

# Integração de Modelo *Fuzzy* TSK em um Controlador Preditivo com Região Viável Estendida

Victor S. Matos\* Thiago P. das Chagas\*\* Márcio A.F. Martins\*

\* Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica (PPGM), Universidade Federal da Bahia, BA, (e-mail: {victorsm, marciomartins}@ufba.br).

\*\* Laboratório de Mecatrônica, Universidade Estadual de Santa Cruz, BA, (e-mail: tpchagas@uesc.br)

---

**Abstract:** This work presents the first approach of infinite horizon predictive controller (IHMPC) based on a fuzzy model with guarantee of feasibility for application in non-linear systems. This technique is based on the fuzzy Takagi-Sugeno-Kang structure to model a nonlinear system as a linear parameter varying (LPV), updated at each time step. This approach allows the use of linear MPC techniques, instead of computationally extensive nonlinear MPC topologies. Simulations, including mismatch scenarios and unmeasured disturbances were implemented, validating the proposed controller.

**Resumo:** Este trabalho apresenta a primeira abordagem de controlador preditivo de horizonte infinito (IHMPC) baseado em modelo *fuzzy* com garantia de factibilidade para aplicação em sistemas não lineares. Essa técnica se baseia na estrutura *fuzzy* Takagi-Sugeno-Kang para modelar um sistema não linear como um modelo linear de parâmetros variáveis (LPV), atualizado-o a cada período de amostragem e permitindo a utilização de técnicas de MPC lineares, ao invés das topologias de MPC não lineares computacionalmente extensas. Através da simulação de uma planta teste, cenários de *mismatch* e distúrbios não medidos foram implementados, validando o controlador proposto.

**Keywords:** Fuzzy Model Predictive Control (FMPC); Infinite-Horizon Model Predictive Control (IHMPC); Feasibility; Non-linear.

**Palavras-chaves:** Controle preditivo *fuzzy*; Controle preditivo de horizonte infinito; Factibilidade; Não linear.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O controlador preditivo baseado em modelo (MPC) constitui um conjunto de técnicas de controle avançado altamente consolidadas e se destaca pela sua eficiência e otimalidade (Camacho and Bordons, 2007). Contudo, a principal limitação destas técnicas é a dependência de modelos representativos da planta a ser controlada, que em sua maioria têm dinâmicas não lineares e variantes no tempo.

O custo e esforço para desenvolvimento dos modelos e as limitações de implementação de técnicas de MPC não lineares induzem à busca por alternativas. Dentre elas, destaca-se o uso de estruturas capazes de representar os sistemas não lineares de forma simplificada para utilização com abordagens de MPC lineares, os quais são computacionalmente mais leves (Marusak, 2020). Os sistemas de inferência *fuzzy*, considerados aproximadores universais, são capazes de representar sistemas não lineares de forma simplificada através de regras associadas à lógica difusa (Wang, 1997). A utilização da estrutura *fuzzy* como modelo do sistema para aplicação do controlador MPC é conhecida como FMPC (do inglês *Fuzzy Model Predictive Control*), sendo que uma das vertentes utiliza técnicas

consolidadas de MPC linear para o controle de sistemas altamente não lineares.

Em Nakamori et al. (1993) foi proposto um dos primeiros algoritmos FMPC e observaram as dificuldades de sintonia devido à atualização do modelo. Muitos dos trabalhos originados se basearam na topologia Takagi-Sugeno-Kang (TSK), com submodelos na forma de autorregressores (Nakamori et al., 1993), de convolução (Lima et al., 2009), ou na forma de espaço de estados (EE) (Xia et al., 2010; Mendes, 2008; Hou et al., 2020). Este último se destaca por agregar as vantagens dessa representação, em especial, para sistemas multivariáveis.

A topologia TSK como modelo de predição na abordagem FMPC permite aproximar um sistema não linear com duas perspectivas: a global, atuando como um sistema linear de parâmetros variáveis (LPV), que utiliza apenas um controlador; ou a local, atuando como um conjunto de modelos lineares locais, cada um com um controlador associado (conhecido como *parallel-distributed compensation*) (Babuška, 1998). A primeira perspectiva apresenta menor custo computacional (Mendes, 2008) e tende a convergir mais rapidamente para a referência (Xia et al., 2010).

O FMPC já foi utilizado em aplicações que abrangem processos de polimerização (Lima et al., 2009), tratamento de efluentes (Li et al., 2020), turbinas a gás (Hou et al., 2020) e até na dosagem de medicamentos (Vafamand et al., 2021). Esse uso em sistemas tão distintos indica a ampla capacidade de controle dos algoritmos FMPC, permitindo associá-los a sistemas com dinâmicas de alta complexidade. Além de que, o modelo *fuzzy* pode ser obtido através de dados coletados da planta, com base no conhecimento especialista (Abonyi, 2003), ou de forma híbrida, flexibilizando a identificação do modelo e favorecendo sua qualidade.

