

## Projeto de controladores LPV baseado em dados para planta não linear

Fábio E. Xavier\* Pedro R. de Lima\* Lucíola Campestrini\*

\* Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia,  
UFRGS, Av. Osvaldo Aranha, 99, 90035-190  
Porto Alegre, RS, Brasil  
Emails: fabioexavier@hotmail.com {pedro.lima, luciola}@ufrgs.br

---

**Abstract:** Gain scheduling consists in interpolating linear and time invariant (LTI) controllers' parameters designed for different operating conditions, in order to provide a satisfactory performance for all the relevant operating range of a non linear system. The resulting controller is known as Linear Parameter-Varying (LPV). In this work, the Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) method – originally proposed for the design of LTI controllers – is employed to design LPV controllers through a unique optimization procedure, without performing the interpolation step. A particular structure for the controller is presented, in a way that the LPV controller designed through VRFT is equivalent to a gain scheduling controller. We compare the closed-loop response of a non linear system with the proposed LPV controller, with a gain scheduling controller obtained through interpolation of LTI controllers, as well as with an LTI controller.

**Resumo:** Escalonamento de ganhos consiste em interpolar parâmetros de controladores lineares e invariantes no tempo (LIT) projetados para diferentes pontos de operação, de maneira a gerar um desempenho satisfatório para toda a faixa de operação de interesse de um sistema não linear. O controlador resultante é conhecido como Linear a Parâmetros Variantes (LPV). Neste trabalho, utiliza-se o método *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) – originalmente proposto para o projeto de controladores LIT – para projetar controladores LPV através de uma otimização única, sem passar pelo procedimento de interpolação. Uma estrutura particular para o controlador é apresentada, de forma que o controlador LPV projetado pelo método VRFT seja equivalente a um controlador com escalonamento de ganhos. Compara-se o desempenho em malha fechada de um sistema não linear com o controlador LPV projetado, com o controlador LPV obtido através da interpolação de ganhos de controladores LIT, bem como com um controlador LIT único.

*Keywords:* Data-driven control; reference model; LPV VRFT; LPV PID; gain scheduling.

*Palavras-chaves:* Controle baseado em dados; modelo de referência; VRFT LPV; PID LPV; escalonamento de ganhos.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Métodos de controle baseado em dados consistem no ajuste de controladores utilizando apenas um conjunto de dados experimentais, sem a necessidade de conhecer-se o modelo matemático da planta (Bazanella et al., 2012). Dentre os diversos métodos, o *Iterative Feedback Tuning* (Hjalmarsson et al., 1994), e o *Virtual Reference Feedback Tuning* - VRFT (Campi et al., 2000) podem ser citados como os mais clássicos. A grande maioria destes métodos é utilizada para projetar controladores Lineares e Invariantes no Tempo (LIT) considerando o problema de seguimento de referência, sendo os controladores do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) fortemente empregados devido à sua grande utilização na indústria.

Para o projeto de controladores LIT, a teoria de controle baseado em dados assume que a planta, apesar de desconhecida, também é LIT (Bazanella et al., 2012). Apesar disso, tais metodologias podem ser aplicadas a sistemas não lineares, para as quais o projeto considera que o sistema opera em algum ponto de operação (Remes et al., 2021). Quando o sistema não linear não opera em apenas um ponto de equilíbrio, o desempenho do sistema em malha fechada operando com um controlador LIT fica deteriorado, e estruturas mais complexas de controladores devem ser projetadas. Posto isto, existem na literatura algumas extensões de métodos de controle baseado em dados para projetar controladores não lineares, como a apresentada por Bazanella e Neuhaus (2014), para projeto de controladores NARX - do inglês *Nonlinear Autoregressive Exogenous Model* -, por Bloemers et al. (2019) para o projeto de controladores LPV no domínio da frequência e as apresentadas por Karimi et al. (2009), Formentin e Savaresi (2011) e Formentin et al. (2016) para projeto de controladores LPV no domínio do tempo.

