

PROJETO DE UM OBSERVADOR DE ESTADOS PARA SISTEMAS LINEARES AMOSTRADOS ATRAVÉS DE CONDIÇÕES LMI

HENRIQUE W. R. PEREIRA*, GABRIELA W. GABRIEL*, ANDRÉ M. DE OLIVEIRA†

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica, IEE, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil*

†*Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia, São José dos Campos, SP, Brasil*

Emails: henriquewrpereira@gmail.com, ggabriel@ita.br, andre.marcorin@unifesp.br

Abstract— This paper presents the Luenberger’s state observer design problem applied to continuous-time systems whose measured output is sampled in time. To solve this problem, a continuous-time structure for the state observer is considered in the context of the minimization of a performance index which leads to the evaluation of the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm. The hybrid approach together with a two-point boundary value problem is the main key to obtain sufficient convex conditions expressed through LMIs (Linear Matrix Inequalities) for the observer design problem. Finally, a numerical example is presented to illustrate the results.

Keywords— Hybrid systems, Sampled-data systems, LMI, Luenberger observer

Resumo— Este artigo apresenta o problema de projeto de um observador de estados de Luenberger aplicado a sistemas contínuos cuja saída medida é amostrada no tempo. Para resolver este problema, é considerada uma estrutura a tempo contínuo para o observador de estados no contexto da minimização de um índice de desempenho que leva ao cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A abordagem híbrida em conjunto com um problema de duas condições de contorno é a chave principal para obtermos condições convexas suficientes expressas através de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) para o problema de projeto do observador. Finalmente, um exemplo numérico é apresentado para ilustrar os resultados.

Palavras-chave— Sistemas híbridos, Sistemas amostrados, LMI, Observador de Luenberger

1 Introdução

No contexto dos sistemas amostrados, o uso de sistemas híbridos (Goebel et al., 2009) tem se mostrado eficiente e com relativa simplicidade matemática para o tratamento de problemas de otimização baseados em normas, como é o caso das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Na literatura, alguns trabalhos têm explorado este aspecto, principalmente no que se refere ao projeto de controladores por realimentação de estados. Neste sentido, a referência Souza, Vital and Geromel (2014) apresenta o projeto de controladores ótimos para sistemas híbridos nos contextos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , cujos resultados são obtidos através de LMIs. Resultado similar, adaptado para os sistemas lineares com saltos markovianos, é apresentado em Gabriel (2016). Em Gonçalves et al. (2019), é apresentada a resolução de problemas baseados em DLMIs (*Differential Linear Matrix Inequalities*), resultantes da otimização de sistemas híbridos nos contextos da minimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ através de LMIs. Em Gabriel and Geromel (2018) e Gabriel and Geromel (2021), são apresentadas extensões deste problema no contexto de sistemas não lineares e de controle baseado na norma \mathcal{H}_2 .

Os trabalhos acima mencionados tratam de controle por realimentação de estados, e por consequência, pressupõem que os estados podem ser perfeitamente medidos, uma hipótese que nem sempre é satisfeita. Este fato torna evidente a importância de trabalhos como o de Geromel et al. (2019), no qual o controle ótimo de sistemas amos-

trados é analisado sob a perspectiva da realimentação dinâmica de saída escrita na forma de equação a diferenças. Nesta última referência, a abordagem híbrida evidencia a referida simplicidade matemática no tratamento de problemas de controle ótimo. Neste contexto, os autores utilizam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada como critérios de desempenho para os projetos, considerando que a lei de controle é amostrada. Sua aplicação, de fato, tem relevância ímpar no contexto de controle digital.