Este artigo busca utilizar a topologia TSK com submodelos na forma EE e abordagem LPV, para utilização de apenas um controlador, visando desenvolver uma técnica de FMPC computacionalmente leve, que pode, futuramente, ser implementada em sistemas embarcados. Porém, como levantado em Nakamori et al. (1993), a sintonia do MPC para modelos *fuzzy* pode ser um problema. Assim, escolheu-se utilizar o algoritmo IHMPC originado em Odloak (2004), que tem como característica as garantias de estabilidade nominal e factibilidade do problema de otimização. Estas levam a uma importante consequência, a simplificação do processo de sintonia do controlador, como observado em uma versão adaptativa (Santana et al., 2021). Além disso essa técnica mantém a forma de programação quadrática, o que viabiliza a sua solução em sistemas embarcados, como verificado em Santana (2020).

A garantia de factibilidade desse controlador assegura a solução do problema de otimização em todos instantes através do uso de variáveis de folga, que estendem a região viável do controlador e suavizam as restrições terminais utilizadas (Odloak, 2004). Desta forma, a principal contribuição desse trabalho é a integração da modelagem TSK a uma estratégia de MPC de região viável estendida, até então inexplorado na literatura.

O artigo está organizado como segue. Na Seção 2, apresenta-se breve introdução sobre o modelo *fuzzy* e o controlador FMPC proposto baseado no IHMPC. Na Seção 3, apresentam-se os resultados e discussão acerca da identificação de um sistema simulado e a implementação simulada do controlador proposto. As conclusões e trabalhos futuros são apresentados na Seção 4.

## 2. MPC DE REGIÃO VIÁVEL ESTENDIDA BASEADO EM MODELO FUZZY TSK

### 2.1 Identificação de modelo Fuzzy TSK

Os sistemas de inferência *fuzzy* (do inglês *Fuzzy Inference System* - FIS) são baseados na lógica difusa e têm a capacidade de representar de forma interpretável, com base na linguagem e lógica humanas, o conhecimento sobre determinado sistema (Wang, 1997). O FIS é considerado um aproximador universal de funções, para o número de regras irrestrito (Jang et al., 1997) e sua estrutura básica é composta pela base de regras, que contém as regras na forma SE-ENTÃO; pelo banco de dados, que contém as funções de pertinência caracterizadoras dos conjuntos *fuzzy* associados às variáveis; e pelo mecanismo de raciocínio, que aplica o procedimento de inferência (Jang et al., 1997).

Uma regra  $R_i$  em um FIS com estrutura TSK pode utilizar como consequente modelos em espaço de estado (EE) (Mendes, 2008) e assumir a forma

$$R_i : \text{SE } z_1(k) \text{ é } Z_{i,1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(k) \text{ é } Z_{i,q} \\ \text{ENTÃO } \hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k), \quad (1)$$

em que, no antecedente (SE) da regra acontece a interação das entradas  $z_j(k)$  com os respectivos conjuntos *fuzzy*  $Z_{i,j}$ , representados por funções de pertinências. No consequente (ENTÃO) é apresentado o submodelo  $i$  na forma EE, onde  $\hat{\mathbf{x}}_i$  é o vetor de estados estimado,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transição de estados,  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  é a matriz de entradas,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

A estrutura *fuzzy* agrega cada regra  $R_i$  e resulta em

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \sum_{i=1}^p \bar{w}_i(\mathbf{z}(k)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \bar{w}_i(\mathbf{z}(k)) \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) \\ = \bar{\mathbf{A}}(k) \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}(k) \mathbf{u}(k), \quad (2)$$

em que  $\mathbf{z}(k) = [z_1(k), \dots, z_q(k)] = [\mathbf{x}(k)^T \quad \mathbf{u}(k)^T]^T$ ,  $p$  é o número de regras,  $\bar{w}_i$  é o peso normalizado calculado no antecedente de cada regra. O modelo resultante (2) tem a forma de modelo linear de parâmetros variáveis (LPV), sendo que  $\bar{\mathbf{A}}(k)$  e  $\bar{\mathbf{B}}(k)$  são as matrizes atualizadas pela topologia TSK.

Para desenvolver o modelo TSK é preciso determinar os parâmetros e a estrutura que melhor aproximem a dinâmica do sistema a ser identificado. Para determinação do modelo com base em dados, o primeiro passo para a identificação de um sistema não linear é a excitação desse sistema com um sinal rico em espectro de frequência e em variação de amplitude, de forma que todos os modos do sistema sejam excitados. O segundo passo para a identificação *fuzzy* TSK é a definição dos antecedentes, que pode ser realizada através do particionamento em grade (*grid partitioning*) ou por métodos de clusterização (Babuška, 1998), que agrupam os dados com base em métricas e definem, por exemplo, os centros  $c_{i,j}$  e os desvios-padrão  $\sigma_{i,j}$  de cada função de pertinência  $\mu_{i,j}(z_j)$  que representa o conjunto *fuzzy*  $Z_{i,j}$ , se esta for na forma gaussiana. Salienta-se que a utilização dessa abordagem possibilita a redução do número de regras sem perda de desempenho em comparação ao método de grade, simplificando o modelo e evitando a chamada “maldição da dimensionalidade” (Abonyi, 2003).

