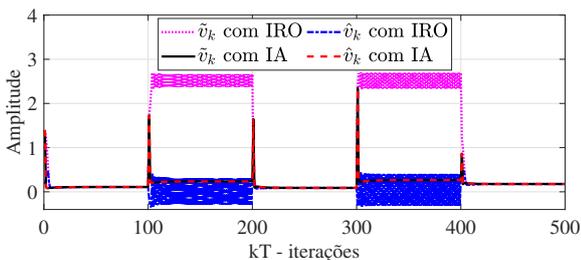


Figura 6. Sinal de erro e sua versão linearizada para entrada em degraus e metodologia Id-2E apresentados na Figura 5.

tamente as referências. Como consequência da inversão algébrica, também não há perda de desempenho por causa de erros de inversão, além de existir menos riscos na planta por excesso de esforço de controle.

4.2 Sistema de Tanques

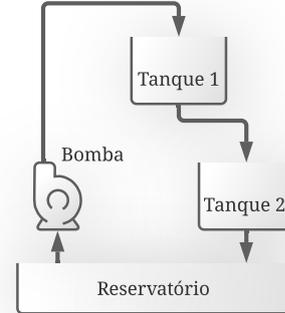


Figura 7. Sistema de dois tanques em cascata.

Este exemplo compreende um sistema de dois tanques em cascata que está esquematizado na Figura 7, descrito por meio do seguinte conjunto de equações em tempo discreto

$$\begin{cases} h_{1,s} = H \text{ sat}(h_{1,k}), \\ h_{1,k+1} = \eta \text{ sat}(u_k) - \frac{a_1}{S} \sqrt{2g \text{ sat}(h_{1,k})}, \\ h_{1,s} = H \text{ sat}(h_{2,k}), \\ h_{2,k+1} = \frac{a_1}{S} \sqrt{2g \text{ sat}(h_{1,k})} - \frac{a_2}{S} \sqrt{2g \text{ sat}(h_{2,k})}, \end{cases}$$

em que h_1 e h_2 são os níveis de água calculados, $h_{1,s}$ e $h_{2,s}$, os níveis saturados medidos e a_1 e a_2 , as áreas de saída dos seus respectivos tanques. H é uma constante de ganho, S é a área de seção transversal dos tanques, η uma constante relacionada com a tensão da bomba que controla o fluxo de entrada de água no sistema e

$$\text{sat}(h_{i,k}) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } h_{i,k} \geq 0,3 \\ h_{i,k} & \text{se } 0 \leq h_{i,k} \leq 0,3 \\ 0 & \text{se } h_{i,k} \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } i = \{1, 2\},$$

$$\text{sat}(u_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } u_k \geq 3 \\ u_k & \text{se } 0 \leq u_k \leq 3 \\ 0 & \text{se } u_k \leq 0 \end{cases}$$

A técnica *Forward Euler* foi utilizada para simular numericamente a planta empregando os dados da Tabela 4. As identificações em uma e duas etapas foram realizadas seguindo os algoritmos das Subseções 3.1 e 3.2, aplicando os dados das Tabelas 5 e 6, respectivamente. Em situações práticas, os parâmetros disponíveis para análise são os índices de desempenho, que nesse exemplo numérico podem ser conferidos na Tabela 7. Os índices VAF e RMSE indicam um nível de precisão suficiente para fazer controle, como será visto ao longo desta seção.

A curva não linear identificada pela metodologia de uma etapa possui os seguintes parâmetros

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T = [0,4468, 0,8946]^T. \quad (9)$$

Em oposição à curva apresentada em Rayouf et al. (2018), com parâmetros $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2,91 \times 10^{-2}$, percebe-se que a relevância do termo de segunda ordem identificado realmente delinea os padrões da curva de um sistema de tanques. Por meio de (9), foram encontradas as seguintes inversas, por regiões de operação

$$\beta = [\beta_1, \beta_2]^T = [2,2380, -10,0288]^T,$$

Tabela 4. Parâmetros do sistema de dois tanques adaptado de Rayouf et al. (2018).

