

## Síntese Estruturada para Controladores Preditivos LPV<sup>\*</sup>

Marcelo M. Morato<sup>\*,\*\*</sup> Julio E. Normey-Rico<sup>\*</sup> Olivier Sename<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Dept. de Automação e Sistemas (DAS), Univ. Fed. de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brazil. (marcelomnm@gmail.com)

<sup>\*\*</sup> Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP<sup>†</sup>, GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France. <sup>†</sup>Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes.

---

**Abstract:** We present a novel framework for the design of dissipative Model Predictive Control (MPC) schemes for Linear Parameter Varying (LPV) systems. The synthesis directly considers both time- and frequency-domain specifications, as well as optimal performance costs. The novelty is the retraction of parameter-dependency from the optimisation problem, enable by a stabilising LPV feedback. Moreover, the framework suppresses the use of terminal ingredients, since the LPV feedback ensures input-to-state stability by design. The method is compared to a standard min/max MPC, exhibiting good performances with reduced computational load.

**Resumo:** Apresentamos uma estrutura para o projeto de Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC) para sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV). O método considera diretamente especificações no domínio do tempo e da frequência, bem como custos de desempenho quadráticos. A novidade é o desacoplamento da dependência dos parâmetros de agendamento do problema de otimização, viabilizada por uma realimentação estabilizante LPV. Além disso, a estrutura elimina os ingredientes terminais, uma vez que a realimentação LPV garante estabilidade entrada-estado por construção. O método proposto é comparada com um MPC robusto (min/max), garantindo bom desempenho com carga computacional reduzida.

*Keywords:* Model Predictive Control; Linear Parameter Varying Systems; Structured Synthesis; Time-Domain Specifications; LMIs.

*Palavras-chaves:* Análise de robustez; Controle Preditivo baseado em modelo; Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes; Restrições Quadráticas Integrais; Dissipatividade.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC) é uma técnica bem estabelecida e amplamente difundida para a regulação de sistemas sujeitos a restrições. Todavia, a aplicação de algoritmos MPC com modelos não lineares não é nada trivial, apresentando custo numérico elevado, portanto sendo impeditiva para operações embarcadas.

No caso de sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV), os algoritmos MPC devem ser formulados através do ferramental de controle robusto, tais como conjuntos terminais invariantes e zonótopos (para estabilidade e factibilidade recursiva), ou como procedimentos de otimização sub-ótimos (almejando cômputo rápido), uma vez que os sinais de agendamento LPV são, por definição, desconhecidos no futuro. Esta incerteza é a principal vulnerabilidade de algoritmos LPV MPC, tal como argumentamos em (Morato et al., 2020). As alternativas possíveis são: extrapolação das sequências futuras de agendamento (Cisneros and Werner, 2017) ou o uso de previsões nominais congeladas (Morato et al., 2019b). Todavia, devido às discrepâncias entre as trajetórias reais e nominais, tais proce-

dimentos podem resultar em imperfeições no desempenho ou em conservadorismo excessivo, fatores depreciativos.

Visando superar estes impedimentos, propomos uma ferramenta para a síntese estruturada de controlares predictivos, com uma otimização resultante independente das variáveis de agendamento futuras. A estrutura proposta considera o uso de um modelos Lineares Invariante no Tempo (LITs). Ademais, dividimos a ação de controle em uma parcela LPV estabilizante e em uma parcela MPC orientada somente em alavancar o desempenho do processo em malha fechada. Questões atreladas à otimalidade são atribuídas ao canal MPC, ao passo que especificações no tempo e na frequência são embutidas na síntese LPV.

A estrutura proposta é flexível e não requer o uso de ingredientes terminais, uma vez que o canal de realimentação LPV assegura estabilidade entrada-estado e apenas alguns critérios de dissipatividade da função custo do MPC devem ser verificados, tal como em (Cisneros and Werner, 2018). A síntese offline é linear nas variáveis de decisão, ao passo que a parte online consiste na solução de um único Programa Quadrático (QP) por período de amostragem.

### 2. CONFIGURAÇÃO DO PROBLEMA

Consideramos o seguinte modelo LPV:

---

<sup>\*</sup> Este trabalho foi financiado pelo CNPq (304032/2019 – 0) e pelo projeto europeu ITEA3 (15016, EMPHYSIS). Os autores agradecem o Prof. C. Scherer pelas sugestões.

$$x(k+1) = A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \quad (1)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  os estados (mensuráveis) e  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  as entradas de controle. Ademais,  $\rho(k) \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_\rho}$  representa as variáveis de agendamento, mensuráveis e limitadas a cada instante de tempo  $k$ . Note que  $\rho$  é desconhecido para qualquer instante de tempo futuro ( $k+j$  com  $j > 0$ ). Assumimos que  $\mathcal{P}$  é dado por:  $\{\rho_j \in \mathbb{R} \mid \underline{\rho}_j \leq \rho_j \leq \bar{\rho}_j, \forall j \in \mathbb{Z}_{[1, n_\rho]}\}$ .