Por fim, é preciso determinar os parâmetros dos submodelos que compõem a estrutura TSK. Segundo Karaboga and Kaya (2019), há um amplo conjunto de técnicas para a determinação de tais parâmetros, sendo que a técnica de mínimos quadrados (MQ) se destaca por sua simplicidade e robustez na determinação dos submodelos lineares (Babuška, 1998; Jang et al., 1997; Abonyi, 2003). Dado que as matrizes  $A_i$  e  $B_i$  podem apresentar dimensão extensa em função das características do sistema a ser modelado, o uso da técnica dos mínimos quadrados é indicado pela sua simplicidade.

Os parâmetros de todos os submodelos podem ser obtidos da minimização

$$\min_{\Phi} J = (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(\Phi))^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(\Phi)), \quad (3)$$

tal que  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(k+1) \dots \mathbf{x}(k+M)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{X}}(\Phi) = [\hat{\mathbf{x}}(k+1) \dots \hat{\mathbf{x}}(k+M)]^T$ ,  $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_p]^T$  e  $\phi_i = [\mathbf{A}_i \ \mathbf{B}_i]^T$ .

A solução para o problema de mínimos quadrados tem a seguinte forma e pode ser resolvida pelo conceito da pseudo-inversa

$$\Phi = (\mathbf{z}_w^T \mathbf{z}_w)^{-1} \mathbf{z}_w^T \mathbf{X}, \quad (4)$$

em que  $\mathbf{z}_w = [\mathbf{z}_w(k)^T \dots \mathbf{z}_w(k+M-1)^T]^T$ ,  $\mathbf{z}_w(k) = \mathbf{z}(k) [\bar{w}_i(k) \mathbf{I}_{n+m}, \dots, w_p(k) \mathbf{I}_{n+n_u}]$ , sendo  $\mathbf{I}_{n+n_u}$  matriz identidade de dimensão  $(m+n_u) \times (m+n_u)$  e  $\bar{w}_i$  é obtido pela fuzzificação dos dados.

Por essa estratégia, pode-se identificar o modelo TSK com base nos dados extraídos do sistema, resultando na aproximação LPV do sistema não linear.

## 2.2 MPC de horizonte infinito com garantia de factibilidade

A família de controladores originada em Odloak (2004) tem a forma MPC de horizonte infinito com característica nominalmente estabilizante e garantia de factibilidade do problema de otimização, através do uso de variáveis de folga para estender sua região viável. Baseiam-se no modelo OPOM (*Output Prediction Oriented Model*) (5) para sistemas estáveis, originado da resposta ao degrau do sistema e escrito na forma EE incremental das entradas (presença de ação integral).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k+1) \\ \mathbf{x}^{st}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{st} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^{st} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}(k), \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \Psi^{st} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \end{bmatrix}$$

Sendo que  $\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^{ny}$  são estados artificiais integradores, criados pela forma incremental das entradas.  $\mathbf{x}^{st} \in \mathbb{C}^{n_{st}}$  correspondem aos modos estáveis do sistema,  $\Delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nu}$  a variação da entrada e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny}$  a saída.  $\mathbf{F}^{st}$  está relacionada aos polos do sistema,  $\mathbf{B}^s$  e  $\mathbf{B}^{st}$  correspondem aos coeficientes da expansão em frações parciais. Para mais detalhes, ver Odloak (2004).

O problema de otimização do IHMPC tem a seguinte forma:

*Problema 1.*

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{y,k}} V_k \\ V_k &= \sum_{j=0}^{h_c} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \\ & \sum_{j=0}^{h_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\mathbf{x}^{st}(k+h_c|k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\delta_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2, \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}^s(k+h_c|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{u}(k+j|k) \in \mathbb{U}, \quad j = 0, \dots, h_c - 1 \quad (7)$$

$$\mathbb{U} = \begin{cases} -\Delta \mathbf{u}_{\max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}(k+j|k) = \mathbf{0}, & j \geq h_c \\ \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \end{cases}$$

