

## ***Ensembles* de sistemas de classificação fuzzy intervalares: o papel dos índices de *overlap* com tomada de decisão baseada em funções de penalidade**

Sidnei da Fonseca Pereira Jr.\* Graçaliz Pereira Dimuro<sup>\*\*,\*\*\*</sup>  
Eduardo Nunes Borges<sup>\*\*</sup> Tiago da Cruz Asmus<sup>\*\*\*</sup>  
Leonardo Ramos Emmendorfer<sup>\*\*</sup> Giancarlo Lucca<sup>\*\*</sup>  
Humberto Bustince<sup>\*\*\*</sup>

\* *Computational Modeling PhD Program, Federal University of Rio Grande, Campus Carreiros, 96201-900 Rio Grande, Brazil*  
(e-mail: sidneifpj@gmail.com)

\*\* *Center for Computational Science, Federal University of Rio Grande, Campus Carreiros, 96201-900 Rio Grande, Brazil*  
(e-mail: {eduardoborges,leonardoemmendorfer}@furg.br)

\*\*\* *Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, 31006, Pamplona, Spain*  
(e-mail: {gracaliz,tiagoasmus}@gmail.com, bustince@unavarra.es)

---

### **Abstract:**

Fuzzy modeling is frequently used to deal with the problems involving approximate reasoning, such as classification problems. However, fuzzy membership functions defined in terms of real functions sometimes can not reflect the uncertainty of the domain specialists. Also, when considering the use of fuzzy quantities, we are executing operations through sets defined by real numbers. In this case, the propagation of errors can become important and affect the end result. This problem finds its solution within the concept of interval-valued fuzzy sets. This paper presents a fuzzy reasoning mechanism to be used in interval-valued fuzzy rule based classification systems (IVFRBCSs). For that, we consider different interval-valued overlap indices, constructed using interval-valued overlap functions, developing confidence and support measures, which are generally used to evaluate the degree of certainty or interest of a given association rule. By considering several interval-valued overlap indices, we obtain an ensemble of IVFRBCS. Then penalty functions are used as a consensus method for the decision-making related to the selection of the best class.

### **Resumo:**

A modelagem *fuzzy* é frequentemente usada para lidar com problemas que envolvem raciocínio aproximado, como problemas de classificação. No entanto, funções de pertinência difusas definidas em termos de funções reais nem sempre refletem a incerteza de especialistas. Além disso, ao considerar o uso de valores *fuzzy*, estamos executando operações através de conjuntos definidos por números reais. Neste caso, a propagação de erros pode se tornar importante e afetar o resultado final. Este problema encontra sua solução dentro do conceito de conjuntos *fuzzy* intervalares. Este artigo apresenta um mecanismo de raciocínio *fuzzy* a ser usado em sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares (IVFRBCSs). Para isso, consideramos diferentes índices de *overlap* intervalares desenvolvendo medidas de confiança e suporte, que geralmente são utilizadas para avaliar o grau de certeza ou interesse de uma determinada regra de associação. Considerando vários índices de *overlap* intervalares, obtemos um conjunto de IVFRBCS. Em seguida, as funções de penalidade (*penalty*) são usadas como um método de consenso para a tomada de decisão relacionada à seleção da melhor classe.

*Keywords:* Interval-valued fuzzy sets; Interval-valued overlap functions; Penalty functions.

*Palavras-chaves:* Conjuntos *fuzzy* intervalares; Funções de *Overlap* Intervalares; Funções de *penalty*.

## 1. INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, várias abordagens foram propostas para o tratamento da incerteza em sistemas especialistas. Raciocínio aproximado (AR) (Kandel et al. (1996)) modela conceitos imprecisos descritos por pessoas. A adoção de funções de pertinência que representam o grau de adesão a um conjunto *fuzzy* é um elemento-chave nessa abordagem. Entretanto, o grau de pertinência em si pode ser difícil de ser definido precisamente por um especialista, que é necessário para expressar seu conhecimento sob a forma de números reais. Além disso, a aquisição de informações é frequentemente realizada entre vários especialistas, o que leva a diferenças entre os valores de pertinência fornecidos (Bustince (2010)). Portanto, funções intervalares têm sido adotadas como uma abordagem útil nesse contexto. O modelo considera de forma robusta as diferenças nas avaliações de tal forma que o grau de pertinência seja representado por um intervalo de valores ao invés de um único ponto.

A lógica *fuzzy* intervalar (IVFL) (Bedregal e Takahashi (2006)) combina teoria *fuzzy* com matemática intervalar, usando subintervalos de  $[0, 1]$  para representar valores verdade para proposições *fuzzy* e graus de pertinência a elementos de subconjuntos (Dimuro (2011)). Seja  $I = [0; 1]$  e  $\mathbb{I} = \{X \subseteq I : X \text{ é um intervalo fechado}\}$ . Seja  $A$  um subconjunto *fuzzy* intervalar com função de pertinência intervalar dada por  $M_A : U \rightarrow \mathbb{I}$ , com  $M_A(x) = [\mu_{A_i}(x), \mu_{A_s}(x)]$ , onde  $\mu_{A_i}, \mu_{A_s} : U \rightarrow [0; 1]$  são as funções de limite inferior e superior, respectivamente. A distância entre os limites inferior e superior do grau de pertinência intervalar de um determinado elemento pode ser entendida como uma medida da falta de certeza do especialista para fornecer um valor exato de pertinência desse elemento.