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Em Formentin e Savaresi (2011), o comportamento desejado para o sistema em malha fechada é definido por um modelo de referência linear, e, apesar de não haver uma sistematização na escolha da classe do controlador, o projeto do controlador LPV equivale a um projeto de controlador com ganhos escalonados. Em Formentin et al. (2013), o modelo de referência é flexibilizado para representar um comportamento variante no tempo e em Formentin et al. (2016) a estrutura do controlador também é flexibilizada, de forma que a quantidade de parâmetros a ser estimada é definida em um problema de otimização.

Neste trabalho, discute-se a aplicação do método apresentado em Formentin e Savaresi (2011), aqui denominado VRFT-LPV, em que os ganhos do controlador são calculados em função do ponto de operação da planta. Para isto, define-se uma classe de controladores a ser utilizada no contexto de controle baseado em dados de forma que o controlador resultante seja equivalente a um controlador com ganhos escalonados. Compara-se o resultado obtido tanto a um controlador com ganhos escalonados projetado como a interpolação de diversos controladores PID LIT como com um PID LIT único, os últimos projetados usando o método VRFT para controladores LIT (Campi et al., 2000).

## 2. CONTROLE BASEADO EM DADOS

Controle por modelo de referência consiste em uma classe de metodologias usadas para projetar um controlador de forma a aproximar a resposta do sistema com o controlador de uma *resposta desejada*  $y_d(t)$ , definida por um *modelo de referência*. Considerando um controlador parametrizado por  $\Theta$ , pode-se solucionar este problema minimizando

$$J_y(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t, \Theta) - y_d(t))^2, \quad (1)$$

com  $t$  usado para definir tempo discreto e  $N$  o intervalo de tempo considerado. Quando um modelo LIT para seguimento de referência é escolhido, a resposta desejada é dada por  $y_d(t) = T_d(z)r(t)$ , sendo  $T_d(z)$  o modelo de referência definido pelo projetista,  $z$  o operador de avanço tal que  $zx(t) = x(t+1)$  e  $r(t)$  o sinal de referência que se deseja seguir.

Uma vez que  $y(t, \Theta)$  representa o sinal de saída do sistema em malha fechada com o controlador, o qual depende do modelo da planta, métodos de controle baseados em dados minimizam funções alternativas que, em condições ideais, apresentam o mesmo mínimo de  $J_y(\Theta)$ , mas que são baseadas apenas em dados coletados. Para o projeto de controladores baseados em dados, é necessário então definir um conjunto de dados, o modelo de referência a ser adotado e a estrutura do controlador a ser projetado.

### 2.1 Coleta de dados

Considere que esteja disponível um conjunto de dados coletados  $\mathcal{D}_N = \{u(t), y(t), p(t)\}$ ,  $u(t)$  representando o sinal de entrada da planta,  $y(t)$  o sinal de saída da planta e  $p(t)$  a variável de escalonamento, com  $N$  amostras para cada variável. Assume-se que os sinais de  $\mathcal{D}_N$  são mensuráveis e que  $\mathcal{D}_N$  é suficientemente rico (Formentin e Savaresi, 2011). Ainda, a coleta de dados deve excitar o

sistema de forma a garantir que sua saída percorra toda a faixa de valores de interesse.

### 2.2 Modelo de referência

O método VRFT-LPV apresentado na literatura considera tanto modelos de referência LIT quanto LPV. Neste trabalho, adota-se a escolha de um modelo LIT, devido à facilidade de definição deste modelo considerando requisitos de projeto. É intuitivo, do ponto de vista do usuário, definir tempo de acomodação, sobressinal e erro nulo em regime permanente únicos, por exemplo, para toda a resposta do sistema, ainda que o mesmo opere em diferentes pontos de operação.

### 2.3 Controlador LPV

Tradicionalmente, o projeto de controladores com escalonamento de ganhos LPV é feito projetando controladores lineares de maneira independente para diferentes pontos de operação e em seguida interpolando os seus parâmetros (Khalil, 2001). Assim, quando o projeto do controlador LPV é feito diretamente, deseja-se que a linearização da conexão em realimentação da planta não linear com o controlador LPV em torno de um ponto de operação seja igual à conexão em realimentação da planta linearizada em torno desse ponto com o controlador LIT correspondente (Kaminer et al., 1995).

