

## Nova metodologia de controle para conversores de potência trifásicos CC-CA <sup>★</sup>

Lucas C. Costanzo\* Grace S. Deaecto\* Lucas N. Egidio\*\*  
Tárcio A. S. Barros\*

\* *Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP*  
13083-860, Campinas, SP, Brasil  
l265808@dac.unicamp.br, {grace,tarcioandre}@fem.unicamp.br  
\*\* *ICTEAM Institute, Université Catholique de Louvain*  
1348, Louvain-la-Neuve, Belgium  
lucas.egidio@uclouvain.be

---

**Abstract:** In this work, a new switched control strategy is proposed to deal with three-phase DC-AC power converters, also known as three-phase inverters. More specifically, a switching rule is designed to command the inverter switches, at each instant of time, assuring global asymptotic tracking to a reference trajectory. A guaranteed performance cost is also taken into account. The reference trajectory is related to a constant voltage in the inverter input and sinusoidal phase currents, synchronous with the phase voltages, leading to a unitary power factor. This reference trajectory must belong to a set of trackable trajectories to be determined. The design conditions are obtained from a Lyapunov function that depends on the system electrical angle and are based on the solution of a simple Lyapunov equation. Simulation results put in evidence the effectiveness of the proposed methodology.

*Keywords:* Three-phase inverter, switched systems, guaranteed cost, linear matrix inequalities, Lyapunov theory.

---

**Resumo:** Neste trabalho, uma nova metodologia de controle com comutação é proposta para tratar conversores de potência trifásicos CC-CA, também conhecidos como inversores trifásicos. Mais especificamente, uma regra de comutação é projetada a fim de controlar as chaves do inversor a cada instante de tempo, assegurando rastreamento assintótico global de uma trajetória de referência. Um custo garantido de desempenho é também levado em consideração. A trajetória de referência está relacionada a uma tensão constante na entrada do inversor e a correntes de fase senoidais, síncronas com as tensões de fase, levando a um fator de potência unitário. Ela deve pertencer a um conjunto de trajetórias rastreáveis a ser determinado. As condições de projeto são obtidas a partir de uma função de Lyapunov dependente do ângulo elétrico do sistema e se baseiam na solução de uma simples equação de Lyapunov. Resultados de simulação ilustram a eficácia da metodologia de controle proposta.

*Palavras-chaves:* Inversor trifásico, sistemas com comutação, custo garantido, desigualdades matriciais lineares, teoria de Lyapunov.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Com a crescente preocupação ambiental pela utilização de combustíveis fósseis, é possível perceber uma tendência de busca por meios mais sustentáveis de geração de energia. Na grande maioria destes meios e em diversas aplicações da área de engenharia elétrica, é indispensável realizar o processamento e o controle do fluxo da energia elétrica para que as tensões e correntes fornecidas sejam compatíveis com a carga que as recebem. Os conversores de potência são responsáveis em realizar esta tarefa, o que os torna objeto de crescente interesse de engenheiros e cientistas. Neles, o controle é realizado através do comando adequado

das chaves eletrônicas que os compõem. Na literatura, uma grande parte dos trabalhos dedicados à síntese de controle para estes dispositivos são baseados em sistemas médios e em sinais de modulação de largura de pulso, veja a referência recente Magossi et al. (2020) que propõe a síntese de um controlador PID para conversores de potência CC-CC com a finalidade de atenuar harmônicas selecionadas. Embora os resultados disponíveis a partir desta abordagem sejam amplamente empregados na indústria e constantemente aprimorados pela comunidade científica, a possibilidade de realizar o projeto utilizando diretamente o sistema original, sem o intermédio de sinais moduladores, permite tratar o problema sob uma perspectiva teórica mais abrangente, com possibilidade de resultados menos conservadores e maior chance de generalizações.

Neste contexto, os conversores de potência CC-CC são modelados como sistemas afins com comutação e definidos

---

\* Este artigo é resultado de pesquisa científica apoiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Código 001 e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 303499/2018-4.

por um conjunto de subsistemas e uma regra de comutação orquestrando o chaveamento entre eles. Uma característica intrínseca destes sistemas é a existência de vários possíveis pontos de equilíbrio no espaço de estado. A regra de comutação é então projetada para assegurar estabilidade global do ponto de equilíbrio de interesse que, geralmente, não coincide com o ponto de nenhum dos subsistemas. Desta forma, estabilidade assintótica só é obtida devido à existência de modos deslizantes estáveis e uma frequência de comutação arbitrariamente elevada. Quando um limitante superior é imposto a esta frequência, o objetivo do controle é garantir estabilidade prática, em que as trajetórias são guiadas para uma região tão pequena quanto possível contendo o ponto de equilíbrio de interesse. As referências Bolzern and Spinelli (2004); Scharlau et al. (2014); Deaecto et al. (2010) asseguram estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio, enquanto que Patino et al. (2009); Egidio and Deaecto (2019) asseguram estabilidade prática e Egidio et al. (2020a) trata estabilidade assintótica de ciclo limite.