É importante observar que controladores analógicos são ainda preferidos em certas plantas críticas, dado que não são facilmente reconfiguráveis e que, por este motivo, garantem certa robustez ao sistema (Hewitson, 2010). Por outro lado, seja para fins de monitoramento, ou para que a realimentação de estados possa ser aplicada na prática, é necessário o acesso a todos os estados do sistema. Como dito anteriormente, esses nem sempre podem ser facilmente medidos; sua medição pode ser muito custosa; ou os estados nem mesmo representam variáveis físicas. Devido a isto, faz-se necessário o estudo e projeto de dispositivos que possam fornecer estimações dos estados não medidos, tais como observadores e/ou filtros. Além disso, em um contexto de monitoramento, o uso de observadores se mostra útil para prognóstico e detecção de falhas, como apresentado em Morais (2006), que o utiliza no contexto de falhas apresentadas em um braço robótico.

Ainda no âmbito dos observadores a tempo contínuo escritos na forma de sistemas híbridos,

em Souza, Fioravanti and Geromel (2014), é apresentado o projeto de um filtro sub-ótimo que minimiza a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação através de condições LMIs. Sob a óptica da discretização do sistema dinâmico e do sistema do observador, em Lee et al. (2003) é apresentado o projeto de um observador de estados baseado na norma \mathcal{H}_∞ através de condições LMIs suficientes, em que nenhuma amostragem é considerada no sinal do observador, apenas no sinal de controle. Em Pertew et al. (2006) a norma \mathcal{H}_∞ é otimizada considerando uma abordagem em que o sinal medido do sistema é amostrado, utilizando para isso uma modificação da técnica de *lifting* aplicada ao sistema e ao observador. Em nenhum dos trabalhos anteriores são considerados ruídos contínuos e discretos como em Geromel et al. (2019). Além disso, nos dois últimos trabalhos, a discretização do sistema original implica na necessidade de manipular a exponencial da matriz dinâmica do sistema no cálculo da norma. Por outro lado, de acordo com o conhecimento dos autores, não há na literatura atual resultados para o projeto de observadores de estado baseados na otimização da norma \mathcal{H}_∞ segundo uma descrição de *sistemas híbridos* e com condições convexas baseadas em LMIs.

Dessa forma, enumeramos abaixo as contribuições deste artigo:

- Novas condições para o projeto de observadores de estado de sistemas amostrados, através de condições convexas escritas na forma de DLMI que estabilizam o erro de estimação e garantem limitantes superiores para a norma \mathcal{H}_∞ do erro através da *abordagem híbrida*, considerando também a presença de *perturbações contínuas e discretas*, como em Geromel et al. (2019).
- A apresentação de um *framework* unificado que permite obter condições de projeto de observadores de estados baseados na norma \mathcal{H}_2 do erro à partir da formulação do problema \mathcal{H}_∞ .

Para isso, o desafio é reescrever o conjunto sistema-observador através de uma formulação híbrida de forma a obter, através de transformações simples, condições convexas que possam ser facilmente resolvidas pelos softwares dedicados à resolução de LMIs. Ao final, um exemplo numérico é apresentado para ilustrar os resultados.

Notação: M' é o transposto de um vetor ou matriz real M e $\text{tr}(M)$ corresponde ao traço da matriz quadrada M . Para uma matriz quadrada simétrica M , $M > 0$ ($M \geq 0$) indica que M é (semi-)definida positiva e \bullet indica cada um dos seus blocos simétricos. O símbolo $\text{He}(N)$ corresponde à soma simétrica $N + N'$. Para um sinal w_c contínuo no tempo, $\|w_c\|_2^2 = \int_0^\infty w_c' w_c dt$ e \mathcal{L}_2 representa o conjunto dos sinais contínuos tais que

$\|w_c\|_2^2 < \infty$. Da mesma forma, para w_d discreto no tempo, $\|w_d\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty w_d' w_d$ e ℓ_2 representa o conjunto dos sinais discretos tais que $\|w_d\|_2^2 < \infty$. Um sinal discreto w_d calculado em t_k é representado por $w_d[k]$, enquanto que um sinal w_c contínuo calculado em t_k é representado por $w_c(t_k)$. \mathbb{N} , \mathbb{R} e \mathbb{R}_+ são respectivamente os conjuntos dos números naturais, dos números reais e dos números reais não negativos.