Diferentes esquemas de interpolação resultarão em estruturas diferentes de controladores LPV. Para ilustrar como essas estruturas podem afetar essa propriedade, são analisadas duas representações diferentes de um controlador proporcional-integral (PI) LPV com os ganhos parametrizados pela saída  $y$  da planta. A discussão desenvolvida a seguir é inspirada no tratamento de controladores com escalonamento de ganhos de Khalil e Grizzle (2002).

A função de transferência de um controlador PI em tempo discreto pode ser dada por

$$C(z) = K_1 + K_2 \frac{1}{z-1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (2)$$

em que  $b_0 = K_1$  e  $b_1 = K_2 - K_1$ . Dois diagramas de blocos para essa função de transferência são mostrados nas Figuras 1 e 2, os quais se diferenciam um do outro pela posição relativa entre o ganho  $K_2$  e o bloco  $\frac{1}{z-1}$ . O sinal de entrada  $e$  é o erro de seguimento de referência, e  $u$  é o sinal de controle calculado pelo controlador. O diagrama da Figura 1 corresponde ao modelo

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \sigma(t) + e(t), \\ u(t) &= K_1 e(t) + K_2 \sigma(t), \end{aligned} \quad (3)$$

enquanto o da Figura 2 corresponde a

$$\begin{aligned} \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2 e(t). \\ u(t) &= K_1 e(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando agora que os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  sejam funções da saída  $y$ , pode-se generalizar esses dois modelos para se obter estruturas de controlador PI LPV. Assim, (3) e (4) tornam-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \sigma(t) + e(t) \\ u(t) &= K_1(y(t))e(t) + K_2(y(t))\sigma(t) \end{aligned} \quad (5)$$

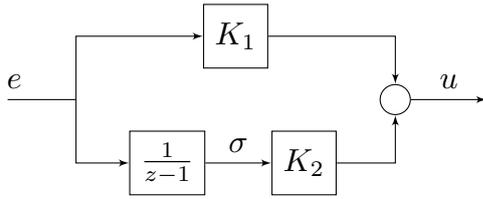


Figura 1. Diagrama de um controlador PI: ganho após o integrador.

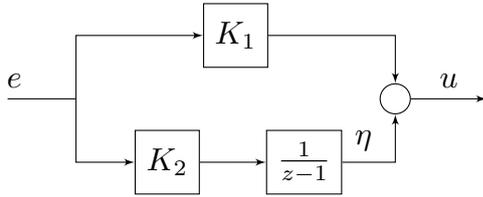


Figura 2. Diagrama de um controlador PI: ganho antes do integrador.

$$e \quad \begin{aligned} \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2(y(t))e(t) \\ u(t) &= K_1(y(t))e(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Embora (3) e (4) sejam equivalentes, os controladores (5) e (6) não são. Para comparar essas duas estruturas, considera-se uma planta não linear descrita por

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída da planta. É feita a hipótese de que, para cada ponto de operação  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ , o sistema

$$\begin{aligned} x &= f(x, u) \\ \bar{y} &= h(x) \end{aligned} \quad (7)$$

possui uma única solução  $(x, u) = (\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

A conexão em realimentação dessa planta com o controlador (5) é descrita por

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), K_1(y(t))e(t) + K_2(y(t))\sigma(t)) \\ \sigma(t+1) &= \sigma(t) + e(t), \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $e(t) = r(t) - h(x(t))$  é o sinal de erro de seguimento de referência. Quando aplicada uma referência constante  $r(t) = \bar{y}$ , o sistema em malha fechada possui um único ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$  com  $\bar{\sigma} = \frac{\bar{u}}{K_2(\bar{y})}$  devido à unicidade da solução de (7). O modelo (8) pode ser linearizado a partir do truncamento no termo de primeira ordem da expansão da série de Taylor em torno do ponto  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ , resultando em

$$\chi(t+1) = M_1\chi(t) + M_2\zeta(t), \quad (9)$$

com

$$M_1 = \begin{bmatrix} A + BC(K'_2(\bar{y})\bar{\sigma} - K_1(\bar{y})) & BK_2(\bar{y}) \\ -C & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} BK_1(\bar{y}) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\chi(t) = [x(t) - \bar{x} \quad \sigma(t) - \bar{\sigma}]^T, \quad (12)$$

$$\zeta(t) = r(t) - \bar{y}, \quad (13)$$

$$K'_2(\bar{y}) = \frac{dK_2}{dy}(\bar{y}), \quad (14)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}). \quad (15)$$

A presença da derivada do ganho  $K_2$ , explícita em (14), revela que a conexão em realimentação da planta com o controlador LPV não é localmente equivalente à conexão com um controlador PI de ganhos  $K_1(\bar{y})$  e  $K_2(\bar{y})$ . Como os autovalores da matriz de estado dependem do valor de  $K'_2(\bar{y})$ , a resposta do sistema em malha fechada será diferente da que seria obtida com o controlador LIT.