Parâmetro	Valor
$a_1 = a_2$	$5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
η	$2,4 \times 10^{-3}$
S	$0,014 \text{ m}^2$
H	10
T	1 s

Tabela 5. Parâmetros do ensaio dinâmico do Sistema de Tanques.

Parâmetro	E_{\min}	E_{\max}	M	t_{ensaio}	q_{bl}	SNR
Valor	0	1	80	36000	8	21,8982

Tabela 6. Parâmetros da metodologia Id-2E para o Sistema de Tanques.

Ensaio Estático		Ensaio Dinâmico	
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Q_{\min}	0 V	E_{\min}	0
Q_{\max}	3 V	E_{\max}	1 V
q	10	M	120
t_{ensaio}	9000	t_{ensaio}	54000
		q_{bl}	2
		SNR	21,9532

Tabela 7. Resumo dos resultados obtidos.

Identificação	Id-1E	Id-2E
VAF [%]	96,7703	97,4857
RMSE	0,2707	0,1587
Autovalores	0,8647 e 0,9204	0,8987 e 0,9290
T_s (Regiões de operação)	∞	∞
T_s (Algébrica)	56 s	48 s

e algébrica

$$u_k = -0,249721 + 0,000223564\sqrt{2,2365 \times 10^7 \tilde{v}_k + 1,24769 \times 10^6}.$$

A curva por regiões de operação não funciona corretamente porque o parâmetro do termo de segunda ordem da não linearidade é mais expressivo. Isso pode ser confirmado por meio da Figura 8, em que uma entrada da ordem de 1×10^{-4} produz uma saída da ordem de $1,5 \times 10^4$.

Indicando que a metodologia de inversão por regiões de operação apenas funciona para não linearidades cujos parâmetros de segunda ordem, ou superiores, sejam reduzidos. Isso torna sua utilidade contraditória, pois seu ponto fraco é justamente a sua principal funcionalidade. Em contrapartida, a inversa algébrica proposta funciona bem para essa região, mas não é limitado só a ela, refletindo positivamente no tempo de assentamento do sistema, que pode ser visto na Tabela 7.

Por sua vez, a curva não linear da metodologia Id-2E resultou nos seguintes parâmetros

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]^T = [-0,0004, 0,0005, 0,1370]^T.$$

Utilizando tais parâmetros, as inversas por regiões de operação

$$\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]^T = -[208,9326, 1,0981 \times 10^6, 1,4429 \times 10^9]^T,$$

e algébrica

$$u_k = -0,00182482 + 0,000816083\sqrt{1,096 \times 10^7 \tilde{v}_k + 4389},$$

foram encontradas por meio das técnicas das Subseções 3.3 e 3.4. Recorrendo à Figura 8, nota-se graficamente que a inversa por regiões de operação não funcionou em nenhum intervalo para o caso em que o termo não linear foi mais expressivo do que o apresentado em Rayouf et al. (2018).

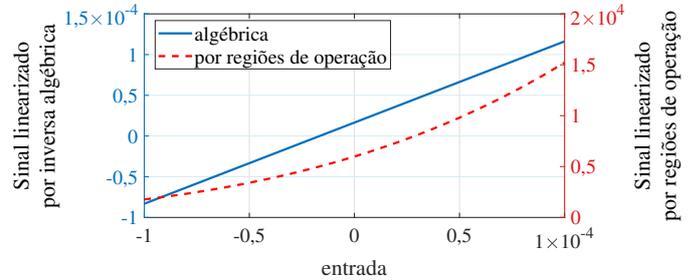


Figura 8. Teste das inversas do Sistema de Tanques da Subseção 4.2 utilizando Id-2E.

Similar ao que foi feito no Exemplo 1, os controladores estáticos estabilizantes K para os modelos linearizados foram obtidos empregando as condições LMIs apresentadas em Rayouf et al. (2018). Um degrau de amplitude 0,2 m foi inserido como referência nos sistemas. Os tempos de assentamento T_s obtidos podem ser observados na Tabela 7.

Pela Tabela 7, pode-se verificar que o modelo gerado pela metodologia de duas etapas produziu melhores índices de desempenho, assim como ocorreu no Sistema Numérico. Como esperado, a técnica por regiões de operação não foi capaz de anular a não linearidade e o sistema se tornou instável, indicado na Tabela 7 como $T_s = \infty$.