*Hipótese 1.* As variáveis de agendamento possuem variação limitada entre amostras, ou seja  $\delta\rho(k+1) = \rho(k+1) - \rho(k) \in \delta\mathcal{P}$ , com  $\delta\mathcal{P} := \{\delta\rho_j \leq \delta\rho_j \leq \bar{\delta\rho}_j, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_\rho]}\}$ .

Este processo deve ser regulado de tal forma que as trajetórias sejam conduzidas à origem de forma admissível. Este objetivo é sintetizado em:

*Especificação 1.* Os estados devem ser regulados de tal forma que  $x(k) \in \mathcal{X}$  e  $u(k) \in \mathcal{U}$ , para toda amostra  $k \in \mathbb{N}$ . Os conjuntos são:  $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \|x_j\| \leq \bar{x}_j, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_x]}\}$  e  $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \mid \|u_j\| \leq \bar{u}_j, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}\}$ .

**A Estratégia de Controle:** A lei de controle é dada pela soma de uma realimentação estabilizante LPV com um sinal de controle preditivo:  $u(k) := u_{LPV}(k) + u_{MPC}(k)$ . O esquema da Fig. 1 representa a proposta da configuração de síntese. Note que esta estrutura é coerente com aquelas apresentadas na literatura, tal como em (Hanema et al., 2017), nas quais um laço estabilizante LPV é incorporado a uma interconexão MPC.

Levando em conta as hipóteses apresentadas, o canal LPV é definido como uma realimentação de estados paramétrica-dependente, ou seja,  $u_{LPV}(k) := K(\rho(k))x(k)$ . Ademais, o sinal de controle preditivo é obtido através de um problema de otimização agendado por ponto de operação, ou seja,  $u_{MPC}(k) := P_{N_p}(x(k), \rho(k))$ . Note que  $P_{N_p}(\cdot)$  é agendado pela variável  $\rho(k)$ , que determina o modelo LIT usado para a previsão do processo.

**Declaração do Problema:** O objetivo deste artigo é projetar o ganho de realimentação de estado LPV de tal forma que:

- A dinâmica de malha fechada do sistema seja assintoticamente estável;
- Especificações de alocação de polos (no domínio do tempo) sejam satisfeitas pela dinâmica de malha fechada;
- O problema de otimização não requeira os valores futuros de  $\rho$  e, ao mesmo tempo, garanta factibilidade recursiva dentro de um conjunto fechado  $\mathbf{X}_f$ ;
- A Especificação 1 seja garantida.

*Nota 1.* Neste trabalho, desconsideramos perturbações que afetem as dinâmicas do processo. Se for o caso, a síntese da região de atração  $\mathbf{X}_f$  deve levá-las em conta, tal como no caso de invariantes robustos.

### 3. CONFIGURAÇÃO DO MPC

No método proposto, buscamos desvincular a dependência nos parâmetros de agendamento  $\rho$  do problema de otimização do MPC. Para tal, usamos um abordagem de agendamento por ponto de operação, considerando um modelo LIT a cada amostra de tempo  $k$ , sendo este o modelo da Eq. (1) congelado com  $\rho(k+i) = \rho(k), \forall i \in \mathbb{N}_{[0, N_p-1]}$ .

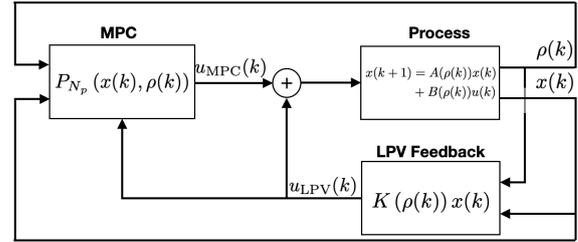


Figura 1. Estrutura de Síntese LPV MPC.

Ao usarmos esta formulação, a complexidade do problema de otimização  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  é reduzida à complexidade equivalente a um único QP, numericamente barato e, portanto, possibilitando aplicações em tempo real.

Todavia, ao usarmos um modelo de previsão LIT, aparecem discrepâncias entre a trajetória real do sistema e aquelas previstas pelo modelo congelado (e pelo MPC). O efeitos desses erros no desempenho em malha fechada podem ser mitigados, desde que o processo seja estável e  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  MPC seja factível para toda amostra  $k$  (Santos et al., 2019). Garantimos estas propriedades (estabilidade e factibilidade) através da síntese da realimentação LPV, descrita na Seção 4.