Funções de agregação também foram definidas no contexto *fuzzy* intervalar (Bedregal et al. (2017)). Em Zadeh (1978) o índice de consistência entre dois conjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$  é definido como extensão do índice de *overlap* Booleano. Generalizações de índices de consistência são definidos como índices de *overlap* (Dubois et al. (2000); Bustince et al. (2009)).

Sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* (FRBCSs) são amplamente adotados em vários domínios e aplicações. Eles fornecem modelos naturalmente explicativos e são capazes de combinar informações de várias fontes, como especialistas, modelos matemáticos ou medidas empíricas (Cordón et al. (1999)). Os principais componentes de um FRBCS são a base de conhecimento e o mecanismo de raciocínio *fuzzy* (FRM), responsável pela tarefa de classificação. Funções de agregação (Klement et al. (2000)), que combinam um conjunto de valores numéricos, são relevantes no contexto do FRM (Bustince et al. (2010); Bedregal et al. (2013)).

Sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares (IV-FRBCSs) foram introduzidos em Sanz et al.

(2011), onde a ignorância representada por conjuntos *fuzzy* intervalares é levada em conta durante todo o processo de raciocínio *fuzzy* intervalar (IV-FRM). Em Elkano et al. (2018a), foi desenvolvido um novo IV-FRM, no qual as funções de *penalty* (Bustince et al. (2016)) são usadas para penalizar uma eventual falta de consenso de várias saídas alternativas fornecidas pelas funções de agregação.

Recentemente, em Asmus et al. (2020), foram introduzidos índices de *overlap* de valor de intervalo, o que permite que o grau de confiança e suporte fossem devidamente definidos no contexto da incerteza associada à adoção de lógica *fuzzy* intervalar. Esta abordagem mostrou resultados consistentes quando aplicados em IV-FRBCSs que são definidos como em Sanz et al. (2013).

Assim, o objetivo deste artigo é desenvolver um novo IV-FRM para IV-FRBCSs, no qual leve em consideração um método de consenso para classificação utilizando funções de *penalty* e índices de sobreposição intervalares.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. A seção 2 revisa sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares. A Seção 3 apresenta o novo método. A seção 4 mostra os resultados, e a Seção 5 conclui o artigo.

## 2. SISTEMAS DE CLASSIFICAÇÃO BASEADOS EM REGRAS FUZZY INTERVALARES

Um subconjunto *fuzzy* intervalar  $A$  de um conjunto  $\mathbb{R}R$  é definido como o conjunto de pares ordenados representados em (1) (Bustince et al. (2008)).

*Definição 1.* (Sanz et al. (2013)) - Um conjunto *fuzzy* intervalar (FIS) sobre  $U \neq \emptyset$  é dado por:

$$A = \{(u, A(u)) | u \in U\} \quad (1)$$

onde

$$A(u) = [\underline{A}(u), \overline{A}(u)] \in L([0, 1]) \quad (2)$$

com

$$L([0, 1]) = \{X = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0, 1]^2 \text{ e } \underline{x} \leq \overline{x}\} \quad (3)$$

Em um dado FIS  $A$  a associação de cada elemento  $u_i \in U$  é representada por um intervalo  $A(u_i) = [\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)]$  com tamanho  $W(A(u_i)) = \overline{A}(u_i) - \underline{A}(u_i)$  conforme ilustrado pela Figura 1

Sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares adotam a incerteza no processo de raciocínio (Riid e Rüstern (2014)) por meio da implementação de regras no formato:

Regra  $R_q$ : Se  $\chi_1$  é  $A_{q1}$  e  $\dots$  e  $\chi_n$  is  $A_{qn}$  então Classe  $C'_q$  com  $Cnf_q$

onde  $R_q$  é um rótulo de regra,  $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$  é um vetor  $n$ -dimensional que representa a instância,  $A_{qi}$  é o rótulo linguístico intervalar do  $i$ -ésimo recurso associado a regra  $R_q$ ,  $C_q$  é consequente da classe e  $Cnf_q \in L([0, 1])$  é o grau de confiança intervalar da regra  $R_q$ , que é o peso da regra.