em que  $h_c$  é o horizonte de controle,  $\mathbf{Q}_y \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$  é a matriz de ponderação das variáveis controladas (CV);  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$  a matriz que pondera as variações das variáveis manipuladas (MV);  $\mathbf{y}(k+j|k)$  é o vetor de predição das CVs no instante  $k+j$  calculado no instante  $k$ ;  $\mathbf{y}_{sp,k}$  é o vetor de referência;  $\Delta \mathbf{u}(k+j|k)$  é o incremento das variáveis manipuladas (MV);  $\Delta \mathbf{u}_k = [\Delta \mathbf{u}(k|k) \dots \Delta \mathbf{u}(k+h_c-1|k)]^T$  é a solução do *Problema 1* no instante  $k$ ;  $\delta_{y,k} \in \mathbb{R}^{ny}$  é a variável de folga (*slack*), utilizada para garantir a factibilidade do problema de otimização.  $\mathbf{S}_y \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$  é a matriz que pondera a atuação das variáveis de folga de forma que estas sejam levadas a zero ou minimizadas.  $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{\max}$  são as restrições das MV e seu incremento.

Uma vez que o modelo de predição (5) tem modos integradores, é necessário o uso de restrições terminais (6) para garantir que o custo seja limitado. A função custo do IHMPC tem uma parcela de custo terminal, ponderada pela matriz de pesos terminais  $\bar{\mathbf{Q}}$ , calculada pela equação de Lyapunov do sistema (8).

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\mathbf{F}^{st} \Psi^{st})^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{F}^{st} \Psi^{st} + (\mathbf{F}^{st})^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^{st} \quad (8)$$

## 2.3 FMPC com garantia de factibilidade

Apresenta-se aqui a técnica batizada de FIHMPC (do inglês *Fuzzy Infinite Horizon Model Predictive Control*), que integra o modelo *fuzzy* LPV ao IHMPC, originando uma abordagem de MPC computacionalmente leve e segura. Essa integração entre o modelo TSK e o IHMPC acontece segundo Algoritmo 1, em que o modelo TSK é executado, atualizando as matrizes do sistema, que originam as funções de transferência correspondentes para a extração da resposta ao degrau no modelo OPOM. Como consequência,  $\bar{\mathbf{Q}}$  também é atualizada, assim como os parâmetros do controlador, através da resolução do *Problema 1* por programação quadrática. Devido ao *mismatch* intrínseco entre a planta não linear e o modelo de predição na forma OPOM, que originam variáveis de estado virtuais associadas aos estados integradores  $\mathbf{x}^s(k)$ , se faz necessário utilizar um estimador de estados em conjunto com o controlador, no qual seu modelo interno também é atualizado pelo TSK a cada instante de amostragem da planta.

### Algoritmo 1. FIHMPC

Para  $k = 1, \dots, k_{final}$

$\bar{\mathbf{A}}(k), \bar{\mathbf{B}}(k), \bar{\mathbf{C}}(k) \leftarrow \text{TSK LPV}(\mathbf{z}(k))$

$\mathbf{G} \leftarrow \text{Laplace}(\bar{\mathbf{A}}(k), \bar{\mathbf{B}}(k), \bar{\mathbf{C}}(k))$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \leftarrow \text{OPOM}(\mathbf{G})$

$\bar{\mathbf{Q}} \leftarrow \text{Equação Lyapunov}(\mathbf{F}^{st}, \Psi^{st}, \mathbf{Q}_y)$

⋮

$\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{y,k} \leftarrow \text{Programação Quadrática}$

$\mathbf{y}(k+1) \leftarrow \text{Planta}(\mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k))$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) \leftarrow \text{Estimador de Estados}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{y}(k+1))$

### Fim

Essa abordagem é capaz de manter a garantia de factibilidade do IHMPC, contudo, provoca a perda da característica estabilizante, uma vez que a atualização do modelo não garante a condição de viabilidade recursiva, conforme definido em Odloak (2004).

### 3. RESULTADOS

A planta escolhida para validação da técnica de controle proposta é um tanque cônico, caracterizado como um sistema do tipo SISO (*single-input sigle-output*) com dinâmica não linear significativa que permite avaliar a capacidade de representação da abordagem *fuzzy* como modelo e o desempenho do controlador.

A dinâmica do tanque é modelada pela seguinte relação

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\pi \tan^2 \alpha h(t)} \left[ Q_{in}(t) - k_{out} \sqrt{h(t)} \right], \quad (9)$$

em que  $h(t)$  é o nível de fluido no tanque, com limites  $h \in [0; 0,4]$  m.  $Q_{in}(t)$  é a vazão de entrada do tanque, limitada em  $Q_{in} \in [0; 1,8]$  m<sup>3</sup>/h e  $\Delta Q_{in,max} = 0,036$  m<sup>3</sup>/h. A constante de vazão de saída do tanque  $k_{out} = 6 \times 10^{-4}$  e a inclinação do cone  $\alpha = 20^\circ$ , com um período amostragem de  $T_s = 1$  s.