Além destes dispositivos, os conversores de corrente alternada CC-CA e CA-CC são igualmente importantes. Eles, porém, têm sido pouco estudados no contexto da teoria de sistemas com comutação, em que o foco é realizar o projeto direto de uma regra de comutação sem o intermédio de sinais de modulação. A dificuldade neste estudo vem da natureza variante no tempo das correntes alternadas, que leva a uma nova classe de sistemas, caracterizados pela existência de funções senoidais em seu modelo dinâmico. A literatura apresenta alguns trabalhos relacionados a conversores de corrente alternada CC-CA, mas utilizando o controle baseado em sinais de modulação de largura de pulso, veja Bhattarai et al. (2018); Nair et al. (2020); Colak et al. (2011) e Nam et al. (2021). Entretanto, poucos são os trabalhos dedicados ao projeto direto da regra de comutação, veja Yan et al. (2016) e Sanchez et al. (2019) como alguns exemplos. Nos trabalhos existentes é comum a utilização de diagramas de referência auxiliares, tais como os  $\alpha\beta$  e  $dq$ , em que os sinais trifásicos são representados em diagramas de duas dimensões facilitando a análise do sistema. Em Yan et al. (2016), o diagrama  $\alpha\beta$  foi utilizado para tornar o sistema mais simples e permitir a aplicação das técnicas propostas em Deaecto et al. (2010) baseadas em uma função de Lyapunov quadrática. Mais recentemente, para sistemas monofásicos, Sanchez et al. (2019) propôs uma regra de comutação utilizando a teoria de sistemas dinâmicos híbridos, cujo objetivo é seguir uma trajetória de corrente senoidal com frequência de comutação limitada e garantindo estabilidade prática.

Neste trabalho, nosso principal objetivo é projetar uma regra de comutação dependente do estado capaz de controlar as correntes de fase de um inversor trifásico CC-CA conectado à rede, a partir do sistema original, sem a utilização de diagramas de referência auxiliares ou estratégias de controle baseadas em modulação de sinal. A regra de comutação deve controlar as chaves do inversor de forma a garantir rastreamento assintótico global para um sinal de referência composto pelas correntes de fase senoidais e pela tensão de entrada do inversor. As condições apresentadas são derivadas de uma função de Lyapunov dependente do ângulo elétrico e, portanto, mais geral do que a quadrática proposta em Yan et al. (2016). Além disso, elas são

expressas como a solução de uma equação de Lyapunov e, portanto, simples de resolver sem a necessidade de pacotes computacionais dedicados à solução de problemas de otimização. Ademais, as condições propostas neste artigo são mais relaxadas do que as obtidas em Egidio et al. (2020b) para o controle de conversores CA-CC devido à utilização de uma função de Lyapunov mais geral. A teoria é validada a partir de resultados de simulação e comparada com outras técnicas da literatura.

**Notação:** Para vetores ou matrizes reais, ( $'$ ) se refere à sua transposta. Para matrizes simétricas, ( $\bullet$ ) representa cada bloco simétrico. Os símbolos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{N}$  denotam os conjuntos de números reais e naturais, respectivamente. Para uma matriz simétrica,  $X > (<) 0$  indica que a matriz é definida positiva (negativa). O simplex unitário  $\Lambda$  é composto por vetores não negativos  $\lambda \in \mathbb{R}^N$ , de forma que  $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j = 1$ . A combinação convexa das matrizes  $\{X_1, \dots, X_N\}$  é definida por  $X_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i X_i$ ,  $\lambda \in \Lambda$  e, finalmente, o operador  $\text{He}\{X\}$  é definido por  $\text{He}\{X\} = X + X'$  para qualquer matriz quadrada real  $X$ .

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o inversor trifásico conectado à rede apresentado na Figura 1, também estudado em Bhattarai et al. (2018). Aplicando as leis de Kirchhoff das malhas e dos nós, seu modelo dinâmico pode ser descrito pelo sistema não linear com comutação dado por

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b(\theta(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

em que  $x(t) = [i_\phi(t)' \ v_C(t)]' \in \mathbb{R}^4$  é o vetor de estado,  $i_\phi(t) = [i_a(t) \ i_b(t) \ i_c(t)]' \in \mathbb{R}^3$  são as correntes de fase e  $v_C(t) \in \mathbb{R}$  é a tensão de entrada do inversor medida nos terminais do capacitor. O sinal de comutação  $\sigma(t) \in \mathbb{K} = \{1, \dots, 7\}$  é responsável por selecionar um subsistema a cada instante de tempo entre os sete disponíveis. As matrizes do sistema são dadas por

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & (1/L)S_\sigma \\ -(1/C)S'_\sigma & -1/(R_s C) \end{bmatrix}, b(\theta) = \begin{bmatrix} -(1/L)e_\phi \\ v_s/(R_s C) \end{bmatrix} \quad (2)$$

em que  $R_L$  e  $L$  são a resistência e indutância de cada fase da rede, respectivamente,  $C$  é a capacitância do filtro de entrada,  $R_s$  e  $v_s$  são a resistência e a tensão da fonte CC, respectivamente, e  $e_\phi(t) = [e_a(t) \ e_b(t) \ e_c(t)] = e_M f(\theta(t))$  são as tensões de fase, sendo  $e_M$  o seu valor de pico e  $f(\theta) = [f_a(\theta) \ f_b(\theta) \ f_c(\theta)]' \in \mathbb{R}^3$  uma função vetorial definida por

