

Projeto e análise de controladores LPV pelo método VRFT

Rômolo Lasch* Lucíola Campestrini* Pedro Rodrigues de Lima*

* Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia,
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), RS,
(e-mails: {romolo.lasch;luciola;pedro.lima}@ufrgs.br).

Abstract: Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) is a data-driven control method that identifies a parameterized controller by solving a least squares (MQ) problem, under the assumption the controller is linear in the parameters. Widely used for linear controller design, the VRFT method can be applied to estimate linear parameter-varying (LPV) controllers, also with an MQ solution. This paper analyzes the formulation and application of the VRFT method to LPV plants for the case where the controller class is underparameterized and for the case where the collected data is corrupted by noise. The advantage of the filter usage in the underparameterized case, as well as the statistical properties of the instrumental variable (VI) estimations in the noise-corrupted data case, are confirmed by simulations.

Resumo: *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) é um método de controle baseado em dados que identifica um controlador parametrizado através da solução de um problema de mínimos quadrados (MQ), considerando que o controlador seja linear nos parâmetros. Largamente utilizado para projeto de controladores lineares, o método VRFT pode ser aplicado para estimar controladores lineares a parâmetros variantes (LPV), também com solução MQ. Este trabalho analisa a formulação e aplicação do método VRFT em plantas LPV para o caso em que a classe de controladores é subparametrizada e para o caso em que os dados coletados são corrompidos por ruído. O benefício de utilização de um filtro no caso subparametrizado, bem como as propriedades estatísticas das estimativas com o uso de variáveis instrumentais (VI) no caso de dados corrompidos por ruídos são comprovados através de simulações.

Keywords: Data-driven control; VRFT; LPV; Instrumental variable.

Palavras-chaves: Controle baseado em dados; VRFT; LPV; Variável instrumental.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV) apresentam uma relação linear entre sinais de entrada e saída do sistema, porém diferenciam-se de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) por apresentarem uma mudança nessas relações ao longo do tempo através da chamada variável de *scheduling* (Toth, 2010). Devido à linearidade entre os sinais de entrada e saída dos sistemas LPV, a identificação de parâmetros nesse tipo de sistemas pode ser realizada pelo método dos mínimos quadrados (MQ) (Bamieh e Giarré, 2002), o que é bastante atraente do ponto de vista computacional, visto que a função a ser minimizada é quadrática e, portanto, possui um único mínimo global. Porém, em muitos casos, a estimativa através da solução MQ é polarizada, e o método das variáveis instrumentais (VI) pode ser usado para eliminar ou ao menos minimizar este viés (Toth, 2010).

Métodos de controle baseado em dados caracterizam-se por não utilizarem um modelo matemático da planta a ser controlada, mas por identificarem um controlador usando dados provenientes de um experimento na planta de tal

forma que o sistema em malha fechada atinja um comportamento desejado (Bazanella et al., 2012). A solução destes métodos é baseada na minimização de uma função custo e, quando esta função é quadrática, a solução se dá por mínimos quadrados ou variáveis instrumentais, quando os dados coletados são afetados por ruído (Bazanella et al., 2012). Um dos métodos que utiliza esta abordagem é o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT). Inicialmente proposto por Campi et al. (2002) para sistemas LIT SISO (*single-input, single-output*), estendido para o caso multi-variável LIT (Nakamoto, 2004; Campestrini et al., 2016) e também estendido para o projeto de controladores SISO LPV (Formentin e Savaresi, 2011), aqui denominado de VRFT-LPV. Neste trabalho, o comportamento desejado, definido por um modelo de referência, é linear, e o projeto do controlador LPV é equivalente ao projeto de um controlador *gain-scheduling*. Em Formentin et al. (2013), o modelo de referência é flexibilizado para representar um comportamento variante no tempo e em Formentin et al. (2016) a estrutura do controlador também é flexibilizada, de forma que a quantidade de parâmetros a ser estimada é definida em um problema de otimização. Nestes últimos, o uso da variável instrumental obtida através de um segundo experimento é sugerida para contornar a polarização proveniente de dados com ruído. Além disso, uma aplicação

* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

do VRFT-LPV é apresentada por Piga et al. (2018), em que se utilizam duas malhas para controle, sendo a interna utilizando o VRFT-LPV e a externa sujeita a restrições solucionada por uma lei de controle preditivo.

Este trabalho apresenta a formulação do método VRFT tanto para o caso LIT quanto para o caso LPV e faz a análise do uso de duas variáveis instrumentais para o caso de dados corrompidos por ruído, sendo uma delas não abordada para o caso LPV até então. Além disso, analisa-se o benefício de usar o filtro projetado para o caso LIT no projeto LPV, para quando a classe de controladores é subparametrizada.