#### 3.1 Identificação do modelo TSK

Através de simulação em ambiente *Matlab*<sup>®</sup>, o sinal de excitação da Figura 1 foi projetado para diferentes pontos de operação da planta com adição de ruído de distribuição gaussiana  $\mathcal{N}(0; 2 \times 10^{-6})$ . Após aplicado, levou à resposta da planta com presença de ruído de distribuição gaussiana  $\mathcal{N}(0; 2 \times 10^{-3})$  conforme Figura 2. Esse conjunto de dados foi particionado para treino (de 0 a 420 min) e validação (de 420 a 600 min) do modelo.

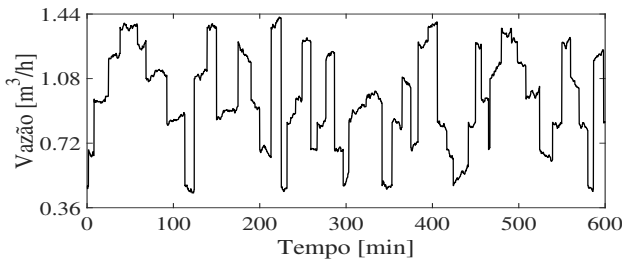


Figura 1. Sinal de entrada aplicado para excitar dinâmica não linear da planta.

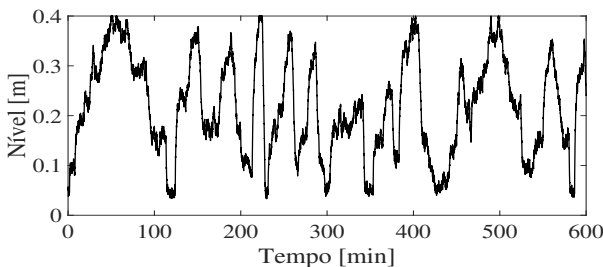


Figura 2. Resposta da planta ao sinal de excitação.

Aplicou-se as etapas de identificação indicadas na Seção 2.1 para os dados de treino. O algoritmo de clusterização escolhido foi Gustafson-Kessel modificado por Babuška et al. (2002), uma melhoria do método original, ao considerar agrupamentos na forma elipsoidal através do cálculo adaptativo da distância (Babuška, 1998). Com base em testes realizados, optou-se por utilizar  $p = 6$  regras *fuzzy*, permitindo aproximação suficiente para a dinâmica da planta, evitando sobre ajuste e alta complexidade para

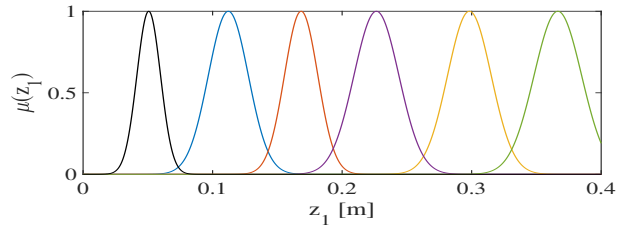


Figura 3. Funções de pertinência da saída  $z_1(t) = h(t)$ : clusters 1 (azul), 2 (vermelho), 3 (amarelo), 4 (roxo), 5 (verde) e 6 (preto).

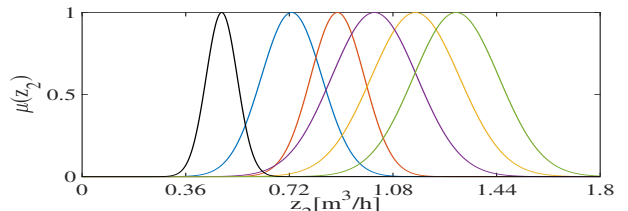


Figura 4. Funções de pertinência da entrada  $z_2(t) = Q_{in}(t)$ : clusters 1 (azul), 2 (vermelho), 3 (amarelo), 4 (roxo), 5 (verde) e 6 (preto).

o modelo. O modelo TSK obtido tem as funções de pertinência gaussianas para saída  $z_1(t) = h(t)$  e entrada  $z_2(t) = Q_{in}(t)$  mostradas nas Figuras 3 e 4.

Os submodelos obtidos da aplicação do MQ para cada regra *fuzzy* foram  $\mathbf{A}_1 = 0,9677$ ,  $\mathbf{B}_1 = 18,0867$ ;  $\mathbf{A}_2 = 0,9805$ ,  $\mathbf{B}_2 = 13,3082$ ;  $\mathbf{A}_3 = 0,9928$ ,  $\mathbf{B}_3 = 6,6929$ ;  $\mathbf{A}_4 = 0,9869$ ,  $\mathbf{B}_4 = 10,4277$ ;  $\mathbf{A}_5 = 0,9943$ ,  $\mathbf{B}_5 = 5,7547$ ;  $\mathbf{A}_6 = 0,9306$ ,  $\mathbf{B}_6 = 26,0610$ . Analisando as matrizes  $A_i$  identificadas, fica claro que os submodelos associados são estáveis em malha aberta em virtude dos seus valores pertencerem ao raio unitário, não implicando que a estabilidade global do modelo LPV seja garantida. Se necessário, pode-se adotar a formulação OPOM para sistemas instáveis apresentada em Martins and Odloak (2016).