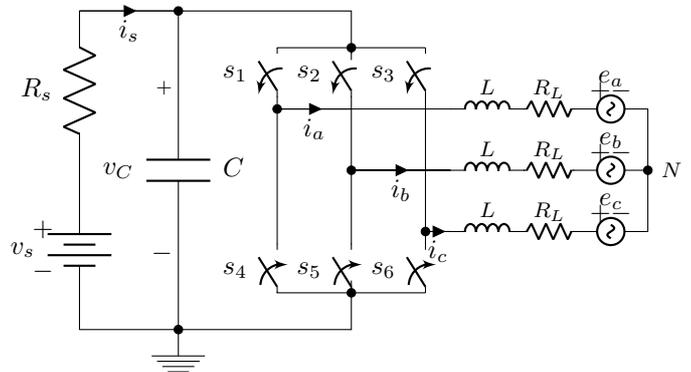


Figura 1. Inversor de potência trifásico CC-CA

Tabela 1. Regra de comutação  $\sigma$ , estados de comutação e vetor  $S_i$

$\sigma$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$S'_\sigma$
1	0	0	1	$[-1/3 \ -1/3 \ 2/3]$
2	0	1	0	$[-1/3 \ 2/3 \ -1/3]$
3	0	1	1	$[-2/3 \ 1/3 \ 1/3]$
4	1	0	0	$[2/3 \ -1/3 \ -1/3]$
5	1	0	1	$[1/3 \ -2/3 \ 1/3]$
6	1	1	0	$[1/3 \ 1/3 \ -2/3]$
7	1	1	1	$[0 \ 0 \ 0]$

$$f_a(\theta) = \sin(\theta) \quad (3)$$

$$f_b(\theta) = \sin(\theta - 2\pi/3) \quad (4)$$

$$f_c(\theta) = \sin(\theta - 4\pi/3) \quad (5)$$

Os vetores  $S_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , assumem valores de acordo com a Tabela 1. Nesta tabela, a chave  $s_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , do inversor possui valor lógico um 1 quando está fechada e 0 quando aberta. Além disso, cada par  $(s_1, s_4)$ ,  $(s_2, s_5)$  e  $(s_3, s_6)$  atua de forma complementar, ou seja, se  $s_1 = 1$  então  $s_4 = 0$  e *vice-versa*. O parâmetro variante no tempo  $\theta(t)$  representa o ângulo elétrico do sistema e é definido por  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ , com frequência angular  $\omega$ . Neste trabalho,  $\theta(t)$  é considerado um parâmetro que pode ser medido ou adequadamente estimado.

Nosso objetivo é projetar uma regra de comutação dependente do estado  $\sigma(t) = u(x(t), \theta(t))$  com  $u(x, \theta) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  capaz de controlar a comutação das chaves do inversor de forma a fazer com que as correntes de fase  $i_\phi(t)$  sigam com erro nulo trajetórias senoidais  $i_{\phi*}(\theta(t)) = i_* f(\theta(t))$  síncronas com as tensões de fase  $e_\phi(t)$ , garantido, assim, um fator de potência unitário. Os valores de interesse  $(i_*, v_{C*})$ , que definem as trajetórias de equilíbrio  $x_e(\theta(t)) = [i_{\phi*}(\theta(t))' \ v_{C*}]'$ , devem pertencer a um conjunto  $X_e$  a ser determinado. O problema de controle também permite a minimização de um limitante superior para o custo quadrático

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \alpha \|i_\phi(t) - i_{\phi*}(t)\|^2 + \beta (v_C(t) - v_{C*})^2 dt \quad (6)$$

com  $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$  fornecidos pelo projetista.

Adotando a variável auxiliar  $\xi(t) = x(t) - x_e(\theta(t))$  e o vetor de trajetórias de equilíbrio  $x_e(\theta(t)) = [i_* f(\theta(t))' \ v_{C*}]'$ , é possível reescrever o sistema não-linear (1) como sendo

$$\dot{\xi}(t) = A_{\sigma(t)} \xi(t) + \ell_{\sigma(t)}(\theta(t)), \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (7)$$

em que  $\ell_i(\theta) = A_i x_e(\theta) + b(\theta) - \dot{x}_e(\theta)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , e  $\xi_0 = x_0 - x_e(\theta_0)$ . Isso permite tratar o problema de rastreamento de trajetória em que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e(\theta(t))\| = 0 \quad (8)$$

para o sistema original (1), a partir da obtenção de condições para que a origem  $\xi = 0$  seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável em (7). As seguintes relações trigonométricas serão de fundamental importância na obtenção destas condições.