2 Discussão Preliminar

Seja o sistema LIT (Linear e Invariante no Tempo) representado no espaço de estados por

$$\mathcal{S} := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + E_c w_c(t) \\ y(t) = C_y x(t) \end{cases} \quad (1)$$

evoluindo em $t \in \mathbb{R}_+$ a partir de um estado inicial $x(0^-) = x_0$. Para este sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w_c(t) \in \mathbb{R}^c$ é a entrada exógena contínua no tempo e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa sua saída medida. As matrizes do modelo possuem dimensões compatíveis.

Desejamos projetar um observador de Luenberger com representação no espaço de estados dada por

$$\mathcal{O} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L\varepsilon(t) \\ \hat{y}(t) = C_y \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

onde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do observador e $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, a sua saída. O observador evolui no tempo $t \in \mathbb{R}_+$ a partir de uma condição inicial nula $\hat{x}(0^-) = \hat{x}_0 = 0$. O sinal de $\varepsilon(t) = \varepsilon(t_k)$, para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, é o sinal constante por partes que alimenta a dinâmica do observador com informações do sistema. Como de costume, este sinal é expresso através do erro entre as saídas medidas do observador e do sistema e sobre ele incide uma perturbação discreta $w_d[k] \in \mathbb{R}^r$. Assim,

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t_k) - y(t_k) + E_d w_d[k - 1] \quad (3)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e todo $k \in \mathbb{N}$, com $w_d[-1] = 0$. A sequência de instantes de amostragem $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $t_{k+1} - t_k = T > 0$, com $t_0 = 0$, e, portanto, $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Definimos a variável de erro de estimação

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (4)$$

com dinâmica descrita por

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + L\varepsilon(t) - E_c w_c(t) \quad (5)$$

evoluindo a partir de $e(0^-) = e_0$. O sinal $L\varepsilon(t)$ carrega os saltos que ocorrem no sistema devido ao processo de amostragem. Como o usual nos problemas de observação de estados, definimos a saída estimada $z(t) = C_z(\hat{x}(t) - x(t))$. Reescrevendo o sistema acima como função da variável

estendida $\xi(t) = [e(t)' \ \varepsilon(t)'L']'$ e na forma de um sistema híbrido equivalente, temos

$$\mathcal{H} := \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F\xi(t) + J_c w_c(t) \\ \xi(t_k^+) = H\xi(t_k^-) + J_d w_d[k-1] \\ z(t) = G_z \xi(t) \end{cases} \quad (6)$$

válido para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, evoluindo a partir das condições iniciais dadas. As matrizes de \mathcal{H} são

$$F = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_c = \begin{bmatrix} -E_c \\ 0 \end{bmatrix}, \\ G_z = \begin{bmatrix} C_z' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ LC_y & 0 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0 \\ LE_d \end{bmatrix} \quad (7)$$

Considerando a discussão apresentada em Geromel et al. (2019), o cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ pode ser resolvido de forma unificada através do problema definido como

$$\rho_\gamma(\xi(0)) = \sup_{w_c \in \mathcal{L}_2, w_d \in \ell_2} \|z\|_2^2 - \gamma^2 \left(\|w_c\|_2^2 + \|w_d\|_2^2 \right) \quad (8)$$

para condição inicial x_0 e γ^2 dados. De fato, para condição inicial nula, $x_0 = 0$, o problema de otimização \mathcal{H}_∞ pode ser obtido pela minimização de γ^2 com $\rho_\gamma(0) \leq 0$. Por outro lado, a escolha de $\gamma^2 = +\infty$ impõe, em (8), que $w_c \equiv 0$ e $w_d \equiv 0$, e portanto $\rho_\infty(\xi(0)) = \|z\|_2^2$. De forma equivalente, de acordo com Colaneri et al. (1997), aplicando-se entradas impulsivas correspondendo a condições iniciais em cada um dos $r_c + r_d$ canais de w_c e w_d , o cômputo de $\sum_{j=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\xi_j(0))$ fornece a norma \mathcal{H}_2 de (6).