2. PROBLEMA DE CONTROLE

Considere o seguinte problema de controle: “Dada uma planta ou processo de modelo matemático desconhecido, projete um controlador de estrutura fixa de forma a obter um sistema em malha fechada com comportamento o mais próximo possível do desejado pelo projetista.” Uma forma de solucionar o problema acima é utilizando algum método de controle baseado em dados. Nestes métodos, o modelo matemático da planta não é utilizado, mas apenas dados coletados em operação. Os requisitos de desempenho para o sistema em malha fechada considerando algum sinal de referência e/ou perturbação são traduzidos em um *Modelo de Referência*.

Neste trabalho, apresentamos a formulação do método VRFT tanto para sistemas LIT (aqui denominado de VRFT-LIT) como para sistemas LPV monovariáveis, denominado de VRFT-LPV, e comparamos a aplicação de ambos em uma planta LPV.

2.1 Formulação VRFT-LIT

Definição do problema: Considere um sistema LIT de tempo discreto monovariável

$$y(t) = G(q)u(t) + \nu(t), \quad (1)$$

em que t representa o tempo discreto; q é o operador de deslocamento no tempo, ou seja $qx(t) = x(t + 1)$; $G(q)$ é a função de transferência da planta, a qual é desconhecida; $u(t)$ é o sinal de entrada; $y(t)$ é o sinal de saída; e $\nu(t)$ representa todo efeito estocástico na saída da planta que não é captado por $G(q)$. Busca-se controlar a planta em malha fechada utilizando um controlador LIT com parâmetros definidos por ρ , ou seja, $u(t) = C(q, \rho)(r(t) - y(t))$.

Considere também que o objetivo de controle seja atingir um comportamento desejado considerando seguimento de referência, ou seja, o custo a ser minimizado é dado por

$$J_y^{LIT}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(T_d(q) - T(q, \rho))r(t)]^2, \quad (2)$$

onde $T_d(q)$ é o modelo de referência escolhido pelo projetista e $T(q, \rho) = [1 + C(q, \rho)G(q)]^{-1} [C(q, \rho)G(q)]$ é a função de transferência de malha fechada com o controlador projetado. O *controlador ideal* é aquele que resulta em $J_y^{LIT}(\rho) = 0$. Note que (2), ao depender de $T(q, \rho)$, depende de $G(q)$, que é desconhecida. Assim, o VRFT minimiza uma função custo alternativa que não depende de $G(q)$ e que busca identificar o controlador ideal.

Projeto de controle pelo método VRFT-LIT: Dados uma classe de controladores $C(z, \rho)$ a ser projetada, o comportamento desejado e uma batelada de dados de operação da planta $\mathcal{Z}_N = \{u(t), y(t)\}$ (Bazanella et al., 2012), a função custo minimizada pelo método é dada por

$$J_{VR}^{LIT}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [L(q)[u(t) - C(q, \rho)e_V(t)]]^2, \quad (3)$$

onde $e_V(t) = (T_d(q)^{-1} - 1)y(t)$ é conhecido como erro virtual e $L(q)$ é um filtro. Quando o controlador ideal pertence à classe de controladores escolhida e os dados coletados não são afetados por ruído, o mínimo de $J_{VR}^{LIT}(\rho)$ é um vetor com os parâmetros do controlador ideal; quando a classe de controladores escolhida é subparametrizada, o filtro $L(q)$ é utilizado para aproximar o mínimo de $J_{VR}^{LIT}(\rho)$ do mínimo de $J_y^{LIT}(\rho)$. Este filtro é dado por (Bazanella et al., 2012)

$$|L(e^{j\omega})|^2 = |T_d(e^{j\omega})|^2 |1 - T_d(e^{j\omega})|^2 \frac{\Phi_r(e^{j\omega})}{\Phi_u(e^{j\omega})}, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

onde $\Phi_x(e^{j\omega})$ representa o espectro de potência do sinal $x(t)$ e quando $\Phi_r(e^{j\omega}) = \Phi_u(e^{j\omega})$, o filtro é simplesmente dado por

$$L(q) = T_d(q)(1 - T_d(q)). \quad (4)$$

Quando o controlador é linear nos parâmetros, ou seja $C(q, \rho) = \rho^T \bar{C}(q)$, sendo $\bar{C}(q)$ um vetor de funções de transferência, a solução de (3) é dada por mínimos quadrados (Bazanella et al., 2012).

2.2 Formulação VRFT-LPV

Definição do problema: O método VRFT pode ser estendido para o caso LPV considerando que o sistema pode ser descrito por uma planta LPV de tempo discreto

$$y(t) = G(q, p)u(t) + \nu(t), \quad (5)$$

em que o operador de deslocamento no tempo q não é comutativo (Toth, 2010); $G(q, p)$ é um operador de transferência que representa a planta desconhecida, um mapeamento da entrada $u(t)$ para a saída $y(t)$, dependente da variável de *scheduling* $p(t)$ (Butcher e Karimi, 2010; Formentin e Savaresi, 2011).