### 2.1 Propriedades Trigonômicas

Considere a função vetorial  $f(\theta)$  definida pelas identidades (3)-(5). As relações trigonométricas permitem concluir que

$h'f(\theta) = 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$ , com  $h = [1 \ 1 \ 1]'$ . Portanto, a função vetorial  $f(\theta)$  pertence a um plano contido em  $\mathbb{R}^3$  perpendicular ao vetor  $h$ , formalmente definido como

$$\Pi = \{v \in \mathbb{R}^3 : v'h = 0\} \quad (9)$$

Consequentemente, ao longo da trajetória de  $\theta(t)$ , a derivada temporal de  $f(\theta)$  pertence ao mesmo plano  $\Pi$  e é dada por  $\dot{f}(\theta) = \omega g(\theta)$ , com  $g(\theta) = [g_a(\theta) \ g_b(\theta) \ g_c(\theta)]' \in \mathbb{R}^3$  e

$$g_a(\theta) = \cos(\theta) \quad (10)$$

$$g_b(\theta) = \cos(\theta - 2\pi/3) \quad (11)$$

$$g_c(\theta) = \cos(\theta - 4\pi/3) \quad (12)$$

em que  $h'g(\theta) = 0$ . Além disso, podemos obter as seguintes relações

$$f(\theta)'f(\theta) = 3/2, \quad f(\theta)'g(\theta) = 0, \quad g(\theta)'g(\theta) = 3/2 \quad (13)$$

que junto com a matriz  $R(\theta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$  definida por

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3}f(\theta) & \sqrt{2/3}g(\theta) & \sqrt{1/3}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

serão muito utilizadas ao longo deste artigo. Esta matriz possui algumas características importantes que serão exploradas na obtenção dos nossos resultados principais. Primeiramente, note que a partir de (13), temos

$$R(\theta)'R(\theta) = I_4 \quad (15)$$

Além disso, também é verdade que  $\dot{g}(\theta) = -\omega f(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , permitindo concluir que

$$\dot{R}(\theta(t)) = R(\theta(t))\Omega \quad (16)$$

com a matriz anti-simétrica

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Finalmente, para uma matriz diagonal  $D = \text{diag}(\gamma I_3, \mu)$ , temos que a identidade

$$DR(\theta) = R(\theta)D \quad (18)$$

é válida, garantindo a comutatividade do produto entre  $D$  e  $R(\theta)$ .

## 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

O próximo lema é de fundamental importância para expressar as condições de projeto em termos de desigualdades matriciais lineares.

*Lema 1.* Considere que as matrizes  $T_R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  e  $T_I = \text{diag}(\kappa I_3, \eta)$  sejam dadas. A desigualdade

$$T_I + R(\theta)T_R R(\theta)' > 0 \quad (19)$$

é válida para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  se, e somente se

$$T_I + T_R > 0 \quad (20)$$

for satisfeita.

**Prova:** Primeiramente, multiplique (19) à esquerda por  $R(\theta)'$  e à direita por  $R(\theta)$ . Dado que  $R(\theta)'R(\theta) = I_4$  e que o produto  $R(\theta)$  e  $T_I$  comuta, temos

$$R(\theta)'T_I R(\theta) + T_R = R(\theta)'R(\theta)T_I + T_R = T_I + T_R \quad (21)$$

Como  $R(\theta)$  tem posto completo, temos que (19) vale se, e somente se (20) vale.  $\square$

Este lema fornece uma ferramenta eficaz para verificar se a função matricial definida em (19) é definida positiva

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , simplesmente analisando a desigualdade matricial linear (20). Sua importância ficará evidente na prova do teorema principal deste artigo.

Para apresentar as condições que garantem a estabilidade assintótica global da origem do sistema (7), a seguinte função de Lyapunov dependente de parâmetro é adotada

$$v(\xi, \theta) = \xi' P(\theta) \xi \quad (22)$$

com a matriz definida positiva

$$P(\theta) = P_I + R(\theta) P_R R(\theta)' \quad (23)$$

em que

$$P_I = \begin{bmatrix} pI_3 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \quad (24)$$

e  $P_R$  devem ser determinadas. Note que a função de Lyapunov (22) é mais geral do que a proposta em Egidio et al. (2020b), pois devido à escolha de  $R(\theta)$  em (14), a matriz  $P_R$  é de quarta ordem enquanto que em Egidio et al. (2020b) é de terceira ordem. Isto permite a obtenção de condições suficientes mais relaxadas.

Avaliando as derivadas no tempo de  $v(\xi, \theta)$  ao longo das trajetórias  $\xi(t)$  e  $\theta(t)$ , temos

$$\dot{v}(\xi, \theta) = \xi' W_\sigma(\theta) \xi + 2\xi' P(\theta) \ell_\sigma(\theta) \quad (25)$$

com

$$W_\sigma(\theta) = A'_\sigma P(\theta) + P(\theta) A_\sigma + \dot{P}(\theta) \quad (26)$$

e  $\dot{P}(\theta) = R(\theta) \text{He}\{\Omega P_R\} R(\theta)'$  obtido a partir de (16). O próximo teorema apresenta condições suficientes para garantir que  $\dot{v}(\xi, \theta) < 0$  para todo  $\xi \neq 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  e corresponde ao resultado principal deste artigo.