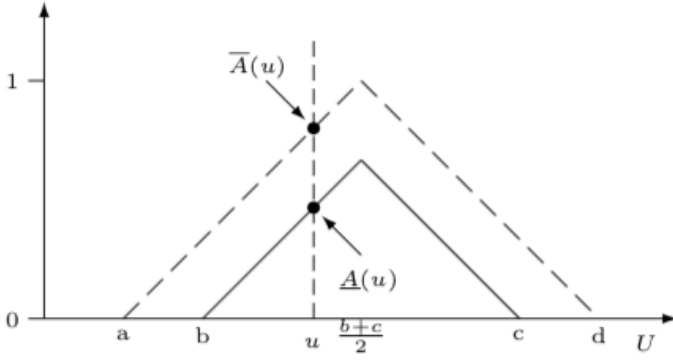


Figura 1. Conjunto *fuzzy* intervalar

### 3. UM NOVO MECANISMO DE RACIOCÍNIO FUZZY INTERVALAR

O novo mecanismo de raciocínio *fuzzy* intervalar I-FRM proposto aqui é uma forma de modificação em nosso trabalho anterior em Elkano et al. (2018b). A relação total de ordem para intervalos será adotada conforme proposto por Xu e Yager (2006). Os resultados intervalares são obtidos pela agregação intervalar dos extremos inferiores e superiores dos graus de pertinência intervalares. Portanto, o I-FRM inclui dois mecanismos distintos, que são I-FRM-I (inferior) e I-FRM-S (superior).

Seja  $w$  o número de regras na base e  $M$  o número de classes. Considere  $x_p = (x_{p1}, \dots, x_{pn})$  um novo padrão a ser classificado. Os passos do IFRM são os seguintes:

- (1) *Interval matching degree*: Representa a força da ativação das regras para cada  $x_p$ . É dado por:

$$\begin{aligned} & [A_q(x_p), \overline{A}_q(x_p)] = \\ & = IOn([A_{q1}(x_{p1}), \overline{A}_{q1}(x_{p1})], \dots, [A_{qn}(x_{pn}), \overline{A}_{qn}(x_{pn})]) \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $IOn$  é uma função de *overlap* intervalar  $n$ -dimensional.

- (2) *Interval association degree*: um operador de agregação intervalar  $h$  é aplicado ao grau de correspondência dos intervalos previamente calculados e também ao peso das regras:

$$\begin{aligned} & [b_q^k, \overline{b}_q^k] = h([A_q(x_p), \overline{A}_q(x_p)], [Cnf_q^k, \overline{Cnf}_q^k]) \\ & \quad k = 1, \dots, M, q = 1, \dots, w; \end{aligned} \quad (5)$$

A expressão resultante é:

$$[Cnf_q, \overline{Cnf}_q] = \frac{\sum_{x_p \in Class C_q} [A_q(x_p), \overline{A}_q(x_p)]}{\sum_{p=1}^P [A_q(x_p), \overline{A}_q(x_p)]} \quad (6)$$

onde para cada regra  $q$  existe um  $p$  tal que  $A_q(x_p) > 0$ .

- (3) *Interval pattern classification soundness degree for all classes*: é o grau de consistência de todas as classes, onde o grau de associação de cada classe é agregado utilizando uma função intervalar:

$$[Y_k, \overline{Y}_k] = f\left(\left[b_q^k, \overline{b}_q^k\right], q = 1, \dots, w \text{ e } b_q^k > 0\right) \quad (7)$$

$$k = 1, \dots, M;$$

- (4) *Classification*. Uma função de decisão  $F$  é aplicada sobre o resultado do cálculo do grau de consistência para todas as classes:

$$F([Y_1, \overline{Y}_1], \dots, [Y_M, \overline{Y}_M]) = \arg \max_k ([Y_k, \overline{Y}_k]), \quad k = 1, \dots, M. \quad (8)$$

$$\text{onde se adota } \max_k ([Y_k, \overline{Y}_k]) = [\max_{k=1, \dots, M} Y_k, \max_{k=1, \dots, M} \overline{Y}_k].$$

#### 3.1 Calculando o grau de confiança intervalar para índices de sobreposição de valor de intervalo

Inicialmente, revisaremos o conceito de índices de *overlap* intervalares conforme Asmus et al. (2020).

#### Algoritmo 1

**Entrada:** Um conjunto de regras  $R_j$ , com  $j \in \{1, \dots, p\}$ , e um conjunto de exemplos  $\chi_l$ , com  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

**Saída:** As medidas de Confiança ( $[Cnf(R_j), \overline{Cnf}(R_j)]$ ) e Suporte ( $[Supp(R_j), \overline{Supp}(R_j)]$ ), para cada regra  $R_j$ , com  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

- 1: Selecionar uma função *overlap* intervalar  $IO_n$  e um índice de *overlap* intervalar  $\mathcal{IO}$ ;
- 2: Buscar os exemplos  $\chi_l = (\chi_{l1}, \dots, \chi_{ln})$ , e as respectivas  $C_l$  classes que pertencem, com  $l = \{1, \dots, m\}$ ;
- 3: **for**  $q = 1$  to  $p$  **do**
- 4: Selecionar o  $s \leq m$  exemplos que nos dizem que o objeto considerado pertence à classe  $C_q$  associada à regra  $R_q$ ;
- 5: **for**  $j = 1$  to  $s$  **do**
- 6: Calcular (Grau de pertinência intervalar)

$$c_j([\underline{\chi}_j, \overline{\chi}_j]) = IO_n([A_{q1}(\chi_{j1}), \overline{A}_{q1}(\chi_{j1})], \dots, [A_{qn}(\chi_{jn}), \overline{A}_{qn}(\chi_{jn})]);$$