Neste caso, a lei de controle considera um controlador linear com parâmetros variantes, dependente da variável de *scheduling* $p(t)$, ou seja

$$u(t) = C(q, p, \rho)(r(t) - y(t)), \quad (6)$$

com

$$C(q, p, \rho) = \rho^T \frac{\sum_{i=0}^{m_q-1} \sum_{j=0}^{m_{pi}-1} q^{-i} f_{ij}(p)}{\alpha(q)}, \quad (7)$$

onde $\alpha(q)$ é polinômio do denominador em potências negativas de q , fixo e independente de $p(t)$, m_q é o número de coeficientes do numerador, os quais são expressos como combinação linear de uma base de m_{pi} funções da variável de *scheduling* $\{f_{i0}(p), f_{i1}(p), \dots, f_{im_{pi}-1}(p)\}$ e ρ é um vetor de dimensão $m_C = \sum_{i=0}^{m_q-1} m_{pi}$. Define-se a classe de controladores como:

$$C = \{C(q, p, \rho) : \rho \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{m_C}\}, \quad (8)$$

em que Ω é um subespaço de \mathbb{R}^{m_C} .

O critério de seguimento de referência, descrito em (2) para o caso LIT, é então adaptado para o caso LPV como

$$J_y^{LPV}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(T_d(q, p) - T(q, p, \rho)) r(t)]^2, \quad (9)$$

no qual tanto o sistema em malha fechada quanto o modelo de referência dependem da variável de *scheduling* $p(t)$. Definir uma resposta desejada dependente da variável de *scheduling* pode parecer contra-intuitivo, mas com essa flexibilização podemos definir o controlador ideal como

$$C_d(q, p) = G^{-1}(q, p) T_d(q, p) [1 - T_d(q, p)]^{-1}. \quad (10)$$

Note que o projetista pode sempre definir um modelo de referência LIT e, muito provavelmente, neste caso o controlador ideal não estará na classe de controladores escolhida para o projeto. Para isso, considere a premissa a seguir:

Premissa 1. Se $C_d(q, p) \in \mathcal{C}$, então $\exists \rho_0 : C(q, \rho_0, p) = C_d(q, p)$.

Projeto de controle pelo método VRFT-LPV: Sejam definidos o desempenho desejado (LIT ou LPV) e a classe de controladores LPV $C(q, p, \rho)$, o método VRFT-LPV utiliza um conjunto de dados coletados $\mathcal{D}_N = \{u(t), y(t), p(t)\}$ com N amostras. Assume-se que os sinais de \mathcal{D}_N são mensuráveis e que \mathcal{D}_N é suficientemente rico (Formentin e Savaresi, 2011).

Assim, utilizando o conceito de referência virtual, obtém-se o erro virtual $e_V(t) = (T_d(q, p)^{-1} - 1) y(t)$, com o qual pode-se chegar no critério

$$J_{VR}^{LPV}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [L(q, p) (u(t) - C(q, p, \rho) e_V(t))]^2, \quad (11)$$

onde o filtro $L(q, p)$ pode ser utilizado para aproximar o mínimo de (11) ao de (9). Em Formentin e Savaresi (2011), um filtro é proposto para aproximar a segunda derivada de (11) e (9), mas requer experimentos adicionais na planta. De forma a evitar essa contrapartida, utiliza-se neste trabalho $L(q, p) = T_d(q, p) (1 - T_d(q, p))$, um filtro semelhante àquele já consagrado para o caso LIT (4), com a finalidade de avaliar seu desempenho também para o caso LPV.

Uma vez que o controlador LPV a ser estimado é dado por (7), a solução de $J_{VR}^{LPV}(\rho)$ é dada por uma solução de mínimos quadrados:

$$\hat{\rho}_{MQ} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) \text{vec}(\varphi_L(t))^T \right)^{-1} \times \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) u_L(t) \right) \quad (12)$$

em que $u_L(t) = L(q, p) u(t)$ e

$$\text{vec}(\varphi_L(t)) = L(q, p) \alpha^{-1}(q) \times \begin{bmatrix} [f_{00}(p) \ f_{01}(p) \ \cdots \ f_{0m_{p0}-1}(p)]^T \\ q^{-1} [f_{10}(p) \ f_{11}(p) \ \cdots \ f_{1,m_{p1}-1}(p)]^T \\ \vdots \\ q^{-m_q+1} [f_{m_q-1,0}(p) \ f_{m_q-1,1}(p) \ \cdots \ f_{m_q-1,m_{pm_q-1}-1}(p)]^T \end{bmatrix} e_V(t).$$

A formulação do método VRFT-LPV considera que os dados coletados não são afetados por ruído. Considerando o caso mais realista, em que ruído está presente nos dados coletados, a estimativa do vetor de parâmetros do controlador LPV deve ser analisada em função de suas propriedades estatísticas. Essa análise é apresentada na seção a seguir.