Já com o controlador (6), o sistema em malha fechada torna-se

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), K_1(y(t))e(t) + \eta(t)) \\ \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2(y(t))e(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Para uma referência constante  $r(t) = \bar{y}$ , a unicidade da solução de (7) implica que esse sistema possui um único ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{\eta})$ , com  $\bar{\eta} = \bar{u}$ . A linearização de (16) em torno desse ponto é

$$\chi(t+1) = \begin{bmatrix} A - BCK_1(\bar{y}) & B \\ -K_2(\bar{y})C & 1 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} BK_1(\bar{y}) \\ K_2(\bar{y}) \end{bmatrix} \zeta(t), \quad (17)$$

em que  $\chi(t) = [x(t) - \bar{x} \quad \eta(t) - \bar{\eta}]^T$  e o restante dos termos é definido em (13) e (15). Dessa vez, as matrizes do sistema (17) dependem apenas dos valores dos ganhos, e não das suas derivadas. Graças a isso, o comportamento local do sistema em malha fechada em torno desse ponto de operação é igual ao que seria obtido com o controlador PI de ganhos constantes  $K_1(\bar{y})$  e  $K_2(\bar{y})$ . Essa representação é portanto a escolhida para o projeto de um controlador PI LPV neste trabalho.

É interessante notar que o motivo pelo qual as matrizes de (17) não dependem de  $K'_2(\bar{y})$  é que, no controlador (6), o ganho  $K_2(y)$  multiplica diretamente o erro de seguimento de referência  $e$ .

O controlador (6) pode ser representado de maneira simples na forma de uma equação de diferenças. Manipulando as equações em (6), obtém-se

$$\begin{aligned} u(t) - u(t-1) &= \sum_{i=0}^1 (-1)^i (K_1(y(t-i))e(t-i) + \eta(t-i)) \\ &= K_1(y(t))e(t) + [K_2(y(t-1)) - K_1(y(t-1))]e(t-1) \end{aligned}$$

a qual pode ser reescrita como

$$u(t) - u(t-1) = b_0(y(t))e(t) + b_1(y(t-1))e(t-1), \quad (18)$$

com  $b_0(y) = K_1(y)$  e  $b_1(y) = K_2(y) - K_1(y)$ . Observa-se que (18) possui o mesmo formato da equação do controlador PI LIT (2), porém os coeficientes  $b_i$  são calculados a partir do valor de  $y$  no instante  $t-i$ . Isso sugere uma maneira simples de generalizar um controlador LIT para se obter uma estrutura de controlador LPV: dada uma função de transferência LIT

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{-i}}{Q(z)},$$

em que  $Q(z)$  é um polinômio mônico em potências negativas de  $z$ , transformam-se os  $n$  coeficientes  $b_i$  do numerador em funções de uma variável de escalonamento  $p$  calculadas no instante  $t-i$ , resultando em um controlador de equação

$$u(t) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{i=0}^{n-1} b_i(p(t-i))e(t-i). \quad (19)$$

Se as funções  $b_i$  forem expressas como uma combinação linear de um conjunto de funções  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , ou seja,

$$b_i(p) = \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} f_j(p),$$

então (19) torna-se

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z)} f_j(p(t-i)) e(t-i). \quad (20)$$

### 3. VRFT-LPV

O método VRFT para sistemas LIT (neste trabalho denominado de VRFT-LIT), proposto em Campi et al. (2000), baseia-se em um experimento hipotético, em que o sistema está em conexão de realimentação com o controlador ideal, o qual resulta no desempenho desejado para a variável de saída  $y_d(t)$ . Utilizando  $T_d(z)$  como modelo de referência, existirá uma referência dita *virtual*,  $\bar{r}(t)$ , que, ao ser aplicada como entrada no sistema de controle, permitirá que a saída assuma o comportamento medido, respeitando a relação  $y(t) = T_d(z)\bar{r}(t)$ . O cálculo de  $\bar{r}(t)$  implica na existência de um *erro virtual*, gerado pela conexão em realimentação negativa e dado por  $\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t)$ .