**O Problema de Otimização:** MPC é baseado em uma função custo que incorpora os objetivos de desempenho dentro de um horizonte de previsão de  $N_p$  passos à frente do atual instante de amostragem  $k$ . A implementação de  $P_{N_p}(\cdot)$  reside na minimizando desta função de custo com relação a uma sequência futura de sinais de controle  $U_k = \text{col}\{u_{MPC}(k+j-1|k)\}^T, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$ , usando o modelo de previsão (Eq. (1) congelada com  $\rho(k+i) = \rho(k)$ ) para calcular as instâncias das variáveis ao longo do horizonte.

A otimização também inclui restrições operacionais das variáveis do processo (Especificação 1), visando uma operação admissível. Por conseguinte, usamos uma restrição de entrada adaptada  $u_{MPC}(k+i|k) \in \mathcal{U}^\ominus, \forall i \in \mathbb{N}_{[0, N_p-1]}$ , com  $\mathcal{U}^\ominus := \mathcal{U} \ominus K(\rho(k))x(k+i|k)$ , sendo esta uma condição de suficiência para garantir as especificações no sinal entrada. Discutiremos a validade desta restrição, tal como a limitação de  $u_{MPC} + u_{LPV}$  dentro do conjunto  $\mathcal{U}$ , na sequência (Lema 2).

Consideramos a seguinte função de custo quadrática:  $J_k = \sum_{i=1}^{N_p} \|x(k+i|k)\|_Q^2 + \|u_{MPC}(k+i-1|k)\|_R^2$ , sendo  $Q$  e  $R$  matrizes de ponderação positivo definidas. A cada nova amostra  $k$ ,  $x(k)$  é medido e  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  é resolvido, cuja solução é  $U_k^*$ . A primeira entrada deste vetor  $u_{MPC}(k|k) = [1_{n_u \times 1} \ 0 \ \dots \ 0] U_k = I_U U_k$  é aplicada ao processo. Então, o horizonte “desliza” para a frente e o procedimento é atualizado.

O problema de otimização  $P_{N_p}(\cdot)$  corresponde ao seguinte QP agendado por ponto de operação, considerando que a realimentação  $u_{LPV}(k+i|k)$  é conhecida:

$$U_k^* = \arg \min_{U_k} J_k \quad (2) \quad \text{sendo}$$

$$\text{t.q. } \underbrace{x(k+i+1|k) = A(\rho(k))x(k+i|k)}_{\text{Modelo Congelado do Processo}} + B(\rho(k))u_{\text{MPC}}(k+i|k) + B(\rho(k))u_{\text{LPV}}(k+i|k), \forall i \in \mathbb{N}_{[1, N_p]},$$

$$\underbrace{u_{\text{MPC}}(k+i-1|k) \in \mathcal{U}^\ominus, \forall i \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}}_{\text{Sinal de Controle Admissível}},$$

$$\underbrace{x(k+i|k) \in \mathcal{X}}_{\text{Operação de Estados Admissíveis}}, \forall i \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}.$$

Este problema de otimização garante que o objetivo de regulação seja estabelecido com uma trajetória entrada-estados admissível, respeitando a Especificação 1.

**Factibilidade Recursiva:** A solução do problema de otimização restrito  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  pode ser descrita por um operador não linear variante no tempo  $\phi(k)$  atrelado à matriz Hessiana  $H(\rho(k))$  e ao gradiente  $g(k)$  da função de custo do MPC  $J_k = (\frac{1}{2}U_k^T H U_k - U_k^T g(k) + \mathcal{D}(k))$ , sendo  $\mathcal{D}(k)$  um termo independente de  $U_k$ . Existe algum mapa não linear  $\phi(k) : g(k) \rightarrow U_k^*$  equivalente à solução do problema  $P_{N_p}(\cdot)$ . Desta forma, o sinal de controle resultante da otimização MPC é dado por  $u_{\text{MPC}}(k) = I_U \phi(k)$ .