3. ANÁLISE DA ESTIMATIVA DO VRFT-LPV PARA DADOS AFETADOS POR RUÍDO

Considere que os dados sejam coletados de (5). Com isso, o erro virtual é dado por:

$$e_V(t) = \underbrace{(T_d(q, p)^{-1} - 1) G(q, p) u(t)}_{e_{V0}(t)} + \underbrace{(T_d(q, p)^{-1} - 1) \nu(t)}_{\tilde{e}_V(t)} \quad (13)$$

em que $e_{V0}(t)$ é decorrelacionado de $\tilde{e}_V(t)$, desde que $\nu(t)$ seja decorrelacionado de $u(t)$. Quando a coleta de dados é realizada em malha aberta, essa condição é satisfeita. Então, como o sistema é LPV e, portanto, é linear em cada instante de tempo da mesma forma que um sistema LIT, chega-se em

$$\text{vec}(\varphi_L(t)) = \text{vec}(\varphi_{0L}(t)) + \text{vec}(\tilde{\varphi}_L(t)). \quad (14)$$

Considere que a Premissa 1 seja satisfeita. Então $u_L(t) = \text{vec}(\varphi_{0L}(t)) \rho_0$. Assim, as propriedades estatísticas da estimativa podem ser obtidas.

3.1 Solução por Mínimos Quadrados (MQ)

Lembrando da linearidade do sistema em cada instante de tempo, é possível, de forma análoga ao caso LIT, subtrair ρ_0 em ambos os lados de (12) e seguir as manipulações de (Söderström e Stoica, 1989) e (Söderström, 2018), para obter

$$\hat{\rho}_{MQ} - \rho_0 = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) \text{vec}(\varphi_L(t))^T \right)^{-1} \times \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) \text{vec}(\tilde{\varphi}_L(t))^T \rho_0 \right) \quad (15)$$

Note que, para a estimativa ser consistente, ou seja, para $\rho_{MQ} = \rho_0$, o lado direito de (15) deve ser nulo. Uma vez que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) \text{vec}(\varphi_L(t))^T$ é uma matriz positiva definida e não-nula pela coleta de dados suficientemente ricos, $\hat{\rho}_{MQ}$ seria consistente se $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \text{vec}(\varphi_L(t)) \text{vec}(\tilde{\varphi}_L(t))^T = 0$. Porém esta condição não é satisfeita, vide a correlação entre os dois vetores, evidente em (14), o que caracteriza a estimativa $\hat{\rho}_{MQ}$ como *polarizada*.

3.2 Solução por Variável Instrumental (VI)

Para eliminar a polarização da estimativa, a variável instrumental escolhida $\zeta(t)$ deve ser correlacionada com $\varphi(t)$, mas decorrelacionada com o ruído (Ljung, 1999; Söderström e Stoica, 1989). Assim, no caso do método VRFT-LPV, a solução é dada por

$$\hat{\rho}_{VI} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\zeta_L(t)) \text{vec}(\varphi_L(t))^T \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{vec}(\zeta_L(t)) u_L(t)$$

A fim de que ocorra convergência para um valor finito, é necessário que $\zeta(t)$ seja correlacionada com $\varphi(t)$ de forma a garantir $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \text{vec}(\zeta_L(t)) \text{vec}(\varphi_L(t))^T > 0$. Para atender isso, $\zeta(t)$ é escolhida para ser da mesma natureza que $\varphi(t)$, sendo obtida através de um segundo conjunto de dados $\mathcal{D}_N = \{u(t), \bar{y}(t), p(t)\}$, o qual também deve conter dados suficientemente ricos (Butcher e Karimi, 2010). Ainda, para que a polarização seja eliminada, é necessário que $\zeta(t)$ seja descorrelacionada do ruído:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \text{vec}(\zeta_L(t)) \text{vec}(\bar{\varphi}_L(t))^T = 0. \quad (16)$$

A demonstração da consistência da estimativa usando VI para estimativas de controladores LPV pode ser encontrada em (Butcher e Karimi, 2010).

Escolha do instrumento: podem-se utilizar duas formas diferentes para obter a variável \bar{y} (Bazanella et al., 2012; Boeira, 2018):

- Experimento repetido - VI2:
 Realiza-se um segundo experimento na planta $G(q, p)$ utilizando a mesma entrada $u(t)$ e coleta-se a nova saída $\bar{y}(t)$. Uma vez que o ruído é descorrelacionado nos dois experimentos, percebe-se que a estimativa $\hat{\rho}_{VI}$ é consistente, ou seja, não é polarizada.
- Identificação da planta - VI \hat{G} :
 Identifica-se um modelo $\hat{G}(q, p)$ da planta utilizando o conjunto de dados coletados \mathcal{D} . A partir da simulação de $\hat{G}(q, p)$ gera-se uma nova saída $\bar{y}(t)$. Devido a erros na estimação do modelo $\hat{G}(q, p)$, não se pode assegurar que $\hat{\rho}_{VI}$ tenderá a ρ_0 , pois (16) não é totalmente garantida.