É interessante notar que para o sistema híbrido \mathcal{H} , o valor exato de $\rho_\gamma(\xi(0))$, pode ser calculado utilizando o resultado em Geromel et al. (2019), sumarizado no próximo Teorema.

Teorema 1 *Dados $T \in \mathbb{R}_+$, $\gamma^2 \in \mathbb{R}_+$ e condições iniciais $\xi(0)$ dados, o sistema híbrido (6) é assintoticamente estável e a função $\rho_\gamma(\xi(0))$ de (8) possui limitante superior definido por*

$$\rho_\gamma(\xi(0)) \leq \xi(0)' P(0) \xi(0) \quad (9)$$

se e somente se existirem matrizes $P(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$ tal que $\gamma^2 I > J_d' P(0) J_d$, que satisfaçam a DLMI

$$\begin{bmatrix} \dot{P} + F'P + PF + G_z' G_z & \bullet \\ J_c' P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (10)$$

sujeita à condição de contorno

$$P(T) \geq H' (P(0)^{-1} - \gamma^{-2} J_d J_d')^{-1} H \quad (11)$$

Prova: A prova deste Teorema encontra-se em Geromel et al. (2019). \square

É importante notar que o método para a obtenção da solução da DLMI (10) é idêntico ao apresentado em Gonçalves et al. (2019), podendo, para isso, ser utilizada qualquer ferramenta de resolução de LMI disponível na literatura. Ainda de Geromel et al. (2019), a solução de (10) pode ser escrita na forma

$$P(t_k) \geq e^{F'T} P(t_{k+1}^-) e^{FT} \quad (12) \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F'(\tau-t_k)} G_z' G_z e^{F(\tau-t_k)} d\tau \\ + \gamma^{-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F'(\tau-t_k)} P(\tau) J_c J_c' P(\tau) e^{F(\tau-t_k)} d\tau$$

o que evidencia, em vista de (11), o fato de o estado estimado convergir para o estado real de (1) sempre que $He^{F'T}$ for Schur estável.

No contexto do cálculo de norma de (6) para um ganho conhecido do observador L , o problema acima definido é convexo e de fácil solução. A partir do Teorema 1, o problema (8) pode ser reescrito como

$$\inf_{w_c \in \mathcal{L}_2, w_d \in \ell_2} \left\{ \xi(0)' P(0) \xi(0) : (10) - (11) \right\} \quad (13)$$

para $T > 0$ e γ^2 dados, sendo este um problema de otimização definido para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e todo $k \in \mathbb{N}$. O cômputo da norma \mathcal{H}_2 pode ser obtido, dada a discussão em (8), como

$$\sum_{j=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\xi_j(0)) \\ \leq \sum_{j=1}^{r_c} e_j' J_c' H' P(0) H J_c e_j + \sum_{i=1}^{r_d} e_i' J_d' P(0) J_d e_i \\ \leq \mathbf{tr}(J_c' P(T) J_c) + \mathbf{tr}(J_d' P(0) J_d) \quad (14)$$

onde e_j corresponde a j -ésima coluna da matriz identidade de dimensão r_c , e_i corresponde a i -ésima coluna da matriz identidade de dimensão r_d e o resultado de (9) foi utilizado. Assim, o cálculo da norma \mathcal{H}_2 pode ser reescrito como

$$\inf_{P(t)>0} \left\{ \mathbf{tr}(J_c' P(T) J_c) + \mathbf{tr}(J_d' P(0) J_d) : (10) - (11) \right\} \quad (15)$$

quando tomamos $\gamma^2 = \infty$, dado $T > 0$. Analogamente, o problema de cálculo da norma \mathcal{H}_∞ pode ser definido como

$$\inf_{\gamma^2, P(t)>0} \left\{ \gamma^2 : (10) - (11) \right\} \quad (16)$$

dado $T > 0$, em que γ^2 passa a ser uma variável do problema.