A fim de garantirmos que o procedimento de otimização do MPC seja recursivamente factível, este operador não linear deve existir para todo  $x \in \mathbf{X}_f$  (região de factibilidade). Visando verificar esta propriedade, o modelo de predição agendado por pondo de operação (LIT congelado) é escrito da seguinte forma compacta  $\text{col}\{x(k+j|k)\} = \mathbf{A}_{\ell\rho(k)} x(k) + \mathbf{B}_{\ell\rho(k)} U_k$ , sendo  $A_\ell(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) \in$

$$\mathbf{A}_{\ell\rho} = [A_\ell(\rho)^T \ (A_\ell(\rho)^2)^T \ \dots \ (A_\ell(\rho)^{N_p})^T]^T,$$

$$\mathbf{B}_{\ell\rho} = \begin{bmatrix} B(\rho) & 0 & \dots \\ A_\ell(\rho)B(\rho) & B(\rho) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ A_\ell(\rho)^{N_p-1}B(\rho) & A_\ell(\rho)^{N_p-2}B(\rho) & \dots \end{bmatrix}.$$

Assim, fica estabelecido que  $H_\ell(\rho(k)) = 2(\check{R} + \mathbf{B}_{\ell\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{B}_{\ell\rho(k)})$

e  $g_\ell(k) = -2(\mathbf{B}_{\ell\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{A}_{\ell\rho(k)}) x(k)$ , sendo  $\check{Q}$  e  $\check{R}$  matrizes bloco-diagonais com  $Q$  e  $R$  repetidas  $N_p$  vezes na diagonal, respectivamente.

**Lema 1.** Factibilidade Recursiva de  $P_{N_p}(\cdot)$

O problema de otimização restrito da Eq. (2) é recursivamente factível para qualquer condição inicial  $x_0$  dada dentro do domínio de factibilidade  $\mathbf{X}_f$  se e somente se existir um mapa não linear  $\phi(k) : g_\ell(k) \rightarrow U_k^*$  tal que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ :

$$\phi^T(k) H_\ell(\rho) \phi(k) - \phi^T(k) g_\ell(k) \leq 0. \quad (3)$$

*Prova 1.* Vide (Heath et al., 2005, Result 1).  $\square$

**Corolária 1.** A factibilidade recursiva de  $P_{N_p}(\cdot)$  para qualquer condição  $x_0 \in \mathbf{X}_f$  pode ser verificada, alternativamente, se existir um mapa não linear complementar  $\phi(k) : g(k) \rightarrow U_k^*$  tal que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ :

$$\phi^T(k) H(\rho) \phi(k) - \phi^T(k) g \leq 0, \quad (4)$$

$$H(\rho(k)) = 2(\check{R} + \mathbf{B}_{\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{B}_{\rho(k)})$$

e  $g(k) = -2(\mathbf{B}_{\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{A}_{\rho(k)}) x(k)$ , com  $\mathbf{A}_\rho$  e  $\mathbf{B}_\rho$  idênticas a  $\mathbf{A}_{\ell\rho}$  e  $\mathbf{B}_{\ell\rho}$ , respectivamente, com  $A(\rho)$  substituindo  $A_\ell(\rho)$ .

*Prova 2.* Considere  $\omega^T = [x^T \ \phi^T]$  para reescrevermos as desigualdades (3)-(4) como:

$$\omega^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2(\mathbf{B}_{\ell\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{A}_{\ell\rho(k)}) & -H_\ell(\rho) \end{bmatrix} \omega \geq$$

$$\omega^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2(\mathbf{B}_{\rho(k)}^T \check{Q} \mathbf{A}_{\rho(k)}) & -H(\rho) \end{bmatrix} \omega \geq 0.$$

A existência de um mapa dissipativo  $\phi(k) : g(k) \rightarrow U_k^*$  que satisfaça a desigualdade (4) garante uma condição de suficiência para que a desigualdade (3) seja válida e, portanto, para que  $P_{N_p}(\cdot)$  seja recursivamente factível dentro de  $\mathbf{X}_f$ .

#### 4. PROCEDIMENTO DE SÍNTESE ESTRUTURADA

Considerando o problema de otimização MPC apresentado na Seção 3, o procedimento para a síntese do canal de realimentação  $u_{\text{LPV}}(k)$  é, agora, detalhado. Primeiramente, providenciamos os limites impostos para este canal.

**Lema 2.** Se o procedimento de otimização  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  é, de fato, factível, então, devido à admissibilidade da lei de controle  $u_{\text{MPC}} \in \mathcal{U}^\ominus$ , é imposto que o sinal de controle  $u = u_{\text{MPC}} + u_{\text{LPV}}$  seja contido em  $\mathcal{U}$ .