Assim como no caso invariante no tempo, o VRFT-LPV parte de um conjunto de dados obtidos de forma experimental, mais precisamente o sinal de controle, a variável de saída do sistema e a variável de escalonamento,  $\{u(t), y(t), p(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$ . Da mesma forma, é necessário definir um modelo de referência  $T_d(z)$ . Pode-se, então, utilizar o conceito do erro virtual e, partindo de (20), encontrar os parâmetros do controlador a partir da minimização da seguinte função custo:

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t) - \hat{u}(\Theta, t)]^2, \quad (21)$$

sendo

$$\hat{u}(\Theta, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z)} f_j(p(t-i)) \bar{e}(t-i). \quad (22)$$

Definindo um elemento  $ij$  da matriz regressora  $\Psi(t)$  conforme

$$\Psi_{ij}(t) \triangleq \frac{1}{Q(z)} f_j(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \quad (23)$$

e usando (22) podemos escrever (21) como

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \Psi_{ij}(t) \right]^2 \quad (24)$$

Finalmente, utilizando-se da definição de produto interno, pode-se expressar (24) por

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t) - \langle \Theta, \Psi(t) \rangle]^2. \quad (25)$$

Então, introduz-se o operador  $\lambda\{A\}$ , que transforma uma matriz  $A$  em um vetor composto pelas colunas de  $A$  concatenadas de forma sequencial. O problema de otimização descrito por (25), por sua vez, pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados, possibilitando encontrar a matriz  $\Theta$  que minimiza (25) e, por conseguinte, um controlador LPV, a partir de

$$\lambda\{\Theta\} = \left[ \sum_{t=1}^N \lambda\{\Psi(t)\} \lambda\{\Psi(t)\}^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \lambda\{\Psi(t)\} u(t) \right]. \quad (26)$$

Assim como no método VRFT para sistemas LIT, quando o controlador a ser projetado é subparametrizado, um filtro deve ser utilizado para aproximar o mínimo dos custos  $J_{VR}^{LPV}(\Theta)$  e  $J_y(\Theta)$  (Formentin e Savaresi, 2011). Neste trabalho, utilizamos o filtro projetado para o VRFT-LIT (Campi et al., 2000).

### 4. EXEMPLO DE SIMULAÇÃO

Para ilustrar o projeto de um controlador LPV parametrizado com variável de escalonamento dada pela saída da planta, considerou-se um sistema não linear de tempo contínuo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1^2 + (1 - x_1)u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2u \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

Este modelo pode representar um reator do tipo *continuous stirred-tank reactor* (CSTR) de volume constante, com unidades normalizadas, no qual a variável de controle  $u$  corresponde à vazão de entrada e de saída do tanque, e a saída  $y$  corresponde à concentração da substância produzida na saída do reator (Roffel e Betlem, 2007). Fazendo  $u$  variar entre 0 e  $\infty$ ,  $y$  varia entre 0,5 e 0. Tendo em vista esse comportamento, deseja-se projetar um controlador para que  $y$  siga uma referência  $r$  constante entre 0,1 e 0,4.

Para realizar a coleta de dados, foi feita uma simulação do processo em malha aberta aplicando um sinal de controle correspondente a uma sequência de degraus a cada 6 s, de maneira a fazer com que  $y$  assuma valores na faixa de 0,1 a 0,4, coletando 3600 amostras dos sinais, com um tempo de amostragem de 0,1s, conforme mostrado na Figura 3. Observa-se que tanto o módulo do ganho estático do sistema quanto o seu tempo de acomodação aumentam significativamente na medida em que  $y$  aumenta.