**Teorema 1.** Considere o sistema (7) evoluindo de  $\xi(0) = \xi_0$  e escalares  $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$  compondo  $Q = \text{diag}(\alpha I_3, \beta)$ . Dada uma trajetória de equilíbrio  $x_e(\theta) = [i_* f(\theta)' v_{C*}]'$  definida pelo par de escalares  $(i_*, v_{C*}) \in X_e$  em que

$$X_e = \mathcal{E} \cap \mathcal{R} \quad (27)$$

com a elipse  $\mathcal{E}$  e a região  $\mathcal{R}$  dados, respectivamente, por

$$\mathcal{E} = \left\{ (i_*, v_{C*}) \in \mathbb{R}^2 : R_L i_*^2 + e_M i_* - \frac{2v_{C*}(v_s - v_{C*})}{3R_s} = 0 \right\} \quad (28)$$

$\mathcal{R} = \{(i_*, v_{C*}) \in \mathbb{R}^2 : (e_M + R_L i_*)^2 + (L\omega i_*)^2 \leq v_{C*}^2/3\}$  (29) se existirem  $P_I = \text{diag}(pI_3, q)$  e uma matriz simétrica  $P_R$  satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais lineares

$$P_I + P_R > 0 \quad (30)$$

$$\text{He}\{P_I A_I\} + Q + \Psi < 0 \quad (31)$$

com

$$\Psi = \text{He}\{P_R(A_R + A_I + \Omega') + P_I A_R\} \quad (32)$$

$$A_I = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & 0 \\ 0 & -1/(R_s C) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$A_R = \frac{\sqrt{6}}{2v_{C*}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v_d/L \\ 0 & 0 & 0 & \omega i_* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_d/C & -L\omega i_*/C & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

e  $v_d = e_M + R_L i_*$ , então a regra de comutação  $\sigma(t) = u(\xi(t), \theta(t))$  com

$$u(\xi, \theta) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' (W_i(\theta) \xi + 2P(\theta) \ell_i(\theta)) \quad (35)$$

faz com que a origem do sistema (7) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e assegura

$$\mathcal{J} < v(\xi_0, \theta_0) \quad (36)$$

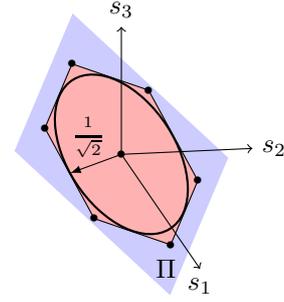


Figura 2. Polítopo  $\mathbb{P}$  e sua circunferência inscrita.

**Prova:** A prova segue de (25), que avaliada ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema (7), e sujeita à regra de comutação  $\sigma(t) = u(\xi(t), \theta(t))$ , resulta em

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi, \theta) &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' W_i(\theta) \xi + 2\xi' P(\theta) \ell_i(\theta) \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} \xi' W_\lambda(\theta) \xi + 2\xi' P(\theta) \ell_\lambda(\theta) \\ &\leq \xi' W_{\lambda_*(\theta)}(\theta) \xi + 2\xi' P(\theta) \ell_{\lambda_*(\theta)}(\theta) \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $\lambda_*(\theta)$  é um vetor arbitrário contido em  $\Lambda$ . Note que se para cada  $\theta$  existir  $\lambda_*(\theta) \in \Lambda$  de forma que a desigualdade  $W_{\lambda_*(\theta)}(\theta) < -Q$  é satisfeita e  $\ell_{\lambda_*(\theta)}(\theta) = 0$ , então  $\dot{v}(\xi, \theta) < 0$  e a origem  $\xi = 0$  é globalmente assintoticamente estável. Note que o vetor  $\ell_{\lambda_*(\theta)}(\theta)$  é dado por

$$\ell_{\lambda_*(\theta)}(\theta) = \begin{bmatrix} -L^{-1}((e_M + R_L i_*) f(\theta) + L\omega i_* g(\theta) - v_{C*} S_{\lambda_*(\theta)}) \\ -C^{-1}(i_* S'_{\lambda_*(\theta)} f(\theta) - (v_s - v_{C*})/R_s) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Agora, observe que o polítopo  $\mathbb{P}$  formado pelos vetores  $(S_1, \dots, S_7)$  apresentados na Tabela 1 é um hexágono regular perpendicular ao vetor  $h = [1 \ 1 \ 1]'$ , cuja circunferência interna possui raio de  $1/\sqrt{2}$ , como mostrado na Figura 2. Portanto,  $S_{\lambda_*(\theta)} \in \Pi$  pode ser escolhido como sendo uma combinação linear de  $f(\theta)$  e  $g(\theta)$  contanto que seu comprimento não exceda  $1/\sqrt{2}$ , dado que  $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  formam uma base para  $\Pi$ . De fato, escolhendo

$$S_{\lambda_*(\theta)} = \frac{e_M + R_L i_*}{v_{C*}} f(\theta) + \frac{L\omega i_*}{v_{C*}} g(\theta) \quad (39)$$

que faz com que o primeiro termo de (38) seja nulo, a restrição  $S'_{\lambda_*(\theta)} S_{\lambda_*(\theta)} \leq 1/2$  resulta na região  $\mathcal{R}$ , como definido em (29). Além disso, substituindo  $S_{\lambda_*(\theta)}$  no segundo termo de (38), é simples verificar que este elemento se torna nulo sempre que o par  $(i_*, v_{C*})$  for um ponto da elipse  $\mathcal{E}$ . Portanto, escolher  $(i_*, v_{C*}) \in X_e$  dado em (27) garante que para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  existe um  $\lambda_*(\theta) \in \Lambda$  de forma que  $\ell_{\lambda_*(\theta)}(\theta) = 0$ .