Por outro lado, o projeto de um observador de estados para o sistema híbrido em (6) não é de solução trivial, uma vez que as matrizes H e J_d dependem do ganho L a ser projetado, e portanto existem produtos de variáveis em (11). Na próxima seção, é apresentada uma solução sub-ótima para este problema.

3 Resultado Principal

Nesta seção, vamos considerar o sistema híbrido \mathcal{H} definido em (6) com as matrizes do sistema obedecendo a estrutura especial definida em (7). Dado o resultado apresentado no Teorema 1, podemos estabelecer condições para o projeto de um observador de estados por meio de uma formulação simples expressa através de DLMI. O próximo teorema apresenta o resultado principal deste trabalho.

Teorema 2 *Seja $T > 0$, um período de amostragem constante e $\gamma^2 > 0$ dados. Caso existam matrizes definidas positivas $P(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, para todo $t \in [0, T)$, bem como matrizes $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_3 \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

e $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$, que satisfaçam a DLMI em (10) para todo $t \in [0, T)$, com condições de contorno

$$\begin{bmatrix} P(T) & \bullet & \bullet \\ \begin{bmatrix} G_1 + YC_y & 0 \\ G_2 + YC_y & 0 \end{bmatrix} & He(G) - P(0) & \bullet \\ 0 & \begin{bmatrix} E_d'Y' & E_d'Y' \end{bmatrix} & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

então, considerando que $L = G_3^{-1}Y$, o problema (13) é factível.

Prova: Dado (18), nota-se que $He(G) - P(0) > 0$, o que implica que G possui posto completo. Além disso, temos que $He(G_3) - P_{22}(0) > 0$, em que $P_{22}(0)$ representa o elemento da segunda coluna e segunda linha de $P(0)$, e, portanto, G_3 é inversível. Desta forma, definindo $Y = G_3L$, pode-se reescrever (18) como

$$\begin{bmatrix} P(T) & \bullet & \bullet \\ \begin{bmatrix} G_1 + G_3LC_y & 0 \\ G_2 + G_3LC_y & 0 \end{bmatrix} & He(G) - P(0) & \bullet \\ 0 & \begin{bmatrix} E_d'L'G_3' & E_d'L'G_3' \end{bmatrix} & \gamma^2 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(T) & \bullet & \bullet \\ GH & He(G) - P(0) & \bullet \\ 0 & J_d'G' & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (19)$$

Considerando a abordagem introduzida em de Oliveira et al. (1999), temos que $GP(0)^{-1}G' \geq He(G) - P(0)$ de forma que

$$\begin{bmatrix} P(T) & \bullet & \bullet \\ GH & GP(0)^{-1}G' & \bullet \\ 0 & J_d'G' & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

é satisfeita. Portanto, multiplicando-se a condição (20) pela esquerda por $\text{diag}(I, G^{-1}, I)$ e pela direita, por sua transposta, bem como utilizando o complemento de Schur na matriz resultante em relação à terceira linha e terceira coluna e, em

seguida, em relação à segunda linha e segunda coluna, implica que (11) é satisfeita, o que conclui a prova. \square

Uma observação importante a respeito do resultado obtido é que o projeto do observador, embora decorra de condições ótimas a partir do Teorema 1, resulta em condições sub-ótimas, em decorrência de estrutura especial apresentada em (17). Além disso, os projetos de observadores que minimizam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ podem ser obtidos reescrevendo-se os problemas de otimização (15) e (16) à luz dos resultados do Teorema 2. Tais resultados serão apresentados separadamente nos dois corolários que se seguem.