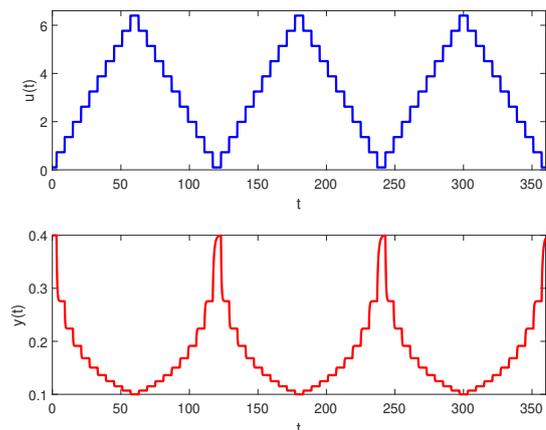


Figura 3. Dados coletados em malha aberta para  $y$  variando entre 0,1 e 0,4.

Para o controlador, foi escolhida uma estrutura PID LPV com os ganhos dados por polinômios de segundo grau. Assim, a equação do controlador é

$$u(t) = u(t-1) + \sum_{i=0}^2 b_i(y(t-i))e(t-i),$$

correspondente a  $Q(z) = 1 - z^{-1}$  e  $n = 3$ , em que os coeficientes  $b_i$  são combinações lineares das funções

$$f_1(y) = 1, \quad f_2(y) = y, \quad f_3(y) = y^2.$$

O modelo de referência escolhido foi

$$T_d(z) = \frac{0.0172(z + 0.88)}{(z - 0.82)^2},$$

cujas resposta ao salto possui tempo de acomodação de 30 amostras (3 s) sem sobrepasso e erro nulo em regime permanente. Sendo o sistema que se quer controlar não linear, o comportamento desejado linear e o controlador escolhido LPV, fica claro que o controlador é subparametrizado e não é possível identificar o controlador ideal. Assim, os dados são filtrados por  $L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z))$ , que é amplamente utilizado nas aplicações do VRFT para sistemas LIT (Bazanella et al., 2012).

Com essas definições, obteve-se, aplicando o método VRFT-LPV, a matriz de parâmetros do controlador

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0,0516 & -4,615 & 11,87 \\ -1,883 & 5,186 & -7,606 \\ -9,141 & 60,610 & -92,05 \end{bmatrix}.$$

A variação dos ganhos  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$  em função de  $y$  é mostrada em linha contínua na Figura 4.

Um conjunto alternativo de parâmetros para esse controlador LPV foi calculado a partir da interpolação dos ganhos de controladores PID projetados pelo método VRFT-LIT (Campi et al., 2000) para pontos de operação específicos da planta. Para isso, foram feitas três simulações em malha aberta aplicando como sinal de controle ondas quadradas, de maneira a manter a saída  $y$  em torno dos valores 0,15, 0,25 e 0,35. A partir desses dados e das funções de transferência  $T_d(z)$  e  $L(z)$  definidas anteriormente, os controladores obtidos foram, respectivamente,

$$C_1(z) = \frac{-0.0760 - 0.9872z^{-1} - 2.6763z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

$$C_2(z) = \frac{-0.0622 - 1.2391z^{-1} + 0.0720z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

$$C_3(z) = \frac{-0.0002 - 1.4597z^{-1} + 0.9787z^{-2}}{1 - z^{-1}}.$$

Interpolando os coeficientes do numerador por polinômios de segundo grau em função do valor de  $y$  em torno do qual os ensaios foram realizados, a matriz de parâmetros do controlador LPV calculada foi

$$\Theta = \begin{bmatrix} -0,0065 & -0,8249 & 2,408 \\ -0,5508 & -3,144 & 1,563 \\ -10,25 & 64,31 & -92,08 \end{bmatrix}.$$

O gráfico dos ganhos  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$  em função de  $y$  para esses parâmetros é mostrado em linha tracejada na Figura 4.

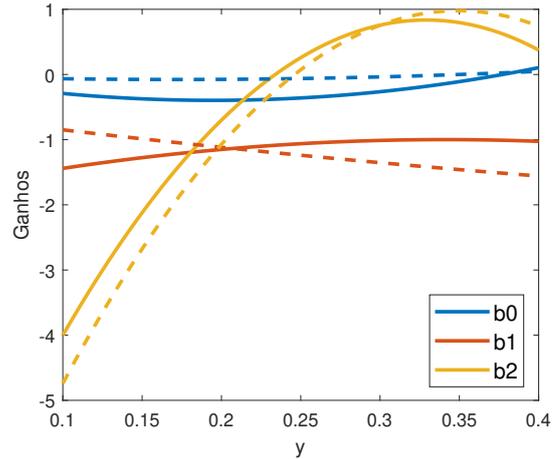


Figura 4. Ganhos dos controladores PID LPV em função de  $y$ , projetados pelo VRFT-LPV (linha contínua) e por interpolação (linha tracejada).