A realização de dois ensaios é amplamente utilizada no contexto do VRFT, tanto no caso LIT quanto no caso LPV, como apresentado em Formentin e Savaresi (2011) e Formentin et al. (2016). Neste trabalho, analisa-se também a variável instrumental obtida pela utilização de um modelo para a planta, pouco explorada na literatura de controle baseado em dados.

4. ESTUDOS DE CASO

A seguir, apresentam-se alguns estudos de caso da aplicação do método VRFT-LPV em sistemas LPV. Primeiramente, é apresentado o caso em que um modelo de referência LIT é escolhido, de forma que a Premissa 1 não é satisfeita, a fim de analisar o efeito do uso do filtro $L(q)$. O segundo exemplo mostra o efeito das diferentes escolhas para variáveis instrumentais no caso de dados de saída afetados por ruído, considerando tanto o caso que a Premissa 1 é satisfeita e o caso em que esta condição é violada.

4.1 Dados coletados livres de ruído

Considere a planta em tempo discreto:

$$G(q, p) = \frac{q^{-1}}{1 + q^{-1}(0,2 + p(t))}. \quad (17)$$

Deseja-se que o sistema em malha fechada tenha comportamento linear, com rápido tempo de acomodação e seguimento de referência em regime permanente, dado por:

$$T_d(q) = \frac{0,95}{q - 0,05}. \quad (18)$$

Para tanto, projeta-se um controlador proporcional-integral (PI) para o VRFT-LIT, dado por

$$C(q, \rho) = [\rho_0 \ \rho_1] \begin{bmatrix} 1 & q^{-1} \\ 1 - q^{-1} & 1 - q^{-1} \end{bmatrix}^T, \quad (19)$$

e um controlador PI LPV, com dependência polinomial da variável de *scheduling*, para o VRFT-LPV:

$$C(q, p, \rho) = [\rho_{00} \ \rho_{01} \ \rho_{10} \ \rho_{11}] \times \begin{bmatrix} 1 & p(t) & q^{-1} & q^{-1}p(t) \\ 1 - q^{-1} & 1 - q^{-1} & 1 - q^{-1} & 1 - q^{-1} \end{bmatrix}^T. \quad (20)$$

No projeto LIT, adota-se o filtro $L_1(q) = T_d(q)(1 - T_d(q))$, enquanto que no projeto LPV, estima-se o controlador considerando duas abordagens: filtro $L_2(q) = 1$, ou seja, sem filtro, e o mesmo filtro do caso LIT, ou seja $L_1(q)$.

Para a coleta dos dados da planta (17), aplica-se como entrada $u(t)$ um sinal tipo PRBS (*Pseudo-Random Binary Sequence*) de amplitude ± 1 com $N = 100.000$ amostras, e tem-se $p(t) = 0,6 \sin(0,04\pi t)$ para a variável de *scheduling*.

Dessa forma, através do VRFT-LIT, VRFT-LPV sem filtro e VRFT-LPV com filtro $L_1(q)$ são obtidos, respectivamente, os seguintes vetores: $\hat{\rho}_{LIT} = [0,8397 \ -0,1001]^T$, $\hat{\rho}_{LPV} = [0,8223 \ 0,4718 \ -0,3153 \ -0,4719]^T$, $\hat{\rho}_{LPV+L} = [0,9469 \ 0,0043 \ -0,1924 \ -0,9442]^T$. Os resultados em malha fechada com cada controlador, bem como a resposta desejada, são exibidos na Fig. 1 e os respectivos valores de critério de desempenho são $J_y(\hat{\rho}_{LIT}) = 0,0146$; $J_y(\hat{\rho}_{LPV}) = 0,0097$ e $J_y(\hat{\rho}_{LPV+L}) = 0,0058$, calculados usando os dados da Fig. 1. Note que, apesar de não eliminar o efeito da variável de *scheduling*, o controlador LPV reduziu o custo J_y , reduzindo o pico obtido logo após a aplicação do sinal de referência. Note também, que o uso do filtro $L_1(q)$ foi benéfico na resposta obtida, resultando em custo J_y menor, apesar de ter causado uma distorção na oscilação causada pela variável de *scheduling*.

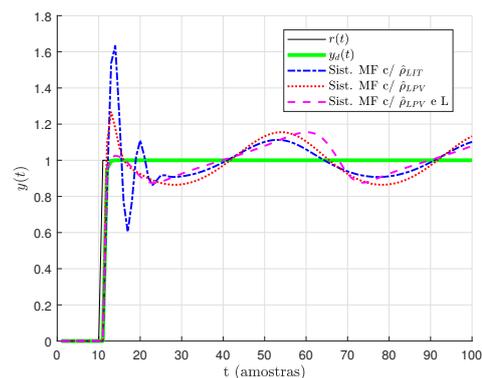


Figura 1. Comportamentos desejado (em verde) e em malha fechada (MF) com controladores obtidos através de VRFT-LIT (em azul); VRFT-LPV sem filtro (em vermelho); e VRFT-LPV com filtro $L(q)$ (em magenta).