Para o mesmo  $\lambda_*(\theta)$ , vamos agora mostrar que a desigualdade  $W_{\lambda_*(\theta)}(\theta) < -Q$  é satisfeita para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  sempre que (31) for factível. Primeiramente, usando (33)-(34), vamos reescrever  $A_{\lambda_*(\theta)} = A_I + R(\theta) A_R R(\theta)'$  e avaliar  $W_{\lambda_*(\theta)}(\theta)$  como

$$W_{\lambda_*(\theta)}(\theta) = 2P_I A_I + R(\theta) \Psi R(\theta)' \quad (40)$$

com  $\Psi$  definido em (32) obtido aplicando (15), (16), (18) adequadamente. Agora, aplicando o Lema 1 em (31) para  $T_I = -2P_I A_I - Q$  e  $T_R = -\Psi$ , tem-se que

$$-Q - 2P_I A_I - R(\theta) \Psi R(\theta)' > 0 \quad (41)$$

mostrando que  $W_{\lambda_*(\theta)}(\theta) < -Q$ . A positividade de  $P(\theta)$  é garantida por (30) junto ao Lema 1, mas agora definindo  $T_I = P_I$  e  $T_R = P_R$ . Finalmente, de (37), é obtido que

$\dot{v}(\xi, \theta) < -\xi'Q\xi$  para todo  $\xi \neq 0$ , garantindo que a origem do sistema (7) seja globalmente assintoticamente estável. Por último, integrando ambos os lados de  $\dot{v}(\xi, \theta) < -\xi'Q\xi$  de  $t = 0$  até  $t \rightarrow \infty$  obtemos o limitante superior definido em (36), concluindo assim a prova.  $\square$

Este teorema fornece um conjunto de possíveis trajetórias de equilíbrio obtidas de uma escolha adequada do par  $(i_*, v_{C*})$  no interior de  $X_e$ . Além disso, uma regra de comutação globalmente assintoticamente estabilizante é obtida através de condições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares. O próximo corolário apresenta condições equivalentes baseadas na solução de uma equação de Lyapunov.

**Corolário 1.** Considere o sistema (7) evoluindo de  $\xi(0) = \xi_0$  e escalares  $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$  compondo  $Q = \text{diag}(\alpha I_3, \beta)$  e forneça uma trajetória de equilíbrio  $x_e(\theta) = [i_* f(\theta)' v_{C*}]'$  definida pelo par de escalares  $(i_*, v_{C*}) \in X_e$  dado em (27). O resultado do Teorema 1 é equivalente a assegurar a existência de uma matriz  $Z > 0$  solução da seguinte equação de Lyapunov

$$\text{He}\{Z(A_I + A_R + \Omega')\} + Q = -\varepsilon I \quad (42)$$

com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno,  $A_I$ ,  $A_R$  e  $\Omega$  definidos em (33), (34) e (17), respectivamente. A função de comutação (35) é implementada com

$$P(\theta) = R(\theta)ZR(\theta)', \quad \dot{P}(\theta) = R(\theta)(\text{He}\{\Omega Z\})R(\theta)' \quad (43)$$

e o custo garantido associado é dado por

$$\mathcal{J} < \text{Tr}(ZW) \quad (44)$$

com  $W = R(\theta_0)' \xi_0 \xi_0' R(\theta_0)$ .

**Prova:** Primeiramente, note que a condição (31) com  $\Psi$  dado em (32) pode ser rearranjada como

$$\text{He}\{(P_R + P_I)(A_R + A_I) + P_R \Omega'\} + Q < 0 \quad (45)$$

Agora, definindo  $Z = P_R + P_I$  temos que a seguinte identidade

$$\text{He}\{P_R \Omega'\} = \text{He}\{(Z - P_I) \Omega'\} = \text{He}\{Z \Omega'\} \quad (46)$$

é válida, pois  $\text{He}\{P_I \Omega'\} = 0$ . Esta identidade junto com a minimização do limitante superior (36), permite determinar  $Z$  em (45) de forma equivalente como a solução da equação de Lyapunov (42). Além disso, podemos reescrever o limitante superior (36) da forma

$$\begin{aligned} v(\xi_0, \theta_0) &= \xi_0' (P_I + R(\theta_0)P_R R(\theta_0)') \xi_0 \\ &= \xi_0' R(\theta_0) Z R(\theta_0)' \xi_0 \\ &= \text{Tr}(ZW) \end{aligned} \quad (47)$$

como apresentado em (44). Em (47), a segunda igualdade foi obtida da propriedade de comutação (18) em que  $P_I R(\theta_0) = R(\theta_0) P_I$ , após multiplicar à direita por  $R(\theta_0)'$ , levando a

$$P(\theta_0) = R(\theta_0) Z R(\theta_0)' \quad (48)$$

e a terceira vem da propriedade de circularidade do operador traço aplicado no escalar  $\xi_0' R(\theta_0) Z R(\theta_0)' \xi_0$ . Finalmente, as matrizes  $P(\theta)$  e  $\dot{P}(\theta)$ , necessárias para a implementação da regra de comutação (35), são obtidas de (48) e da sua derivada, mas avaliadas em  $\theta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Um ponto importante para a obtenção destes resultados é a utilização de uma função de Lyapunov dependente do parâmetro  $\theta(t)$ , que mostrou-se bem adaptada para lidar com esta classe de sistemas dinâmicos. Uma abordagem alternativa, baseada em uma função de Lyapunov quadrá-