- 7: **end for**
- 8: Construir o conjunto *fuzzy* intervalar em  $U$

$$C_{qs} = \{(u_1, [c_1(\chi_1), \overline{c}_1(\chi_1)]), \dots, (u_s, [c_s(\chi_s), \overline{c}_s(\chi_s)]), (u_{s+1}, 0), \dots, (u_m, 0)\};$$

- 9: **for**  $l = 1$  to  $m$  **do**
- 10: Calcular

$$c_l([\underline{\chi}_l, \overline{\chi}_l]) = IO_n([A_{q1}(\chi_{l1}), \overline{A}_{q1}(\chi_{l1})], \dots, [A_{qn}(\chi_{ln}), \overline{A}_{qn}(\chi_{ln})]);$$

- 11: **end for**
- 12: Construir o conjunto *fuzzy* em  $U$

$$C_{qm} = \{(u_1, [c_1(\chi_1), \overline{c}_1(\chi_1)]), \dots, (u_m, [c_m(\chi_m), \overline{c}_m(\chi_m)])\};$$

- 13: Calcular

$$[Cnf(R_q), \overline{Cnf}(R_q)] = \frac{\mathcal{IO}(C_{qs}, U)}{\mathcal{IO}(C_{qm}, U)};$$

- 14: Calcular

$$[Supp(R_q), \overline{Supp}(R_q)] = \mathcal{IO}(C_{qs}, U);$$

- 15: **end for**

**Definição 2.** (Asmus et al. (2020)) Dado  $\leq$  uma ordem admissível sobre  $L([0, 1])$ , um índice de *overlap* intervalar é uma função  $\mathcal{IO} : CFI(U) \times CFI(U) \rightarrow L([0, 1])$  que, para cada  $A, B, C \in CFI(U)$ , as seguintes condições valem:

- (IO1)  $\mathcal{IO}(A, B) = [0, 0]$  se e somente se  $A$  e  $B$  tem suportes disjuntos, o que significa que  $u \in U, A(u)B(u) = [0, 0]$  vale;
- (IO2)  $\mathcal{IO}(A, B) = \mathcal{IO}(B, A)$ ;
- (IO3) Se  $B \leq C$ , então  $\mathcal{IO}(A, B) \leq \mathcal{IO}(A, C)$ .

#### 4. RESULTADOS

Para calcular o grau de confiança  $Cnf_q$  de uma regra  $R_q$  pode-se adotar confiança e suporte tal como em (6). A confiança de uma associação pode ser medida pela co-ocorrência do atributo em t-uplas. Considere  $p$  regras  $\{R_1, \dots, R_p\}$  como a seguir:

Regra  $R_1$ : Se  $\chi_1$  é  $[\underline{A_{11}}, \overline{A_{11}}]$  e  $\dots$  e  $\chi_n$  é  $[\underline{A_{1n}}, \overline{A_{1n}}]$  então Classe  $C'_1$  com  $[\underline{Cnf_{f1}}, \overline{Cnf_{f1}}] = ?$

...

Regra  $R_p$ : Se  $\chi_1$  é  $[\underline{A_{p1}}, \overline{A_{p1}}]$  e  $\dots$  e  $\chi_n$  é  $[\underline{A_{pn}}, \overline{A_{pn}}]$  então Classe  $C'_p$  com  $[\underline{Cnf_{fp}}, \overline{Cnf_{fp}}] = ?$

e considere um conjunto com  $m$  instâncias  $\chi_l$  com  $l = 1, \dots, m$ .

O algoritmo (1) calcula medidas de confiança e suporte intervalares usando índices de *overlap* intervalares. Trata-se de uma generalização do algoritmo proposto em Elkano et al. (2018b).

#### 3.2 Um método de consenso para classificação usando funções *penalty*

Um aspecto fundamental do mecanismo de raciocínio de um sistema de classificação baseado em regras *fuzzy* intervalares é a função de agregação selecionada. Se, para um determinado sistema de classificação, o algoritmo for executado várias vezes, com diversas funções de agregação, resultados diversos serão dados como a saída, que constitui um conjunto de classificadores *fuzzy* intervalares. Propomos que a forma de saída das agregações  $M$  seja realizada utilizando-se o ponto médio do intervalo.

Resta então definir um sistema de consenso que selecione a classe final resultante. Utilizaremos um método de tomada de decisão proposto em Bustince et al. (2014) o qual adota funções *penalty*  $P_{\nabla}$  na fase de exploração.

Denotaremos por  $C^*$  uma cadeia de elementos em  $[0, 1]$ . Considere um produto cartesiano  $\mathcal{L}_m^* = \underbrace{C^* \times \dots \times C^*}_m$ .