4.2 Dados coletados com ruído

Considere novamente a planta (17). Porém, considere que a saída da planta agora é afetada por ruído branco gaussiano

de média nula. Pretende-se analisar as propriedades estatísticas da estimativa considerando ambas soluções MQ e VI. Para o caso em que se utiliza a variável instrumental obtida através da identificação da planta $\hat{G}(q, p)$, define-se a estrutura de modelo

$$G(q, p, \theta) = \frac{q^{-1} [\theta_{b10} + \theta_{b11}p(t)] + q^{-2} [\theta_{b20} + \theta_{b21}p(t)]}{q^{-1} [\theta_{a10} + \theta_{a11}p(t)] + q^{-2} [\theta_{a20} + \theta_{a21}p(t)]} \quad (21)$$

a qual é identificada com o método dos mínimos quadrados (Bamieh e Giarré, 2002) e usando os mesmos dados coletados para identificação do controlador.

Para a coleta dos dados da planta, aplica-se como entrada um sinal tipo PRBS de amplitude ± 1 , enquanto a variável de *scheduling* é dada por $p(t) = 0, 4 \sin(0, 06\pi t)$. A saída do sistema é afetada por ruído branco com $\text{SNR}_{dB} = 14\text{dB}$. No caso de VI2, foram coletadas $N = 50.000$ amostras em cada experimento, enquanto que para o método MQ e no caso de VI \hat{G} , foram coletadas $N = 100.000$ amostras. Ainda, para cada caso, foram realizadas 1000 rodadas de Monte Carlo.

Caso em que $C_d(q, p) \in \mathcal{C}$: Neste caso, adota-se um controlador PI LPV, com dependência polinomial da variável de *scheduling* como apresentado em (20), e deseja-se encontrar um modelo de referência $T_d(q, p)$ tal que $C_d(q, p) \in \mathcal{C}$.

Considere $\nu(t) = 0$ em (5). Seja a planta dada por (17), pode-se escrever

$$\begin{cases} u(t) = y(t+1) - [0, 2 + p(t)] y(t) \\ u(t-1) = y(t) - [0, 2 + p(t-1)] y(t-1) \end{cases} \quad (22)$$

Além disso, substituindo (20) em (6), tem-se:

$$\begin{cases} u(t) = u(t-1) + [\rho_{00} + \rho_{01}p(t)] [r(t) - y(t)] \\ \quad + [\rho_{10} + \rho_{11}p(t-1)] [r(t-1) - y(t-1)] \end{cases} \quad (23)$$

Assim, substituindo (22) em (23) e realizando algumas manipulações, tem-se:

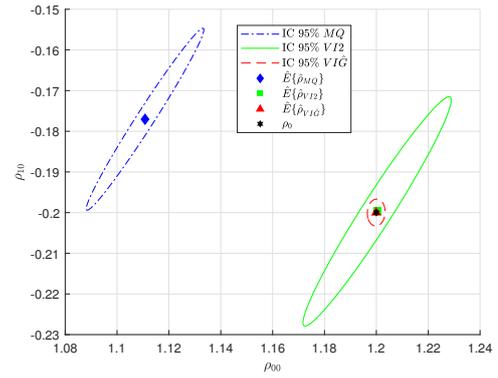
$$\begin{aligned} & [\rho_{00} + \rho_{01}p(t)] r(t) + [\rho_{10} + \rho_{11}p(t-1)] r(t-1) \\ & = y(t+1) + [\rho_{00} + \rho_{01}p(t) - p(t) - 1, 2] y(t) \\ & \quad + [\rho_{10} + \rho_{11}p(t-1) + 0, 2 + p(t-1)] y(t-1) \end{aligned} \quad (24)$$

Agora, escolhendo arbitrariamente $\rho_0 = [1, 2 \ 1 \ -0, 2 \ -1]^T$, então $(1, 2 + p(t))r(t) - (0, 2 + p(t-1))r(t-1) = y(t+1)$. Dessa forma, ao utilizar-se

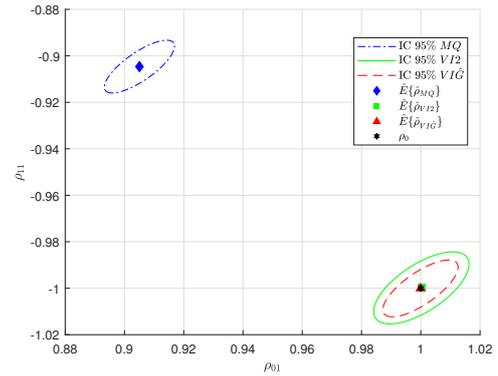
$$T_d(q, p) = \frac{q(1, 2 + p(t)) - 0, 2 - p(t)}{q^2}, \quad (25)$$

o problema a ser resolvido consiste na identificação do controlador ideal. Do ponto de vista prático, teria muito mais sentido buscar um mapeamento de referência LIT, porém, é interessante notar em (24) que $\nexists \rho : C_d(q, p) \in \mathcal{C}$ se o modelo de referência for LIT para a planta considerada.