Tabela 2. Parâmetros do inversor

$R_s$	$2 \Omega$
$R_L$	$0.15 \Omega$
$L$	$10 \text{ mH}$
$\omega$	$2\pi \times 60 \text{ rad/s}$
$C$	$1.2 \text{ mF}$
$e_M$	$179.62 \text{ V}$
$v_s$	$410 \text{ V}$

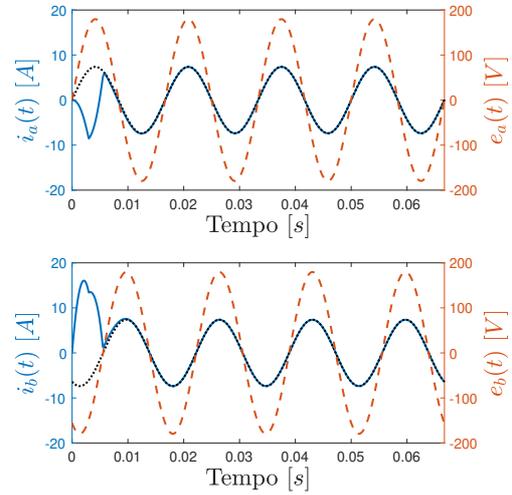


Figura 3. Correntes e tensões de fase.

tica  $\hat{v}(\xi) = \xi' P \xi$  com  $P > 0$  poderia ser considerada. Neste caso, a seguinte desigualdade

$$A_{\lambda_*}^{\prime} P + P A_{\lambda_*}(\theta) < -Q \quad (49)$$

deve ser satisfeita para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , considerando, por exemplo, uma discretização suficientemente fina deste intervalo. Esta alternativa é computacionalmente menos eficiente e, além disso, nos testes realizados apresentou resultados mais conservadores.

#### 4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, vamos ilustrar a implementação da regra obtida no Corolário 1 adotando um conversor CC-CA definido como na Figura 1 com valores de componentes apresentados na Tabela 2. O objetivo é fazer com que as correntes de fase operem com amplitudes adequadas e fator de potência unitário. Além disso, a tensão  $v_C$  deve atingir um valor constante de  $400 \text{ [V]}$ . A partir de (28) e (29), obtivemos a trajetória de equilíbrio  $x_e(\theta) = [i_* f(\theta)' v_C]'$  que é completamente definida pelo par  $(i_*, v_{C*}) = (7.3772 \text{ [A]}, 400 \text{ [V]}) \in X_e$ . Utilizando esta trajetória e os escalares  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.1$  que definem  $Q$ , resolvemos as condições apresentadas no Corolário 1, que são equivalentes àquelas do Teorema 1, para os valores iniciais  $x_0 = 0$  e  $\theta_0 = 0$ , e obtivemos como solução um custo garantido de  $\mathcal{J} < 50.7792$  e

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0168 & -0.0005 & 0.0000 & 0.0010 \\ -0.0005 & 0.0154 & 0.0000 & 0.0010 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0333 & 0.0000 \\ 0.0010 & 0.0010 & 0.0000 & 0.0003 \end{bmatrix} \quad (50)$$

A Figura 3 apresenta as correntes e tensões nas fases  $a$  e  $b$ . Mais especificamente, as curvas em linhas contínuas são as correntes de fase, que seguem com erro nulo as respectivas trajetórias de referência, indicadas pelas curvas

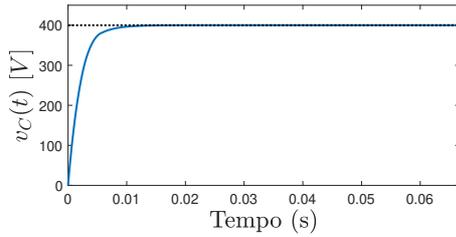


Figura 4. Tensão de entrada do inversor.

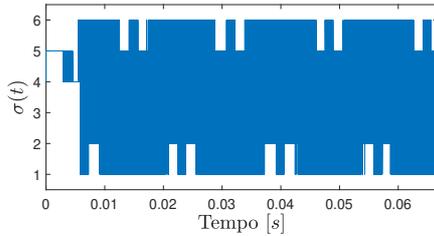


Figura 5. Regra de comutação.

pontilhadas. As curvas tracejadas representam as tensões de fase que, como pode ser notado, são síncronas com as correntes, indicando fator de potência unitário. A tensão  $v_C(t)$  e a regra de comutação associada estão apresentadas nas Figuras 4 e 5, respectivamente. Podemos observar que a tensão  $v_C(t)$  converge para 400 [V] como desejado e que a regra de comutação possui uma frequência arbitrariamente elevada, o que é uma propriedade intrínseca dos sistemas afins, quando a estabilidade assintótica é requerida.