*Prova 3.* Considere que  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  seja factível. Use a equivalência  $\|I_j K(\rho)x\| \equiv \|I_j u_{\text{LPV}}\|$ . Portanto, obtemos  $\|I_j u_{\text{MPC}}\| \leq \bar{u}_j - \|I_j K(\rho)x\|, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}$ . Através da desigualdade triangular inferior, temos:  $\|I_j u_{\text{MPC}}\| + \|I_j u_{\text{LPV}}\| \geq \|I_j (u_{\text{MPC}} + u_{\text{LPV}})\|$ . Assim, obtemos  $\|I_j u\| \leq u_j$ , condição de necessidade para  $u \in \mathcal{U}$ , concluindo-se, portanto, esta demonstração.  $\square$

Do ponto de vista do canal de realimentação  $u_{\text{LPV}} = K(\rho)x$ , a seguintes dinâmicas são observadas:

$$x(k+1) = A(\rho)x(k) + B(\rho) \overbrace{u_{\text{MPC}}(k)}^{=I_U \phi(k)} + B(\rho)u_{\text{LPV}}(k) \quad (5)$$

Portanto, para verificarmos a factibilidade recursiva de  $P_{N_p}(x(k), \rho(k))$  para qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbf{X}_f$ , tal com a estabilidade entrada-estado das dinâmicas em malha fechada, usamos a seguinte representação da desigualdade (4):

$$[g^T(k) \ \phi^T(k)] \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{I} & -H(\rho) \end{bmatrix}}^{\Pi(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} g(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix}}_{z(k)} \geq 0. \quad (6)$$

Aplicando uma Transformação Linear Fracional (LFT) em (5), visando extrair a dependência não linear do canal  $\phi(k)$ , considerando  $z(k)$  como uma saída do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_\ell(\rho)x(k) + B_\ell(\rho)\phi(k), \\ z(k) = C_\ell(\rho)x(k) + D_\ell(\rho)\phi(k), \end{cases} \quad (7)$$

sendo  $B_\ell(\rho) = B(\rho)I_U$ ,  $C_\ell(\rho) = [2\mathbf{B}_\rho \check{\mathbf{Q}}\mathbf{A}_\rho \ 0]^T$ , e  $D_\ell = [0 \ \mathbb{I}]^T$ . Agora, basta verificarmos se o sistema representado pela LFT na Eq. (7) é assintoticamente estável para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ , a despeito da interconexão  $\phi(k) := [0 \ \mathbb{I}]z(k) = \phi_z z(k)$ .

A fim de garantirmos o objetivo de regulação, também consideramos que a realimentação LPV impõe que os polos (fixados) do sistema em malha fechada sejam sempre mais rápidos que  $\text{col}\{p_j\}$ ,  $j \in \mathbb{N}_{[1, n_x]}$ , para todos valores congelados de  $\rho \in \mathcal{P}$ . Esta especificação no domínio do tempo pode ser alternativamente representada através de um disco de alocação de polos  $\mathcal{R}(\varrho, \mu)$ , de raio  $\frac{1}{\varrho}$ , centrado em  $+\mu$ . Neste caso, a realimentação deve garantir que todos os autovalores (fixados) de  $A_\ell(\rho)$  encontram-se dentro de  $\mathcal{R}(\varrho, \mu)$ .

O Teorema a seguir, resultado principal deste trabalho, apresenta um conjunto de LMIs que garante que o problema investigado possui uma solução admissível:

*Teorema 1.* Considere que a Hipótese 1 é válida. Então, o sistema da Eq. (7), em malha fechada com a interconexão MPC na forma de  $P_{N_P}(\cdot)$ , é assintoticamente estável para qualquer condição inicial dentro de uma zona de factibilidade  $\mathbf{X}_f$ , com os autovalores (congelados) de malha fechada de  $A_\ell(\rho)$  alocados dentro do disco  $\mathcal{R}(\mu, \frac{1}{\varrho})$ , para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ , desde que exista uma matriz simétrica positivo definida paramétrico-dependente  $Y(\rho) : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x} = Y^T(\rho) > 0$ , uma matriz paramétrico-dependente retangular  $W(\rho) : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ , com  $W(\rho) = K(\rho)Y(\rho)$ , e um escalar  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$  tal que as LMIs (8)-(9) e a BMI (10) seja satisfeitas sob  $\min \log \det \{Y(\rho)\}$ , para todo  $\rho \in \mathcal{P}$  e todo  $\delta\rho \in \delta\mathcal{P}$ :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{x}_j^2 & I_j Y(\rho) \\ \star & Y(\rho) \end{array} \right] \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_x]}, \quad (8)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{u}_i^T & I_i W(\rho) \\ \star & Y(\rho) \end{array} \right] \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}, \quad (9)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] > 0. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ \begin{array}{c|c} Y(\rho) & (\varrho(A(\rho) - \mu\mathbb{I}_{n_x})Y(\rho) + \varrho B(\rho)W(\rho))^T \\ \star & Y(\rho + \delta\rho) \end{array} \right], \\ \mathcal{B} &= \left[ \begin{array}{c|c} 0 & (\varrho(A(\rho) - \mu\mathbb{I}_{n_x})Y(\rho) + \varrho B(\rho)W(\rho))^T \\ B_\ell(\rho) & -Y(\rho + \delta\rho) \end{array} \right], \\ \mathcal{C} &= \left[ \begin{array}{c|c} -\lambda\mathcal{G}(\rho)Y(\rho) & B_\ell^T(\rho) \\ \varrho(A(\rho) - \mu\mathbb{I}_{n_x})Y(\rho) + \varrho B(\rho)W(\rho) & -Y(\rho + \delta\rho) \end{array} \right], \\ \mathcal{D} &= \left[ \begin{array}{c|c} \lambda H(\rho) & B_\ell^T(\rho) \\ \star & -Y(\rho + \delta\rho) \end{array} \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\rho) = 4 \left( \mathbf{B}_\rho^T \check{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_\rho \right)^T \left( \mathbf{B}_\rho^T \check{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_\rho \right).$$