Para isso, vale notar que a escolha de $\gamma^2 = +\infty$ equivale a eliminar a segunda linha e segunda coluna de (10), o que leva a desigualdade

$$\begin{bmatrix} \dot{P} + He(F'P) & G_z' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

Analogamente, a condição em (18) pode ser reescrita por

$$\begin{bmatrix} P(T) & \bullet \\ \begin{bmatrix} G_1 + YC_y & 0 \\ G_2 + YC_y & 0 \end{bmatrix} & He(G) - P(0) \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

Com isso, o projeto de um observador sub-ótimo baseado na norma \mathcal{H}_2 pode ser obtido seguindo o problema definido no próximo Corolário.

Corolário 3 *Dado um período de amostragem constante $T > 0$, o observador (2) converge assintoticamente para o sistema definido em (1) com limitante superior para norma \mathcal{H}_2 calculado por (14) se o problema definido por*

$$\inf_{Y, G, M > 0, P(t) > 0} \text{tr}(J_c'P(T)J_c) + \text{tr}(M) \quad (23)$$

sujeito às LMIs (21)–(22) e

$$\begin{bmatrix} M & \bullet \\ \begin{bmatrix} YE_d \\ YE_d \end{bmatrix} & He(G) - P(0) \end{bmatrix} > 0 \quad (24)$$

admite solução para G definida em (17). Neste caso, o ganho do observador é calculado como $L = G_3^{-1}Y$.

Prova: A prova deste Corolário decorre dos resultados dos Teoremas 1 e 2, da discussão realizada no início desta seção, de (15) e do fato de que dada a desigualdade $GP(0)^{-1}G' \geq He(G) - P(0)$ e $Y = G_3L$, (24) leva a

$$\begin{bmatrix} M & \bullet \\ \begin{bmatrix} G_3LE_d \\ G_3LE_d \end{bmatrix} & GP(0)^{-1}G' \end{bmatrix} > 0 \quad (25)$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} M & \bullet \\ GJ_d & GP(0)^{-1}G' \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

Multiplicando-se esta desigualdade pela direita por $\text{diag}(I, G^{-1})$ e pela esquerda pelo seu transposto e aplicando-se o complemento de Schur em relação à segunda linha e segunda coluna, dado que G é inversível, temos

$$M - J_d'P(0)J_d > 0 \quad (27)$$

que torna M um limitante superior para o produto $J_d'P(0)J_d$ de (15). Assim, a minimização do traço de M estabelece a minimização do limitante superior $\sum_{j=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\xi_j(0))$. A prova está completa. \square

Da mesma forma, definimos o projeto de um observador sub-ótimo que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ resolvendo o problema definido pelo Corolário 4.

Corolário 4 *Dado um período de amostragem constante $T > 0$ e condições iniciais nulas, o observador (2) converge assintoticamente para o sistema definido em (1) com limitante superior para norma \mathcal{H}_∞ dado por γ^2 se o problema definido por*

$$\inf_{\gamma^2, Y, G, P(t) > 0} \left\{ \gamma^2 : (10) \text{ e } (18) \right\} \quad (28)$$

admite solução, para G definida por (17). Neste caso, o ganho do observador é calculado como $L = G_3^{-1}Y$.

Prova: A prova deste corolário decorre de (16) e dos resultados dos Teoremas 1 e 2. A prova está completa. \square

Por fim, devemos analisar que o projeto do observador segundo apresentado pelo Teorema 2 permite recuperar o estado do sistema contínuo, embora as informações do sistema sejam atualizadas somente nos instantes de amostragem $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção apresentaremos um exemplo ilustrativo para verificar o resultado teórico obtido na seção anterior. Para isso, vamos considerar o sistema instável