Denotaremos  $B_{y_q}$  como sendo o conjunto *fuzzy* em  $U$  tal que todos os valores de associação são iguais para  $y_q \in [0, 1]$ , com  $B_{y_q}(u) = y_q \in [0, 1]$ , para todo  $u \in U$ . Considere  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $\mathbf{B}_Y = (B_{y_1}, \dots, B_{y_m}) \in CF(U)^m$ .

*theorem 1.* (Elkano et al. (2018b)) Sejam  $K_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $i = 1, \dots, n$ , funções semi-contínuas e semi-convexas com único mínimo em  $K_i(0) = 0$ , e seja  $\mathcal{D} : CF(U) \times CF(U) \rightarrow \mathbb{R}^+$  a distância entre conjuntos *fuzzy*, para todo  $X, Y \in CF(U)$ , definida como

$$\mathcal{D}(A, B) = \sum_{i=1}^n |A(u_i) - B(u_i)|, \quad (9)$$

onde  $n = \text{card}(U)$ . Portanto  $P_{\nabla} : CF(U)^m \times \mathcal{L}_m^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dado, para cada  $\mathbf{A} \in CF(U)^m$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathcal{L}_m^*$ , por:

$$\begin{aligned} P_{\nabla}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) &= \sum_{q=1}^m K_q(\mathcal{D}(A_q, B_{y_q})) = \\ &= \sum_{q=1}^m K_q \left( \sum_{p=1}^n |A_q(u_p) - y_q| \right) \end{aligned} \quad (10)$$

é uma função *penalty* definida sobre o produto cartesiano de reticulados  $\mathcal{L}_m^{*(n+1)}$ .

Esta seção descreve os resultados da aplicação do método proposto quando aplicado a um problema sintético de classificação. O cenário considerado consiste em:

- (1) Três classes  $C_1, C_2$  e  $C_3$ ;
- (2) Duas variáveis *fuzzy* (atributos):  $\chi_1 =$ , índice de massa corporal (MBI) e  $\chi_2 =$ , idade. Os valores que as variáveis podem assumir são dados pelos rótulos linguísticos Baixo, Médio e Alto representados na Figura 2;
- (3) 25 exemplos ou padrões, mostrados na Tabela 1. Além disso, a Figura 3 mostra os exemplos usados para aprender as regras *fuzzy* e o novo exemplo a ser classificado assim que as regras forem aprendidas. Para o processo de aprendizagem pode-se observar que temos quatro exemplos de classe 1 (símbolo "+"), dez exemplos de classe 2 (círculos) e onze exemplos de classe 3 (triângulos);
- (4) 5 regras que foram aprendidas (R1-R5 na Fig. 3) a partir dos dados na Tabela 1:

Regra  $R_1$ : Se  $\chi_1$  é Médio e  $\chi_2$  é Baixo então Classe  $C_1$  com  $CF_1$

Regra  $R_2$ : Se  $\chi_1$  é Médio e  $\chi_2$  é Médio então Classe  $C_2$  com  $CF_2$

Regra  $R_3$ : Se  $\chi_1$  é Médio e  $\chi_2$  é Alto então Classe  $C_2$  com  $CF_3$

Regra  $R_4$ : Se  $\chi_1$  é Alto e  $\chi_2$  é Médio então Classe  $C_3$  com  $CF_4$

Regra  $R_5$ : Se  $\chi_1$  é Alto e  $\chi_2$  é Alto então Classe  $C_3$  com  $CF_5$

Tabela 1. Conjunto de dados sintéticos usados para treinamento do sistema de classificação

Id Exemplo	$\chi_1 = \text{BMI}$	$\chi_2 = \text{Idade}$	Classe
1	28	32	1
2	34	32	1
3	33	35	1
4	29	37	1
5	34	38	2
6	30	47	2
7	33	48	2
8	31	52	2
9	29	55	3
10	34	55	3
11	30	63	2
12	33	62	3
13	29	64	2
14	32	62	3
15	30	68	2
16	36	48	2
17	39	49	3
18	36	50	2
19	37	55	3
20	41	57	3
21	38	63	2
22	37	65	3
23	41	64	3
24	39	68	3
25	36	69	3

A seguir, calculamos o grau de confiança intervalar  $[\underline{Cnf_q}, \overline{Cnf_q}]$  para cada regra ( $q = 1, \dots, 5$ ).