Considerando o modelo de referência (25), a classe de controladores (20) e os dados coletados, foram calculados controladores PI LPV usando as estimativas MQ, VI2 e VI \hat{G} . A Fig. 2 mostra a projeção nos planos $\rho_{00} \times \rho_{10}$ e $\rho_{01} \times \rho_{11}$ do valor ideal ρ_0 , bem como da média (estimativa do valor esperado) de todos os parâmetros encontrados considerando as 1000 rodadas de Monte Carlo para cada um dos métodos. Apresenta-se também a elipse (projeção do elipsoide no plano) que representa um intervalo de confiança Qui-Quadrado de 95% das estimativas.



(a) Plano $\rho_{00} \times \rho_{10}$.



(b) Plano $\rho_{01} \times \rho_{11}$.

Figura 2. Projeção nos planos $\rho_{00} \times \rho_{10}$ e $\rho_{01} \times \rho_{11}$ de ρ_0 , média dos valores ($\hat{E}\{\cdot\}$) e elipsoide com 95% de intervalo de confiança (IC 95%) das estimativas dos parâmetros do controlador obtidos através dos métodos MQ, VI \hat{G} e VI2 no caso que $C_d(q, p) \in \mathcal{C}$.

Além disso, a Tabela 1 compara a estimativa do valor esperado ($\hat{E}\{\cdot\}$) para cada parâmetro do controlador obtido com cada método utilizado, além do valor ideal ρ_0 . Nela é perceptível a polarização do MQ e o fato de que os valores esperados dos parâmetros nas soluções VI têm valor ρ_0 . Já a Tabela 2 compara a variância obtida $\sigma^2(\cdot)$

Tabela 1. Valor médio de cada parâmetro do controlador quando $C_d(q, p) \in \mathcal{C}$.

	$\hat{E}\{\rho_{00}\}$	$\hat{E}\{\rho_{01}\}$	$\hat{E}\{\rho_{10}\}$	$\hat{E}\{\rho_{11}\}$
ρ_0	1,2	1	-0,2	-1
$\hat{\rho}_{MQ}$	1,1108	0,9051	-0,1770	-0,9046
$\hat{\rho}_{VI2}$	1,2003	1,0002	-0,1997	-0,9999
$\hat{\rho}_{VI\hat{G}}$	1,2000	0,9999	-0,2000	-1,0001

para cada parâmetro, considerando todas as rodadas de Monte Carlo realizadas. Nota-se de imediato que a maior variância é obtida pela estimativa VI2. Agora, quando o parâmetro multiplica $p(t)$, é encontrada a mesma ordem decrescente de variância do caso LIT, isto é, VI \hat{G} apresenta uma variância maior do que MQ. Já quando o parâmetro não multiplica a variável de *scheduling*, MQ apresenta uma variância maior do que VI \hat{G} .

Caso em que $C_d(q, p) \notin \mathcal{C}$: Considere que o comportamento desejado no caso anterior seja alterado para um comportamento linear, dado por (18), resultando agora no caso em que o controlador ideal não mais pertence à classe

Tabela 2. Variância encontrada para cada parâmetro ($\times 10^{-6}$).

$\times 10^{-6}$	$\sigma^2(\rho_{00})$	$\sigma^2(\rho_{01})$	$\sigma^2(\rho_{10})$	$\sigma^2(\rho_{11})$
$\hat{\rho}_{MQ}$	85,9170	23,4301	83,5764	21,5712
$\hat{\rho}_{VI2}$	136,4173	43,1777	132,6745	40,1605
$\hat{\rho}_{VI\hat{G}}$	1,9672	26,9020	1,8355	24,9842

de controladores escolhida, ou seja, não é um PI LPV como descrito em (20).

Foram calculados 1000 controladores PI LPV, através da estimativa por mínimos quadrados (MQ), variável instrumental com dois experimentos (VI2) e variável instrumental usando modelo (VI \hat{G}) usando o filtro $L_1(q) = T_d(q)(1 - T_d(q))$. Para fins de comparação, utiliza-se a solução do VRFT com cada uma das metodologias usando dados sem ruído, denotada neste trabalho de solução “ótima” ρ_* .

A Tabela 3 mostra a média dos valores obtidos ($\hat{E}\{\cdot\}$), considerando todas as rodadas de Monte Carlo realizadas para cada parâmetro do controlador, comparado ao valor de referência ρ_* .

Tabela 3. Valor médio de cada parâmetro do controlador quando $C_d(q, p) \notin \mathcal{C}$.