A identificação do modelo TSK com base em clusterização e MQ resultou no erro quadrático médio de estimação para um passo a frente de  $RMSE_t = 2,015 \times 10^{-3}$ , equivalente a 2 mm em sentido físico da variável  $h(t)$ . Contudo, ao atuar como modelo de predição, considera-se que o modelo ficará estático a cada período de amostragem e, para analisar de forma mais próxima essa condição, validou-se o modelo por simulação livre, conforme a Figura 5. Verifica-se um erro  $RMSE_v = 1,6730 \times 10^{-2}$ , equivalente a 2 cm em sentido físico da variável  $h(t)$ , indicando uma aproximação mediana sobre a dinâmica do tanque e criando uma situação de *mismatch* útil para teste do controlador FIHMPC.

#### 3.2 Caso Mismatch

A atualização do modelo LPV a cada instante de amostragem agrega *mismatch* intrínseco entre planta e modelo em função do caráter de aproximação do FIS. Neste contexto, aplicou-se o FIHMPC para o modelo obtido na Seção 3.1, conforme Algoritmo 1. A sintonia dos parâmetros após alguns testes levou a  $h_c = 4$ ,  $\mathbf{Q}_y = 1$ ,  $\mathbf{R} = 1$  e  $\mathbf{S}_y = 1 \times 10^5$ . As restrições de controle adotadas correspondem às restrições já indicadas da planta. A resposta do controlador

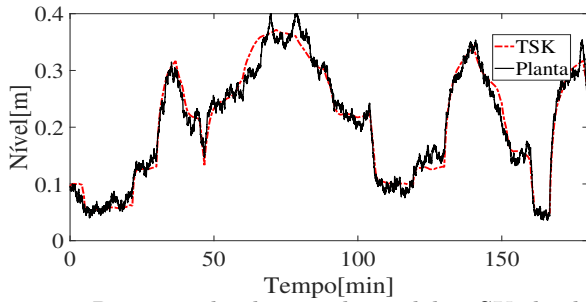


Figura 5. Resposta da planta e do modelo TSK obtido para os dados de validação.

pode ser observada na Figura 6, o esforço de controle gerado na Figura 7, a função custo na Figura 8 e a variável de folga na Figura 9.

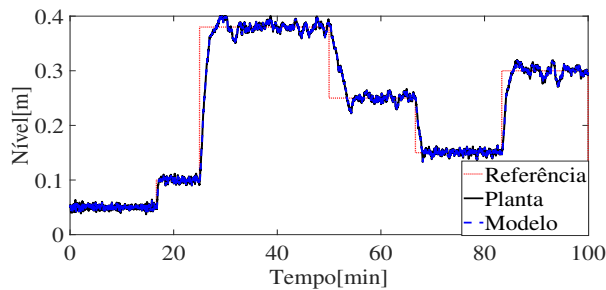


Figura 6. Variável controlada do caso *mismatch*.

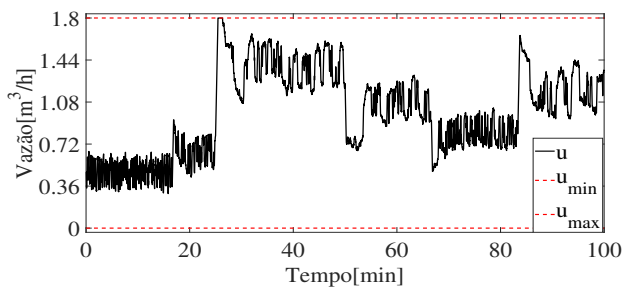


Figura 7. Variável manipulada do caso *mismatch*.

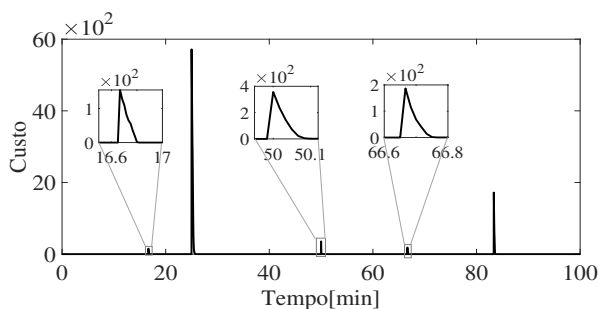


Figura 8. Função custo do caso *mismatch*.

A partir da análise da Figura 6, o controlador apresentou bom desempenho em situação de discrepância entre planta e modelo, atingindo os *setpoints* especificados. Além disso, o modelo TSK foi capaz de representar a dinâmica da planta e atuar como modelo de previsão do controlador. O esforço de controle na Figura 7 também se manteve dentro das restrições impostas e indica que o controlador foi capaz de absorver a variabilidade da planta não linear.