*Prova 4.* A validade deste teorema é demonstrada para cada LMI (8)-(10). O conjunto de estabilidade entrada-estado é definido como um elipsoide da seguinte forma:

$$\mathbf{X}_f : \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T Y^{-1}(\rho)x \leq 1\}.$$

Aplicando um complemento de Schur na LMI (8), obtemos

$$I_j^T(Y(\rho))I_j \leq \bar{x}_j^2.$$

Uma vez que a maior norma de  $Fx$  com um argumento  $x$  que pertence a um elipsoide  $x^T P x \leq 1$  é dada por  $\sqrt{F^T(P^{-1})F}$ , é imposto que a projeção  $I_j x$  (ou seja, o  $j$ -ésimo estado) é limitado em norma por  $\bar{x}_j$ , o que satisfaz a admissibilidade dos estados como previsto na Especificação 1. De forma análoga, aplicamos o mesmo procedimento para a LMI (9), usando a troca de variáveis  $W(\rho) = K(\rho)Y(\rho)$ , o que nos leva a:

$$(I_{\{i\}}K(\rho))(Y(\rho))(I_{\{i\}}K(\rho))^T \leq \bar{u}_i^2, \quad (11)$$

condição que implica que a projeção  $I_{\{i\}}K(\rho)x$  (ou seja, o  $i$ -ésimo sinal de controle LPV) seja limitado, em norma, por  $\bar{u}_i$ , satisfazendo, assim, o Lema 2.

Considere as seguintes dinâmicas de estado deslocadas:  $x(k+1) = \underbrace{\varrho(A_\ell(\rho) - \mu\mathbb{I}_{n_x})}_{A_\xi(\rho)}x(k) + B_\ell(\rho)\phi(k)$ . Se estas

trajetórias são assintoticamente estáveis, é imposto que a Eq. (7) seja assintoticamente estável (entrada-estados), possuindo autovalores (congelados) alocados dentro do disco  $\mathcal{R}(\mu, \frac{1}{\varrho})$ , tal como detalhado em (Morato et al., 2019a).

Considere a função de armazenamento  $V(x, k) = x^T P(\rho(k))x$ . A estabilidade de  $x$  pode ser avaliada se introduzirmos as trajetórias de estados nesta função de Lyapunov, verificando que  $V(x, k+1) - V(x, k) < 0$  para tais trajetórias. A notação da dependência em  $\rho$  é suprimida na sequência, por simplicidade. Usamos o super-índice  $+$  de forma a indicar a dependência em  $\rho + \delta\rho$ . Ademais, usamos  $\varrho(A - \mu\mathbb{I}_{n_x})Y + \varrho BW = A_\xi Y$ . Considerando  $\omega^T = [x^T(k) \ \phi(k)]^T$ , obtemos:

$$\omega^T \left[ \begin{array}{cc} P - A_\xi^T P^+ A_\xi & A_\xi^T P^+ B_\ell \\ \star & B_\ell^T P^+ B_\ell \end{array} \right] \omega > 0. \quad (12)$$

Considere o operador linear  $z := \alpha\omega$ . Então, a desigualdade (6) pode ser reescrita como:

$$\omega^T \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \mathcal{G}(\rho) & -H(\rho) \end{array} \right] \omega \geq 0. \quad (13)$$

Considerando um escalar  $\lambda > 0$ , é válido que (usando o “procedimento  $\mathcal{S}$ ”):

$$\left[ \begin{array}{cc} P^+ - A_\xi^T P^+ A_\xi & A_\xi^T P^+ B_\ell \\ B_\ell^T P^+ A_\xi - \lambda\mathcal{G}(\rho) & B_\ell^T P^+ B_\ell + \lambda H(\rho) \end{array} \right] > 0. \quad (14)$$