	$\hat{E}\{\rho_{00}\}$	$\hat{E}\{\rho_{01}\}$	$\hat{E}\{\rho_{10}\}$	$\hat{E}\{\rho_{11}\}$
$\hat{\rho}_*$	0,9469	0,0043	-0,1924	-0,9442
$\hat{\rho}_{MQ}$	0,8802	-0,0416	-0,1659	-0,8456
$\hat{\rho}_{VI2}$	0,9469	0,0041	-0,1924	-0,9444
$\hat{\rho}_{VI\hat{G}}$	0,9474	0,0044	-0,1921	-0,9442

Já a Tabela 4 mostra a variância $\sigma^2(\cdot)$ obtida, considerando todas as rodadas de Monte Carlo realizadas, para cada parâmetro do controlador em cada método utilizado.

Tabela 4. Variância encontrada para cada parâmetro ($\times 10^{-6}$).

$\times 10^{-6}$	$\sigma^2(\rho_{00})$	$\sigma^2(\rho_{01})$	$\sigma^2(\rho_{10})$	$\sigma^2(\rho_{11})$
$\hat{\rho}_{MQ}$	0,7943	4,4530	0,8112	4,1821
$\hat{\rho}_{VI2}$	2,3604	11,2390	2,3296	11,2848
$\hat{\rho}_{VI\hat{G}}$	0,9912	5,2110	1,0750	5,3742

É evidente que a estimativa MQ é polarizada se comparada a ρ_* . Além disso, esta polarização é praticamente eliminada pelo uso de VI, sendo, dentro dessa, encontrado o maior erro no valor médio de ρ_{00} pela estimativa VI \hat{G} . Além disso, conforme apresentado na Tabela 4, a variância das estimativas com VI ficou maior do que a das estimativas com MQ, sendo que o uso do modelo da planta para a criação da variável instrumental resultou em variâncias menores.

5. CONCLUSÃO

Foi apresentada a formulação do método VRFT-LPV e analisado seu desempenho, tanto para o caso em que o controlador ideal está dentro classe a ser identificada, quanto para o caso em que não está. Foi verificado que a ocorrência do primeiro é improvável na prática, enquanto que no segundo a utilização do filtro proposto para o método VRFT-LIT apresentou uma melhora nos resultados, sendo assim, recomendada a sua utilização. Quando há

presença de ruído nos dados, se faz necessário o uso da variável instrumental para minimizar ou mesmo eliminar a polarização da estimativa. Neste trabalho, foi explorado o uso da VI2, obtida através de um segundo experimento, e o caso da VI \hat{G} , obtida via simulação de um modelo identificado para planta, a qual não havia sido utilizada anteriormente em trabalhos similares. Foi averiguado que a VI \hat{G} também é adequada, considerando que o modelo represente o sistema de modo satisfatório. No exemplo testado, a variância com VI \hat{G} ficou menor que VI2, mas com uma pequena polarização, ainda assim, muito menor do que a encontrada através da solução MQ.

REFERÊNCIAS

- Bamieh, B. e Giarré, L. (2002). Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(9), 841–853.
- Bazanella, A.S., Campestrini, L., e Eckhard, D. (2012). *Data-Driven Controller Design: The H2 Approach*. Springer, 1 ed. edition.
- Boeira, E.C. (2018). *Sintonia de controladores multivariáveis pelo método da referência virtual com regularização Bayesiana*. Master’s thesis, UFRGS, Porto Alegre, Brasil.
- Butcher, M. e Karimi, A. (2010). Data-driven tuning of linear parameter-varying precompensators. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 24(7), 592–609.
- Campestrini, L., Eckhard, D., Chía, L.A., e Boeira, E. (2016). Unbiased mimo vrft with application to process control. *Journal of Process Control*, 39, 35 – 49.
- Campi, M., Lecchini, A., e Savaresi, S. (2002). Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. *Automatica*, 38(8), 1337–1346.
- Formentin, S., Piga, D., Tóth, R., e Savaresi, S.M. (2013). Direct data-driven control of linear parameter-varying systems. In *52nd IEEE conference on decision and control*, 4110–4115.
- Formentin, S., Piga, D., Tóth, R., e Savaresi, S.M. (2016). Direct learning of LPV controllers from data. *Automatica*, 65, 98–110.
- Formentin, S. e Savaresi, S.M. (2011). Virtual Reference Feedback Tuning for linear parameter-varying systems. In *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 1 PART 1, 10219–10224. IFAC Secretariat.
- Ljung, L. (1999). *System identification: theory for the user*. Prentice Hall, 2 ed. edition.
- Nakamoto, M. (2004). An application of the virtual reference feedback tuning for an mimo process. *SICE Annual Conference Program and Abstracts*, 2004, 26–26.
- Piga, D., Formentin, S., e Bemporad, A. (2018). Direct data-driven control of constrained systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(4), 1422–1429.
- Söderström, T. e Stoica, P. (1989). *System identification*. Prentice Hall, 1 ed. edition.
- Söderström, T. (2018). *Errors-in-Variables Methods in System Identification*. Communications and Control Engineering. Springer, 1 ed. edition.
- Toth, R. (2010). *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*. Lecture notes in control and information sciences. Springer, Germany.