Analisando o comportamento da função custo do controlador, Figura 8, é possível observar que nessa aplicação houve convergência para zero após as perturbações. Essa

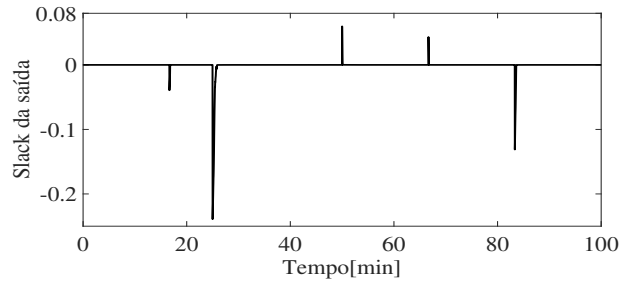


Figura 9. Variável de folga caso *mismatch*.

característica indica similaridade com função de Lyapunov, a segunda condição necessária para a garantia de estabilidade, contudo a condição de viabilidade recursiva da solução herdada não é válida, como apresentado na Seção 2.3. A variável de folga, Figura 9 exerce sua função conforme esperado, produzindo soluções factíveis ao relaxar o problema de otimização nos instantes de maior *mismatch*.

### 3.3 Aplicação de distúrbios não medidos

Nessa etapa, foram realizados quatro testes com a aplicação de distúrbios na planta. A aplicação se deu na seguinte ordem:

- (a)  $D_u = -0,72 \text{ m}^3/\text{h}$  - distúrbio tipo pulso na entrada  $u(t)$  com duração de 100 s, aplicado em  $t = 20 \text{ min}$ ;
- (b)  $D_y = -0,05 \text{ m}$  - distúrbio pulso na saída  $y(t)$  com duração de 100 s, aplicado em  $t = 33,33 \text{ min}$ ;
- (c)  $D_y = -0,06 \text{ m}$  - distúrbio persistente na saída  $y(t)$ , aplicado em  $t = 60 \text{ min}$ ;
- (d)  $D_u = +0,72 \text{ m}^3/\text{h}$  - distúrbio persistente na entrada  $u(t)$ , aplicado em  $t = 75 \text{ min}$ ;

Nas Figuras 10 e 11, mostra-se, respectivamente, a saída da planta com distúrbio  $y(t) + Dy(t)$  e a resposta do controlador  $u(t)$ .

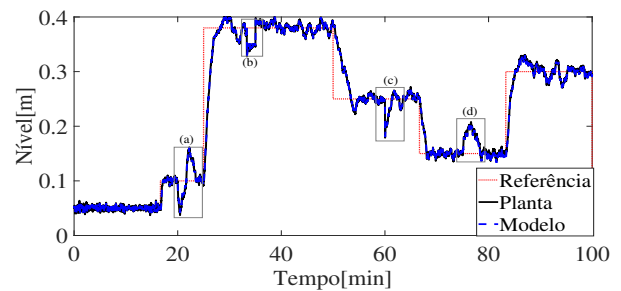


Figura 10. Resposta da planta sobre a ação dos distúrbios.

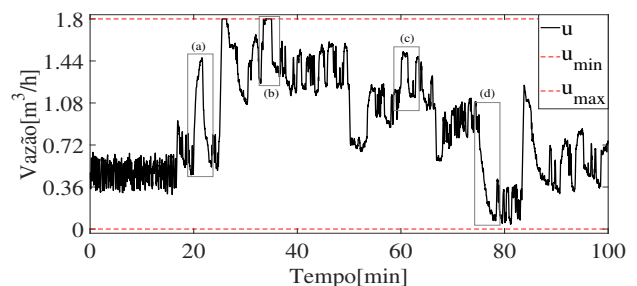


Figura 11. Resposta do controlador sobre a ação dos distúrbios.

O distúrbio momentâneo não medido aplicado na entrada da planta diminuiu a CV na Figura 10(a) e o controlador aumentou a MV para absorver seu efeito, Figura 11(a). O fim do pulso após 100 s atuou como um distúrbio decorrente no sentido contrário, e novamente o controlador atuou, diminuindo a MV, indicando a característica de compensação com o retorno ao *setpoint* e respeito as restrições do problema. O segundo distúrbio, também de caráter momentâneo, foi aplicado na saída da planta 10(b) e tem resposta similar do controlador, contudo a saturação da MV conforme Figura 11(b) limitou sua compensação. O terceiro distúrbio aplicado, de caráter persistente, também foi introduzido na saída da planta, Figura 10(c), e o controlador respondeu com aumento da MV e permanência em patamar levemente superior, Figura 11(c), a fim de compensar sua presença contínua. Uma vez que o distúrbio na saída da planta é capturado pelo modelo de predição, a planta atua mais rapidamente sobre os distúrbios na saída. Por fim, com a aplicação do quarto distúrbio, ainda na presença do terceiro, o controlador diminuiu notavelmente o patamar de  $u(t)$  compensando seu efeito, Figura 11(d). Observa-se na Figura 10 que após introdução do último distúrbio, houve uma distinção mais notável entre a dinâmica da planta e do modelo de predição, compensada pela ação integral da abordagem de controle.