A inferência também é avaliada. Pretendemos determinar à qual classe pertence o seguinte registro:

BMI = 33 and Age = 61

Este novo exemplo está representado como uma estrela na Figura 3. Os passos a seguir são executados:

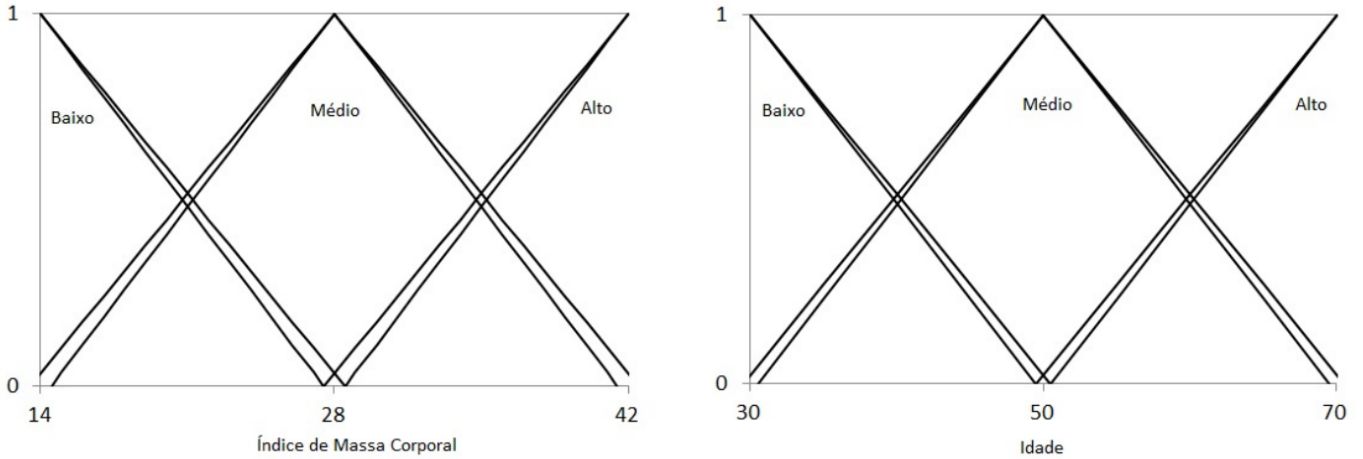


Figura 2. Termos linguísticos para as variáveis presentes no conjunto sintético dado na Tabela 1

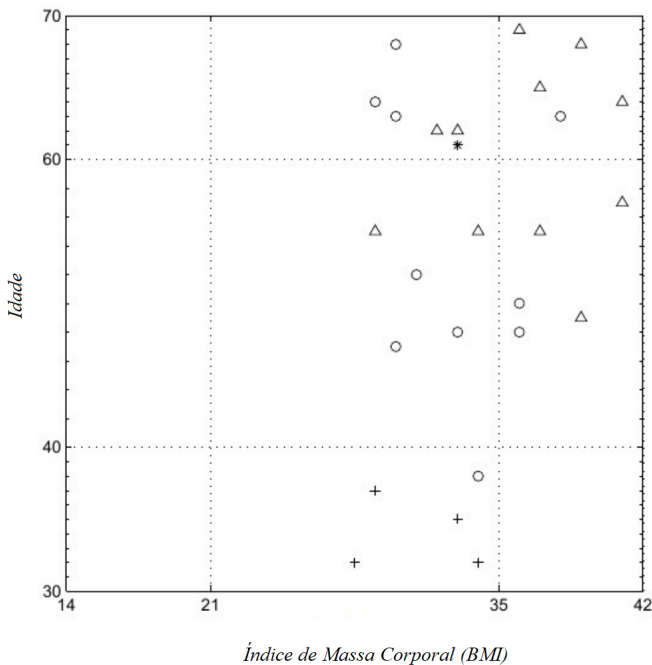


Figura 3. Conjunto de dados sintéticos mostrados na Tabela 1.

(1) Os conjuntos  $A'_1$  and  $A'_2$  são calculados:

$$A'_1 = \{(14, 0), (15, 0), \dots, (32, 0), (33, 1), (34, 0), \dots, (42, 0)\}$$

$$A'_2 = \{(30, 0), (31, 0), \dots, (60, 0), (61, 1), (62, 0), \dots, (70, 0)\}$$

(2) A pertinência intervalar relativa ao valor da variável MBI aos conjuntos Baixo, Médio e Alto são calculados:

$$\text{Baixo}(33) = [0.000, 0.000]; \text{Médio}(33) = [0.630, 0.655] \\ \text{and Alto}(33) = [0.333, 0.379]$$

(3) A pertinência intervalar relativa ao valor da variável Idade também é obtido:

$$\text{Baixo}(61) = [0.000, 0.000]; \text{Médio}(61) = [0.436, 0.463] \\ \text{and Alto}(61) = [0.538, 0.561].$$

Os resultados intervalares correspondentes são mostrados na Tabela 2. As funções *penalty* são dadas na tabela (11) e as tuplas obtidas após permutações com repetição de  $(M_1, M_2, M_3)$  para os pontos médios dos intervalos.

$$P_{\nabla}(C_1, \dots, C_M, (m_{\sigma(1)}^{C_1}, \dots, m_{\sigma(M)}^{C_M})) = \\ \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1, \dots, r; L=1, \dots, S} |K_{C_i}^{fn_{jO_L}} - m_{\sigma(i)}^{C_i}| \right)^2 \quad (11)$$

Obtêm-se então ( $\mathbb{K}^{C_1} = 0, \mathbb{K}^{C_2} = 0.1297, \mathbb{K}^{C_3} = 0.1974$ ). Analisando a primeira coluna da Tabela 2 deduzimos que o consequente (fato) que estamos considerando neste exemplo pertence a  $C_2$ . No entanto, a partir da análise das outras colunas (exceto a quarta), deduzimos que o fato pertence à classe  $C_3$  ( $C = \arg \max \mathbb{K}^C$ ).