Multiplicando esta LMI pela esquerda e pela direita por  $\text{diag}\{Y \ \mathbb{I}\}$  e sua transposta, respetivamente, obtemos:

$$\left[ \begin{array}{cc} YY^T A_\xi^T Y^+ A_\xi Y & Y^T A_\xi^T P^+ B_\ell \\ B_\ell^T P^+ A_\xi Y - \lambda\mathcal{G}(\rho)Y & B_\ell^T P^+ B_\ell + \lambda H(\rho) \end{array} \right] > 0. \quad (15)$$

Aplicando um complementado de Schur sobre cada entrada desta BMI nos leva a desigualdade (10). Isto significa que a função de Lyapunov candidata  $V$  de fato implica na estabilidade das dinâmicas (deslocadas) do sistema e, portanto, para qualquer condição inicial  $x_0 \in \mathbf{X}_f = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T Y^{-1}(\rho)x \leq 1\}$ , o problema de otimização  $P_{N_P}(x(k), \rho(k))$  é recursivamente factível e as dinâmicas

de malha fechada são assintoticamente estáveis (entrada-estado), com os autovalores (congelados) de  $A_\ell(\rho)$  alocados dentro do disco  $\mathcal{R}(\varrho, \mu), \forall \rho \in \mathcal{P}$ . O argumento de minimização sobre  $\log \det \{Y(\rho)\}$  é usado para maximizar o volume da elipsoide  $\mathbf{X}_f$ .  $\square$

*Nota 2.* Tal como dispõe Yang et al. (2016), a bilinearidade da BMI (10) pode ser resolvida através de uma simples bisseção sobre o plano de otimização, uma vez que  $0 < \lambda \leq 1$ , por construção, convertendo, assim, esta desigualdade em uma LMI.

*Nota 3.* O Teorema 1 apresenta desigualdades matriciais de dimensão infinita, que devem ser validadas para todo  $\rho \in \mathcal{P}$  e todo  $\delta\rho \in \delta\mathcal{P}$ . Na prática, a solução pode ser obtida pela verificação das desigualdades em uma série finita de pontos discretos  $(\rho, \delta\rho)$  ao longo do plano  $\mathcal{P} \times \delta\mathcal{P}$ . Então, a solução obtida deve ser re-verificada em uma série finita mais densa. A dependência de  $Y(\cdot)$  em  $\rho$  pode ser retirada se o sistema for quadraticamente estabilizável.

*Nota 4.* O sistema LPV da Eq. (7) pode ser re-escrito como um sistema com dependência paramétrica extraída, na forma das Eqs. (16)-(17), sendo  $u_{\Theta,x} := \Theta_x y_{\Theta,x}$  e  $u_{\Theta,u} := \Theta_u y_{\Theta,u}$ .

$$x(k+1) = A^*x(k) + B^*u_{\text{LPV}}(k) \quad (16)$$

$$+ B_\phi^*\phi(k) + B_{\Theta}^*u_{\Theta,x}(k),$$

$$y_{\Theta,x}(k) = C^*x(k) + D^*u_{\text{LPV}}(k)$$

$$+ D_\phi^*\phi(k) + B_{\Theta}^*D_{\Theta,x}(k).$$

$$u_{\text{LPV}}(k) = E^*x(k) + F_{\Theta}^*u_{\Theta,u}(k), \quad (17)$$

$$y_{\Theta,u}(k) = G^*x(k) + H_{\Theta}^*u_{\Theta,u}(k).$$

Todas as matrizes com o super-índice  $\star$  são reais e constantes, uma vez que o operador LFT garante que a dependência paramétrica é extraída por uma interconexão externa  $\Theta_x$ , sobre as dinâmicas de estados, e por uma outra interconexão externa  $\Theta_u$ , sobre as dinâmicas do sinal de controle. A vantagem da síntese através da versão LFT do sistema é que o Teorema 1 é reformulado de forma independente dos parâmetros. Neste caso, o procedimento de síntese não mais requererá a verificação em uma sequência infinita de pontos ao longo do espectro de  $(\rho, \delta\rho)$ , mas apenas múltiplas instâncias das desigualdades do Teorema, definidas em termos de  $A^*, B^*$ , etc, tal como em (Cisneros and Werner, 2018; Veenman and Scherer, 2014).

*Nota 5.* O Teorema 1 pode ser diretamente extrapolado para o caso de incertezas aditivas limitadas sobre as dinâmicas da Eq. (7). Neste caso, devemos considerar a invariância robusta de  $\mathbf{X}_f$ , tal como em (Yang et al., 2016), ou a dissipatividade através de multiplicadores dinâmicos, tal como em (Veenman and Scherer, 2014).