Projetou-se ainda um controlador PID de ganhos constantes com base nos dados coletados no ensaio mostrado na Figura 3. Novamente, foram utilizados o método VRFT-LIT e as mesmas  $T_d(z)$  e  $L(z)$  definidas para o projeto dos controladores LPV. Os ganhos obtidos para esse controlador foram

$$b_0 = 0,2721, \quad b_1 = -1,8803, \quad b_2 = 0,4939.$$

Os três controladores foram simulados em malha fechada aplicando um sinal de referência variando entre 0,1 e 0,4 em saltos de amplitude 0,06. Os resultados dessa simulação são mostrados nas Figuras 5, 6 e 7. A referência  $r$  é mostrada em azul, a saída  $y$  em laranja e a saída  $y_d$  em amarelo tracejado.

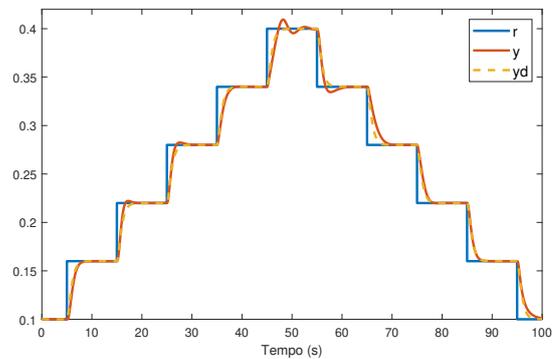


Figura 5. Resposta do sistema com o controlador projetado por meio do método VRFT-LPV.

Observa-se que a resposta do sistema em malha fechada, com o controlador PID LIT, varia significativamente com o ponto de operação da planta. Para pequenos valores de  $y$ , essa resposta é muito mais lenta do que o modelo de referência  $T_d(z)$ , enquanto que, para grandes valores de  $y$ , ela é excessivamente oscilatória. Esse fenômeno não ocorre com os dois controladores LPV, cujas respostas são muito semelhantes. Nesses casos, apesar das respostas ao salto ainda variarem com o ponto de operação, elas se aproximam de forma mais homogênea da resposta desejada. Comparando o valor de  $J_y$  para os três controladores,

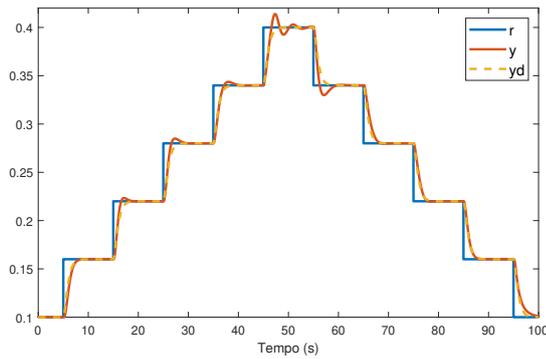


Figura 6. Resposta do sistema com o controlador projetado por meio do procedimento de interpolação.

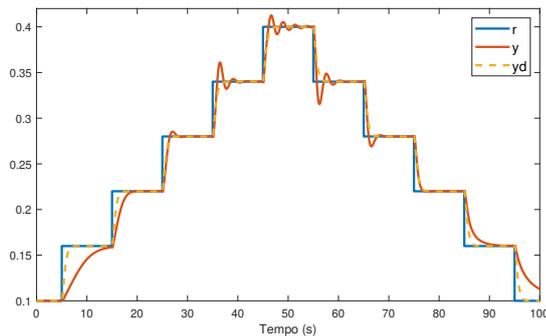


Figura 7. Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LIT.