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, E_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e que podemos medir o primeiro estado do sistema, com ruído, e gostaríamos de estimar o segundo estado. Desta forma, as matrizes que definem a saída medida e de controle são

$$C_y = [1 \ 0], E_d = 1; C_z = [0 \ 1]$$

Para a resolução das LMIs utilizamos a técnica proposta em Gonçalves et al. (2019), em que a matriz $P(t)$ é considerada linear por partes dividida em 16 intervalos em $[0, T]$. Tomando alguns valores de $T > 0$, a Figura 1 mostra que o problema de observação é factível, com valores crescentes

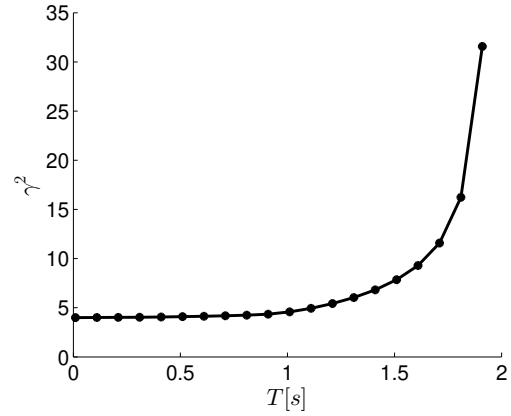


Figura 1: Efeito do período de amostragem T no limitante superior da norma \mathcal{H}_∞

de γ^2 , sendo o maior valor de período para o qual o problema (28) permanece factível $T = 2.15$ [s]. Em especial, para $T = 1$ [s], temos que o limitante para a norma \mathcal{H}_∞ é dado por $\gamma = 2.1345$ para uma matriz de ganho do observador dada por

$$L = \begin{bmatrix} -1.2322 \\ -0.8225 \end{bmatrix}$$

Para este ganho, o valor da norma \mathcal{H}_∞ calculada através de (16), em vista do Teorema 1, é dada por $\gamma^* = 1.8134 < \gamma$. Uma simulação temporal deste sistema, utilizando os ruídos

$$w(t) = \sin(2\pi 10t)/(t+1)^2$$

$$w_d[k] = \begin{cases} 0, & k = -1 \\ (-1)^k / [(k+1)T]^2, & k \geq 0 \end{cases}$$

é apresentada na Figura 2, em que a trajetória da segunda componente do estado real $x_2(t)$, e seu valor estimado $\hat{x}_2(t)$ convergem, mesmo o sistema sendo instável, o que pode ser observado com o aumento de $x_2(t)$ ao longo do tempo. Nesta simulação é possível observar ainda o efeito do ruído discreto, que faz com que a trajetória da estimação divirja significativamente da trajetória real, sendo corrigida ao longo do tempo. Quando o sistema atinge $t_1 = 1$ [s], o ruído discreto começa a agir efetivamente sobre o sistema e, como $\varepsilon(t)$ é constante dentro do intervalo $[t_k, t_{k+1})$, observa-se uma tendência de redução em $\hat{x}_2(t)$ até $t_2 = 2$ [s]. Entre $[t_2, t_3)$, o estado estimado passa a crescer, devido a inversão do sinal de $w_d[k]$. Efetivamente, temos que $|\hat{x}_2(t) - x_2(t)| < 1$ para $t > t_3$. Por fim, para esses ruídos, temos que $\|z\|_2 / \sqrt{\|w_c\|^2 + \|w_d\|^2} \approx 0.7885 < 1.8134 = \gamma^*$, conforme esperado.

A mesma análise pode ser obtida para o projeto do observador baseado na norma \mathcal{H}_2 , através do Corolário 3, em que investigamos a factibilidade de (23) em função do período de amostragem, encontrando um valor máximo de $T = 2.1$ [s]. Analogamente, nota-se que para $T = 1$ [s], obtemos um limitante superior de 1.4158, para um