O FIHMPC é capaz de responder aos ruídos aplicados enquanto se mantém nos limites das restrições do problema e da dinâmica, como esperado para uma topologia de controle MPC e confirmando que a proposta FIHMPC é robusta perante interferências externas à planta.

#### 4. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta a primeira versão de FMPC associada a família de controladores nominalmente estáveis e com região viável estendida, resultando em duas importantes características para aplicação embarcada: a garantia de factibilidade do problema de otimização, com o uso das variáveis de folga; e o custo computacional reduzido em comparação com técnicas de MPC não lineares - o modelo *fuzzy* LPV permitiu a aplicação de técnica de MPC linear para vários pontos de operação do sistema não linear e manteve a resolução do problema de otimização na forma de programação quadrática.

O FIHMPC apresentou desempenho adequado, sendo capaz de respeitar as restrições, atingir as referências empregadas, compensar os distúrbios impostos e garantir o controle por toda a faixa do sistema não linear.

As etapas futuras deste trabalho incluem investigações sobre a estabilidade global do modelo *fuzzy* e a viabilidade recursiva do problema. Além disso, a validação do FIHMPC em ambiente embarcado, para aplicação direta em processos industriais.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela ANP-FINEP no escopo do PRH 35.1-ANP.

#### REFERÊNCIAS

Abonyi, J. (2003). *Fuzzy Model Identification for Control*. Birkhäuser Boston, Boston, MA.

- Babuška, R., Van Der Veen, P.J., and Kaymak, U. (2002). Improved covariance estimation for Gustafson-Kessel clustering. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2(usually 1), 1081–1085.
- Babuška, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*, volume 12 of *International Series in Intelligent Technologies*. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Camacho, E.F. and Bordons, C. (2007). *Model Predictive control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, London, 2 edition.
- Hou, G., Gong, L., Huang, C., and Zhang, J. (2020). Fuzzy modeling and fast model predictive control of gas turbine system. *Energy*, 200, 117465.
- Jang, J., Sun, C., and Mizutani, E. (1997). *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Pearson Education.
- Karaboga, D. and Kaya, E. (2019). Adaptive network based fuzzy inference system (ANFIS) training approaches: a comprehensive survey. *Artificial Intelligence Review*, 52(4), 2263–2293.
- Li, M., Hu, S., Xia, J., Wang, J., Song, X., and Shen, H. (2020). Dissolved Oxygen Model Predictive Control for Activated Sludge Process Model Based on the Fuzzy C-means Cluster Algorithm. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 18(9), 2435–2444.
- Lima, N.M., Manenti, F., Maciel Filho, R., Embiruçu, M., and Wolf Maciel, M.R. (2009). Fuzzy model-based predictive hybrid control of polymerization processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 48(18), 8542–8550.
- Martins, M.A. and Odloak, D. (2016). A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica*, 67, 132–143.
- Marusak, P.M. (2020). Numerically efficient fuzzy MPC algorithm with advanced generation of prediction-Application to a chemical reactor. *Algorithms*, 13(6).
- Mendes, T.P.G. (2008). *Controle preditivo neuro-fuzzy: análise comparativa empregando diferentes estruturas de modelo*. Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Nakamori, Y., Suzuki, K., and Yamanaka, T. (1993). *Model Predictive Control Using Fuzzy Dynamic Models*, 497–506. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Odloak, D. (2004). Extended robust model predictive control. *AIChE Journal*, 50(8), 1824–1836.
- Santana, B.A., Fontes, R.M., Schnitman, L., and Martins, M.A. (2021). An Adaptive Infinite Horizon Model Predictive Control Strategy Applied to an ESP-lifted Oil Well System. In *11th IFAC SYMPOSIUM on Advanced Control of Chemical Processes*. IFAC.
- Santana, B.A. (2020). *Controle Preditivo com Garantia de Estabilidade e Factibilidade em Sistemas Embarcados*. Master's thesis, Universidade Federal da Bahia.
- Vafamand, A., Fatehi, A., and Olliaee, S.M.E. (2021). A fuzzy generalized predictive controller to optimal drug dosage therapy of mathematical modeling of HIV. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 1–17.
- Wang, L.X. (1997). *A course in fuzzy systems and control*, volume 2. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ.
- Xia, Yang, Shi, and Fu (2010). Constrained Infinite-Horizon Model Predictive Control for Fuzzy Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2), 429–436.