Para fins de comparação, minimizamos o limitante superior de (36), mas sujeito à (49) avaliando-se  $\theta(t)$  em  $\theta \in [0, 2\pi]$  com passo de 0.001. O custo garantido obtido foi de  $\mathcal{J} < 519.0463$ , que é 10 vezes maior do que aquele aqui obtido. Para comparação com os resultados de Egidio et al. (2020b), consideramos o conversor CA-CC apresentado naquela referência e resolvemos o problema de otimização

$$\mathcal{J} < \min_{p,q,P_R} \text{Tr}(P(0)) = \text{Tr}(Z) \quad (51)$$

com  $Z$  sendo a solução da equação de Lyapunov (42). O limitante superior (51) é válido para condições iniciais tais que  $\|\xi_0\| \leq 1$ . De fato, temos

$$\xi_0^T P(0) \xi_0 \leq \max_{\|\xi_0\| \leq 1} \xi_0^T P(0) \xi_0 = \lambda_{\max}(P(0)) \leq \text{Tr}(P(0))$$

em que  $\lambda_{\max}(P(0))$  é o autovalor máximo de  $P(0)$ . Resolvendo (51) obtivemos  $\mathcal{J} < 0.1851$ , enquanto que em Egidio et al. (2020b) este valor foi de  $\mathcal{J} < 0.2309$ , que é aproximadamente 25% maior. Isto coloca em evidência que as condições do Corolário 1 e, portanto, do Teorema 1 são, de fato, mais relaxadas.

## 5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentada uma nova metodologia de controle para inversores trifásicos. Esta abordagem realiza o projeto de uma regra de comutação dependente do estado capaz de assegurar o rastreamento assintótico global de uma trajetória de equilíbrio desejada e garante fator de potência unitário. As condições de projeto são simples e expressas como a solução de uma equação de Lyapunov. O projeto também permite a otimização de um custo garantido de desempenho. Resultados de simulação colocaram

em evidência a eficácia da técnica de controle proposta. Como perspectivas de trabalho futuro, pretendemos abordar temas de grande interesse prático como: robustez da lei de controle com relação à variação da carga, limitação da frequência de comutação, além de realizar comparações com outras técnicas presentes na literatura.

## REFERÊNCIAS

- Bhattacharai, R., Gurung, N., and Kamalasadnan, S. (2018). Dual mode control of a three-phase inverter using minimum variance adaptive architecture. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, 54(4), 3868–3880.
- Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *IEEE Am. Contr. Conf.*, volume 5, 3890–3895.
- Colak, I., Kabalci, E., and Bayindir, R. (2011). Review of multilevel voltage source inverter topologies and control schemes. *Energy Convers. Manag.*, 52(2), 1114–1128.
- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET Control Theory & Applications*, 4(7), 1201–1210.
- Egidio, L.N., Daiha, H.R., and Deaecto, G.S. (2020a). Global asymptotic stability of limit cycle and  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  performance of discrete-time switched affine systems. *Automatica*, 116, 108927.
- Egidio, L.N. and Deaecto, G.S. (2019). Novel practical stability conditions for discrete-time switched affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 64(11), 4705–4710.
- Egidio, L.N., Deaecto, G.S., and Barros, T.A. (2020b). Switched control of a three-phase ac–dc power converter. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 6471–6476.
- Magossi, R.F., Han, S., Machado, R.Q., Oliveira, V.A., and Bhattacharyya, S.P. (2020). Geometric-based PID control design with selective harmonic mitigation for DC–DC converters by imposing a norm bound on the sensitivity function. *IET Control Theory & Applications*, 14(19), 3330–3337.
- Nair, A.R., Smith, M., and Kamalasadnan, S. (2020). Optimization based integrated adaptive control architecture for grid connected inverter (gci). In *Proc. of the IEEE Energy Conversion Cong. and Expo.*, 3112–3118.
- Nam, N.N.N., Nguyen, N.D., Yoon, C., Choi, M., and Lee, Y.I. (2021). Voltage sensorless model predictive control for a grid-connected inverter with LCL filter. *IEEE Trans. Ind. Electron.*
- Patino, D., Riedinger, P., and Iung, C. (2009). Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state. *International Journal of Control*, 82(7), 1357–1376.
- Sanchez, C.A., Santos, O.L., Prada, D.A.Z., Gordillo, F., and Garcia, G. (2019). On the practical stability of hybrid control algorithm with minimum dwell time for a dc–ac converter. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 27, 2581–2588.
- Scharlau, C.C., De Oliveira, M.C., Trofino, A., and Dezuo, T.J. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. *Systems & Control Letters*, 68, 1–8.
- Yan, X., Shu, Z., Sharkh, S.M., Wu, Z., and Chen, M.Z. (2016). A novel current control strategy for three-phase grid-connected inverters. In *Proc. of the Chinese Control Conference*, 8789–8794.