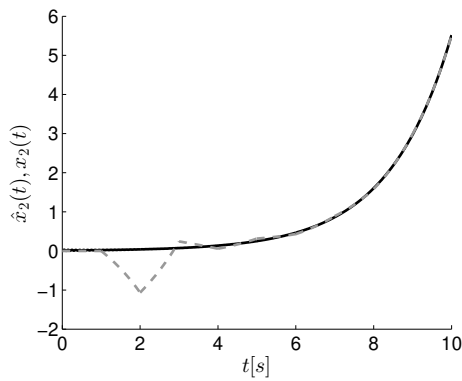


Figura 2: Estado $x_2(t)$ (linha preta) e estado estimado $\hat{x}_2(t)$ (linha cinza pontilhada) em função do tempo.

ganho calculado de

$$L = [-0.5373 \quad -1.1286]'$$

Tomando-se, o problema de cálculo de norma definido por (15), obtemos o valor de norma H_2 de 1.2694, conforme esperado. Por fim, pode-se verificar que nos dois casos testados a condição das matrizes He^{FT} são Schur estáveis. Devemos observar que esta solução, embora simples, é conservadora. No caso do exemplo em Souza, Vital and Geromel (2014) nenhuma solução é encontrada para o Corolário 4.

5 Conclusões

Neste artigo foram apresentadas condições suficientes para o projeto de um observador de Luenberger para um sistema contínuo sujeito à amostragem do sinal de saída. Para isso, o sistema resultante, composto pelo sistema e pelo observador de estados, foi reescrito segundo uma abordagem híbrida e o projeto do observador foi realizado de forma a otimizar um índice de desempenho unificado para as normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Como as condições de projeto são sub-ótimas, um limitante superior destas normas pôde ser calculado. Um exemplo numérico mostrou a factibilidade dos resultados teóricos apresentados. Os casos de $T \rightarrow 0$ e incertezas paramétricas na planta são deixados para trabalhos futuros.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por possibilitar o desenvolvimento deste projeto de pesquisa.

Referências

Colaneri, P., Geromel, J. and Locatelli, A. (1997). *Control theory and design: An RH_2 / RH_∞ viewpoint*, Academic Press, London.

de Oliveira, M., Bernussou, J. and Geromel, J. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.

Gabriel, G. (2016). *Optimal Sampled-data state feedback control applied to Markov jump linear systems*, PhD thesis, Campinas, Brasil: FEEC/UNICAMP.

Gabriel, G. W. and Geromel, J. C. (2018). Unified approach to the analysis and performance evaluation of sampled-data control applied to nonlinear systems, *9th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2018*, Vol. 51, pp. 216–221.

Gabriel, G. W. and Geromel, J. C. (2021). Sampled-data control of lur'e systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **40**.

Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2019). Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control, *Automatica* **100**: 289–298.

Goebel, R., Sanfelice, R. G. and Teel, A. R. (2009). Hybrid dynamical systems, *IEEE control systems magazine* **29**(2): 28–93.

Gonçalves, T. R., Gabriel, G. W. and Geromel, J. C. (2019). Differential linear matrix inequalities optimization, *IEEE Control Systems Letters* **3**: 380–385.

Hewitson, M. (2010). Digital vs analog control, *Proceedings of the GEO ISC Meeting*.

Lee, H. J., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2003). An efficient observer-based sampled-data control: Digital redesign approach, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **50**: 1595–1600.

Morais, T. S. (2006). *Diagnóstico de falhas via observadores de estado com excitações desconhecidas, identificadas via funções ortogonais*, Master's thesis, Ilha Solteira, Brasil: Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Pertew, A., Marquez, H. and Zhao, Q. (2006). \mathcal{H}_∞ optimal sampled-data state observer design, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **153**: 453–461.

Souza, M., Fioravanti, A. R. and Geromel, J. e. C. (2014). \mathcal{H}_2 sampled-data filtering of linear systems, *IEEE Transactions on Signal Processing* **62**: 4839–4846.

Souza, M., Vital, G. W. and Geromel, J. C. (2014). Optimal sampled-data state feedback control of linear systems, *IFAC Proceedings Volumes* **47**(3): 5556–5561.