Nesta avaliação simples os dados são decompostos em dois conjuntos, como mostrado nas Tabelas 3 e 4. Se analisarmos os dados por colunas, então veremos que cada coluna corresponde aos dados obtidos com o algoritmo de classificação usando somente uma medida, ou seja, fixando um grau de confiança intervalar para as regras e escolhendo o conjunto de overlap intervalar com uma única sobreposição. De nossa perspectiva, devemos entender as Tabelas 3 e 4 por linhas, pois nos conjuntos de classificação (ensembles) sempre existem diferentes tipos de interações entre consequentes (fatos) e antecedentes, e devemos levar em conta todos deles.

Por ser necessário processar diversas funções de medidas, pode haver divergência nos resultados classificados e nestes casos um MRF-I que possua um método de tratamento da ignorância inicial e que leve em consideração diversas medidas fuzzy intervalares para tratar o conjunto das relações entre antecedentes e consequentes e, posteriormente, através da aplicação de uma função de consenso final, trazer novamente a saída para uma classe específica, pode trazer uma melhor interpretação do sistema e resultado de decisão.

Tabela 2. Resultados intervalares calculados

Classe	$IO_x$	$IO_{rational}$	$IO_{\downarrow}$	$IO_{rational}$
C1	$K_{CnIfo_x}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$
C2	$K_{CnIfo_x}^{C2} = \sqrt{(0.1402, 0.1572, 0.2007)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.2097, 0.2793, 0.3311)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C2} = \sqrt{(0.2077, 0.3408, 0.2699, 0.3311)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.2097, 0.2793, 0.3311)}$
C3	$K_{CnIfo_x}^{C3} = \sqrt{(0.0716, 0.1112, 0.1334, 0.1915)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.1878, 0.2653, 0.3148, 0.4152)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C3} = \sqrt{(0.1878, 0.2653, 0.3148, 0.4152)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.1878, 0.2653, 0.3148, 0.4152)}$

Tabela 3. Limite inferior calculado do intervalo

Classe	$O_x$	$O_{rational}$	$O_{\downarrow}$	$O_{rational}$	$M = \max$	$C = \arg \max \mathbb{K}^C$
C1	$K_{CnIfo_x}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$	$\mathbb{K}^{C1} = 0$	$C = 0$
C2	$K_{CnIfo_x}^{C2} = \sqrt{(0.1402, 0.1572, 0.2007)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.2097, 0.2793, 0.3311)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C2} = \sqrt{(0.2677, 0.2699)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.2097, 0.2130)}$	$\mathbb{K}^{C2} = 0.2699$	$C = 0.2699$
C3	$K_{CnIfo_x}^{C3} = \sqrt{(0.0716, 0.1334)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.1878, 0.3148)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C3} = \sqrt{(0.1878, 0.3148)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.1474, 0.2456)}$	$\mathbb{K}^{C3} = 0.3148$	$C = C_3$

Tabela 4. Limite superior calculado do intervalo

Classe	$O_x$	$O_{rational}$	$O_{\downarrow}$	$O_{rational}$	$M = \max$	$C = \arg \max \mathbb{K}^C$
C1	$K_{CnIfo_x}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C1} = 0$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C1} = 0$	$\mathbb{K}^{C1} = 0$	$C = 0$
C2	$K_{CnIfo_x}^{C2} = \sqrt{(0.1878, 0.2007)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.3408, 0.3311)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C2} = \sqrt{(0.3408, 0.3311)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C2} = \sqrt{(0.2793, 0.2726)}$	$\mathbb{K}^{C2} = 0.3408$	$C = 0.3408$
C3	$K_{CnIfo_x}^{C3} = \sqrt{(0.1112, 0.1915)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.2653, 0.4152)}$	$K_{CnIfo_{\downarrow}}^{C3} = \sqrt{(0.2653, 0.4152)}$	$K_{CnIfo_{rational}}^{C3} = \sqrt{(0.2201, 0.3429)}$	$\mathbb{K}^{C3} = 0.4152$	$C = C_3$

5. CONCLUSÃO

A literatura recente sobre conjuntos *fuzzy* intervalares mostrou que é uma linguagem apropriada para descrever incertezas e a ignorância na definição de termos *fuzzy*. Neste artigo, analisamos o comportamento do sistema de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares que amplia o trabalho em Elkano et al. (2018b), usando uma base de conhecimento simples. O sistema de classificação mantém o método de aprendizagem e gerencia as incertezas derivadas de uma margem arbitrária de erro.