obteve-se  $J_y = 1,17 \times 10^{-5}$  para o controlador projetado pelo método VRFT-LPV,  $J_y = 1,49 \times 10^{-5}$  para o controlador LPV projetado pelo procedimento de interpolação e  $J_y = 1,56 \times 10^{-4}$  para o controlador PID de ganhos constantes.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi apresentado o método de controle baseado em dados VRFT para projeto de controladores LPV, com aplicação a um sistema não linear. Além disso, com a estrutura de controlador LPV proposta, foi possível projetar um controlador com escalonamento de ganhos resolvendo um único problema de otimização. Esse método é baseado na formulação de um problema de otimização equivalente à identificação do controlador, o qual pode ser resolvido por um método de mínimos quadrados. O controlador projetado pelo método VRFT-LPV produziu resultados semelhantes em malha fechada ao controlador com escalonamento de ganhos projetado pela interpolação de controladores lineares obtidos para diferentes pontos de operação. Percebe-se que o projeto pelo método VRFT-LPV é mais simples, pois os parâmetros do controlador são calculados diretamente a partir de um único conjunto de dados, não sendo necessário procedimento de interpolação.

É importante enfatizar que não se pode esperar que esse método produza controladores satisfatórios para qualquer conjunto de especificações e de dados. Por exemplo, ao se realizar a coleta de dados, é fundamental garantir que o sinal utilizado como variável de escalonamento percorra toda a faixa de valores de interesse. Caso contrário, os ganhos do controlador para alguns pontos de operação

seriam calculados por uma extrapolação, o que provavelmente resultaria em desempenho deteriorado.

Neste trabalho, considerou-se o projeto de controladores LPV parametrizados por uma única variável de escalonamento. No entanto, o método proposto pode ser imediatamente generalizado para o caso multivariável. Além disso, todas as simulações foram realizadas sem adição de ruído. Isso deve ser levado em conta em trabalhos futuros em que o projeto do controlador for feito com base em dados coletados de sistemas físicos reais.

## REFERÊNCIAS

- Bazanella, A.S. e Neuhaus, T. (2014). Tuning nonlinear controllers with the virtual reference approach. In *19th IFAC World Congress*, 10269–10274. IFAC, Cape Town. doi:10.3182/20140824-6-ZA-1003.00562.
- Bazanella, A.S., Campestrini, L., e Eckhard, D. (2012). *Data-Driven Controller Design: The  $H_2$  Approach*. Springer, Netherlands.
- Bloemers, T., Tóth, R., e Oomen, T. (2019). Towards data-driven lpv controller synthesis based on frequency response functions. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 5680–5685. doi:10.1109/CDC40024.2019.9029958.
- Campi, M., Lecchini, A., e Savaresi, S.M. (2000). Virtual reference feedback tuning (vrft): a new direct approach to the design of feedback controllers. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187)*, volume 1, 623–629. IEEE.
- Formentin, S., Piga, D., Tóth, R., e Savaresi, S.M. (2016). Direct learning of lpv controllers from data. *Automatica*, 65, 98–110.
- Formentin, S., Piga, D., Tóth, R., e Savaresi, S.M. (2013). Direct data-driven control of linear parameter-varying systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 4110–4115. doi:10.1109/CDC.2013.6760519.
- Formentin, S. e Savaresi, S.M. (2011). Virtual reference feedback tuning for linear parameter-varying systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 10219–10224.
- Hjalmarsson, H., Gunnarsson, S., e Gevers, M. (1994). A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In *33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1735–1740. Lake Buena Vista - USA.
- Kaminer, I., Pascoal, A.M., Khargonekar, P.P., e Coleman, E.E. (1995). A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 31(8), 1185–1191.
- Karimi, A., Butcher, M., e Longchamp, R. (2009). Data-driven tuning of linear parameter varying precompensators. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 24. doi:10.1002/acs.1151.
- Khalil, H.K. e Grizzle, J.W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Khalil, H.K. (2001). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 3<sup>a</sup> ed edition.
- Remes, C.L., Gomes, R.B., Flores, J.V., Libano, F.B., e Campestrini, L. (2021). Virtual reference feedback tuning applied to dc–dc converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(1), 544–552. doi:10.1109/TIE.2020.2967729.
- Roffel, B. e Betlem, B. (2007). *Process dynamics and control: modeling for control and prediction*. John Wiley & Sons.