Empregando o modelo estimado e a inversão algébrica, o tempo de assentamento do sistema encontrado foi 76% menor que o apresentado por Rayouf et al. (2018), cujo valor reportado é de 200 s. A simulação utilizando o modelo gerado pela Id-1E resultou em um erro em regime permanente de amplitude 0,007 m. Evidenciando que a informação auxiliar da curva estática usada na metodologia Id-2E confere maior acurácia ao modelo. Contudo, na Id-1E testes auxiliares não são necessários. Em complemento a esse último, uma solução que pode ser buscada é a implementação de uma metodologia de controle robusto.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho propôs uma metodologia de inversão algébrica para o modelo de Hammerstein e apresentou testes com quatro combinações de duas abordagens para identificação e duas outras de linearização apontando a que produziu os melhores resultados no controle de dois sistemas. As duas abordagens de identificação, diferentemente da apresentada em Rayouf et al. (2018), foram usadas para dar tratamento especial ao ruído colorido presente nos dados de ensaio. O melhor desempenho na parte de identificação é do algoritmo em duas etapas, por fazer uso da informação auxiliar da curva estática. A escolha desse caminho depende da possibilidade de aplicar dois ensaios e da análise de custo benefício em cada caso, considerando que a melhora na acurácia do modelo pode ser irrelevante no controle a depender da SNR presente no processo.

A melhor abordagem de inversão foi a linearização algébrica que conseguiu anular os efeitos da não linearidade de forma eficaz em uma região suficientemente grande para abranger a amplitude do sinal de controle em todos os testes realizados. De outro ponto de vista, a inversa algébrica precisa ser calculada para cada sistema enquanto a inversa por regiões de operação funciona para todos que sejam de ordem r bastando aplicar os parâmetros encontrados no procedimento. Quando a curva tem termos não lineares expressivos e se emprega a inversão por regiões de operação, o sistema pode não estabilizar como foi o caso estudado no Sistema de Tanques da Subseção 4.2. Os resultados obtidos nos exemplos sugerem que a identificação em duas etapas e a linearização algébrica formam a melhor combinação dentre as testadas, possibilitando um controle mais preciso e eficiente.

Como trabalhos futuros, sugere-se aplicar uma metodologia de controle mais sofisticada que possa manter o sinal de erro dentro da região de validade da inversa possibilitando comparar o desempenho das respostas. Sugere-se ainda aplicar outras técnicas de linearização a fim de comparar os benefícios apresentados pela metodologia proposta. Uma outra abordagem natural é estender os resultados deste trabalho ao modelo de Wiener.