Este artigo propôs uma solução para problemas relacionados à ignorância na aquisição de dados, ou à imprecisão inerente aos valores, que são utilizados para apoiar um processo de tomada de decisão. Descrevemos um novo mecanismo de raciocínio *fuzzy* baseado em intervalo usando índices sobrepostos de vários valores de intervalo e funções de agregação.

Na avaliação ilustramos que a metodologia é adequada, para o problema de classificação considerado. Como resultados teóricos, enumeramos os seguintes: definição 2, equações (1), (5), (6), (7), e (8).

Como trabalhos futuros podemos validar se o comportamento se mantém em outros tipos de conjuntos de dados, com maiores números de classes e regras, incluir novas medidas *fuzzy* e o uso de funções de (pré)-agregação em sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy* intervalares.

REFERÊNCIAS

Asmus, T.C., Dimuro, G.P., Bedregal, B., Sanz, J.A., Pereira Jr, S., e Bustince, H. (2020). General interval-valued overlap functions and interval-valued overlap indices. *Information Sciences*, 527, 27–50.

Bedregal, B.C., Dimuro, G.P., Bustince, H., e Barrenechea, E. (2013). New results on overlap and grouping functions. *Information Sciences*, 249, 148–170.

Bedregal, B.C. e Takahashi, A. (2006). The best interval representation of t-norms and automorphisms. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(24), 3220–3230.

Bedregal, B., Bustince, H., Palmeira, E., Dimuro, G., e Fernandez, J. (2017). Generalized interval-valued OWA operators with interval weights derived from interval-valued overlap functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 90, 1 – 16. doi:https://doi.org/10.1016/j.ijar.2017.07.001.

Bustince, H., Barrenechea, E., Calvo, T., James, S., e Beliakov, G. (2014). Consensus in multi-expert decision making problems using penalty functions defined over a cartesian product of lattices. *Information Fusion*, 17, 56 – 64. Special Issue: Information fusion in consensus and decision making.

Bustince, H., Fernández, J., Mesiar, R., Montero, J., e Orduna, R. (2009). Overlap index, overlap functions and migrativity. In *Proceedings of IFSA/EUSFLAT Conference*, 300–305.

Bustince, H., Fernandez, J., Mesiar, R., Montero, J., e Orduna, R. (2010). Overlap functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3-4), 1488–1499.

- Bustince, H. (2010). Interval-valued fuzzy sets in soft computing. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(2), 215–222.
- Bustince, H., Barrenechea, E., and Pagola, M. (2008). Generation of interval-valued fuzzy e Atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from  $\kappa\alpha$  operators: Laws for conjunctions and disjunctions, amplitude. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(6), 680–714.
- Bustince, H., Beliakov, G., Dimuro, G.P., Bedregal, B., e Mesiar, R. (2016). On the definition of penalty functions in data aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2016.09.011>.
- Cordón, O., del Jesus, M.J., e Herrera, F. (1999). A proposal on reasoning methods in fuzzy rule-based classification systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 20(1), 21 – 45.
- Dimuro, G.P. (2011). On interval fuzzy numbers. In *2011 Workshop-School on Theoretical Computer Science, WEIT 2011*, 3–8. IEEE, Los Alamitos. doi:10.1109/WEIT.2011.19.
- Dubois, D., Ostasiewicz, W., e Prade, H. (2000). Fuzzy sets: History and basic notions. In D. Dubois and H. Prade (eds.), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, 21–124. Kluwer, Boston.
- Elkano, M., Galar, M., Sanz, J.A., Schiavo, P.F., Pereira, S., Dimuro, G.P., Borges, E.N., e Bustince, H. (2018a). Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems. *Applied Soft Computing*, 67, 728 – 740. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.05.050>.
- Elkano, M., Galar, M., Sanz, J.A., Schiavo, P.F., Pereira, S., Dimuro, G.P., Borges, E.N., e Bustince, H. (2018b). Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems. *Applied Soft Computing*, 67, 728 – 740. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.05.050>.
- Kandel, A., Pacheco, R., Martins, A., e Khator, S. (1996). The foundations of rule-based computations in fuzzy models. In *Fuzzy Modelling*, 231–263. Springer.
- Klement, E.P., Mesiar, R., e Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- Riid, A. e Rüstern, E. (2014). Adaptability, interpretability and rule weights in fuzzy rule-based systems. *Information Sciences*, 257, 301 – 312. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.12.048>.
- Sanz, J., Fernández, A., Bustince, H., e Herrera, F. (2011). A genetic tuning to improve the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval-valued fuzzy sets: Degree of ignorance and lateral position *International Journal of Approximate Reasoning*, 52(6), 751–766.
- Sanz, J., Fernández, A., Bustince, H., e Herrera, F. (2013). IVTURS: A linguistic fuzzy rule-based classification system based on a new interval-valued fuzzy reasoning method with tuning and rule selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(3), 399–411.
- Xu, Z. e Yager, R.R. (2006). Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 35(4), 417–433. doi: 10.1080/03081070600574353.
- Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 3 – 28.