REFERÊNCIAS

- Abedini Najafabadi, H. e Shahrokhi, M. (2016). Model predictive control of blood sugar in patients with type-1 diabetes. *Optim. Control Appl. Meth.*, 37(4), 559–573.
- de Paula, M.V., Ricco, R.A., e Teixeira, B.O.S. (2015). Identificação de modelos de Hammerstein e Wiener para sistemas não lineares multivariáveis via métodos de subespaços. *XII SBAI*.
- Gao, X., Ren, X., Zhu, C., e Zhang, C. (2015). Identification and control for Hammerstein systems with hysteresis non-linearity. *IET Control Theory & Appl.*, 9(13), 1935–1947.
- Giri, F. e Bai, E.W. (2010). *Block-oriented nonlinear system identification*, volume 1. Springer.
- Gómez, J.C. e Baeyens, E. (2005). Subspace-based identification algorithms for Hammerstein and Wiener models. *European J. Control*, 11(2), 127–136.
- Haryanto, A. e Hong, K.S. (2013). Maximum likelihood identification of Wiener–Hammerstein models. *Mechanical Syst. and Signal Process.*, 41(1-2), 54–70.
- Hong, X. e Mitchell, R. (2006). A pole assignment controller for Bezier–Bernstein polynomial based Hammerstein model. In *Proc. 2006 Int. Control Conf.*
- Hong, X., Mitchell, R.J., e Chen, S. (2012). Modelling and control of Hammerstein system using b-spline approximation and the inverse of De Boor algorithm. *Int. J. Syst. Sci.*, 43(10), 1976–1984.
- Jalaleddini, K. e Kearney, R.E. (2011). An identification algorithm for Hammerstein systems using subspace method. In *Proc. 2011 Amer. Control Conf.*, 4793–4797.
- Jalaleddini, K. e Kearney, R.E. (2013). Subspace identification of SISO Hammerstein systems: application to stretch reflex identification. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 60(10), 2725–2734.
- Ljung, L. (2010). Approaches to identification of nonlinear systems. In *Proc. 29th Chinese Control Conf.*, 1–5. IEEE.
- Mzyk, G. (2014). *Combined parametric-nonparametric identification of block-oriented systems*, volume 238. Springer.
- Narayanan, S.N., Sutha, S., e Divya, G. (2017). Development of non-linear model for human heart. In *2017 Trends in Industrial Measurement and Automation (TIMA)*, 1–5.
- Rayouf, Z., Ghorbel, C., e Braiek, N. (2018). A new Hammerstein model control strategy: feedback stabilization and stability analysis. *Int. J. Dyn. and Control*, 7(4), 1453–1461.
- Schoukens, M. e Tiels, K. (2017). Identification of block-oriented nonlinear systems starting from linear approximations: A survey. *Automatica*, 85, 272–292.
- Stewart, J. (2009). *Calculus: Concepts and contexts*. Cengage Learning.
- Verhaegen, M. e Dewilde, P. (1992). Subspace model identification Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms. *Int. J. Control*, 56(5), 1187–1210.
- Verhaegen, M. e Verdult, V. (2007). *Filtering and system identification: a least squares approach*. Cambridge University Press.
- Zhang, B., Mao, Z., e Zhang, T. (2017). Intelligent control for Hammerstein nonlinear systems with arbitrary dead-zone input. *Trans. Inst. Meas. Control*, 39(4), 567–578.
- Zou, Z., Zhao, D., Liu, X., Guo, Y., e Guan (2015). Pole-placement self-tuning control of nonlinear Hammerstein system and its application to pH process control. *Chinese J. of Chemical Eng.*, 23(8), 1364–1368.

Apêndice A. TEOREMA DA IDENTIFICAÇÃO EM UMA ETAPA

Teorema 1. (Gómez e Baeyens (2005)). Considere a matriz $\hat{\Theta}_{BD} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times rp}$ com posto (rank) $s > p$ e a SVD ‘economy size’ — que é encontrada removendo as linhas e colunas de zeros da SVD ‘full size’ — dada por

$$\hat{\Theta}_{BD} = U_s \Sigma_s V_s^T = \sum_{i=1}^s \sigma_i u_i v_i^T, \quad (A.1)$$

em que Σ_s é uma matriz diagonal contendo os s primeiros valores singulares ($\sigma_i, i = 1, \dots, s$) não nulos de $\hat{\Theta}_{BD}$ em ordem decrescente e $U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_s] \in \mathbb{R}^{(n+m) \times s}$ e $V_s = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s] \in \mathbb{R}^{rp \times s}$ são formadas pelas primeiras s colunas das matrizes unitárias $U \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ e $V \in \mathbb{R}^{rp \times rp}$ resultantes da SVD ‘full size’ de $\hat{\Theta}_{BD} = U \Sigma V^T$, respectivamente. As matrizes $\check{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\check{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^{rp \times p}$ que minimizam a norma

$$\left\| \hat{\Theta}_{BD} - \begin{bmatrix} \check{B} \\ \check{D} \end{bmatrix} \hat{\alpha}^T \right\|_2^2,$$

são dadas por

$$\left(\begin{bmatrix} \check{B} \\ \check{D} \end{bmatrix}, \hat{\alpha} \right) = (U_1 \Sigma_1, V_1),$$

em que $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$, $U_1 \in \mathbb{R}^{(n+m) \times p}$, e $V_1 \in \mathbb{R}^{rp \times p}$ são encontradas pela partição da SVD ‘economy size’ mostrada em (A.1), isto é,

$$\hat{\Theta}_{BD} = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$