*Nota 6.* O procedimento de síntese do método proposto requer que, primeiramente, calculemos a matriz de realimentação  $K(\rho)$  através do Teo. 1, de tal forma que o problema de otimização da Eq. (2) possa ser elaborado.

## 5. RESULTADOS

Nesta Seção, apresentamos um exemplo numérico da aplicação do método de controle proposto. Considere o sistema LPV politópico de (Lu and Arkun, 2000), com quatro estados, uma entrada de controle e dois parâmetros de

agendamento, descrito na forma da Eq. Eq. (1) com  $A(\rho) = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2$  e  $B(\rho) = \rho_1 B_0 + \rho_2 B_0$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,2730 & 0,0660 & 0,3021 & -0,5012 \\ 0,2717 & 0,4416 & 0,5602 & -0,7123 \\ 0,3051 & -0,7865 & 0,7651 & 0,3121 \\ 0,7962 & -0,1452 & 0,5231 & -0,9345 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,2093 & -0,1981 & -0,2394 & 0,5671 \\ 0,2717 & 0,4598 & 0,5602 & 1,3782 \\ -0,4700 & 0,6700 & -0,8600 & -1,2400 \\ 0,3456 & -0,6312 & -1,4594 & 1,8936 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = [0,2300 \ 0,2601 \ 0,1213 \ 1,3452]^T.$$

Este processo deve ser regulado de tal forma que  $\|x_j\| \leq 1.36, \forall j \in \mathbb{N}_{[1,4]}$  e  $\|u\| \leq 1.91$ . Os parâmetros de agendamento são exógenos ao processo, sendo  $\rho_1 \in [0, 5, 1]$  e  $\rho_2 = (1 - \rho_1) \in [0, 0, 5]$ . Além do mais, temos  $\|\delta\rho_j\| \leq 0,1 \forall j \in \mathbb{N}_{[1,2]}$ . Este sistema satisfaz todas as hipóteses de construção apresentadas na Sec. 2.

Usamos um horizonte de predição  $N_p = 5$  passos, além de matrizes de ponderação  $Q = \mathbb{I}_4$  e  $R = 1$ . O modelo usado para a síntese do controlador é idêntico ao modelo do processo, diferindo apenas no uso do "congelamento" para as predições do MPC. Consideramos o disco de alocação de polos  $\mathcal{R}(3, 0, 45)$ . As matrizes  $W(\rho)$  e  $Y(\rho)$ , usadas para calcular o ganho de realimentação  $K(\rho) = W(\rho)Y^{-1}(\rho)$  foram obtidas através da implementação<sup>1</sup> através de uma solução por bisseção do Teorema 1, com  $\lambda = 0, 3$ .

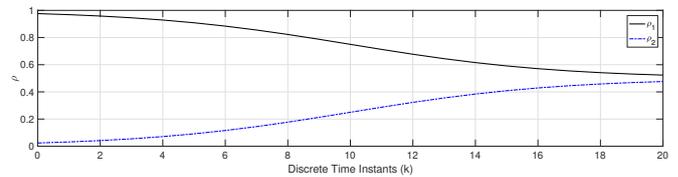


Figura 2. Parâmetros de Agendamento LPV.

Na Fig. 2, apresentamos a evolução dos parâmetros de agendamento ao longo de 20 amostras discretas. O sistema parte da seguinte condição inicial:

$$x(0) = [-0,3964 \ 0,4377 \ -1.0905 \ 1.1137]^T.$$

As trajetórias de malha fechada resultantes são comparadas com as trajetórias obtidas com um MPC LPV "clássico" usando uma formulação robusta min/max., tal como proposto em (Lu and Arkun, 2000), usando os mesmos parâmetros de ajuste. Escolhemos o método min-max para comparação devido à aceitação teórica e às garantias de estabilidade robusta para o caso LPV.

Na Fig. 3, apresentamos a evolução dos estados ao longo do tempo, ao passo que na Fig 4 incluímos o retrato de fase do sistema dentro da região admissível  $\mathcal{X}$  e da zona de estabilidade/factibilidade  $\mathbf{X}_f$ . Ressaltamos que ambas estratégias MPC conseguem estabilizar o sistema à origem, tal como garantir as restrições nos estados e nas entradas (ou seja,  $u \in \mathcal{U}$  e  $x \in \mathcal{X}$ , Especificação 1).

Visando ressaltar as vantagens do método proposto, quantificamos as trajetórias resultantes através de índices de

<sup>1</sup> Os resultados a seguir foram obtidos em um Macintosh de 2.4 GHz e 8 GB de RAM, usando Matlab, Yalmip, SDPT-3 e Gurobi.

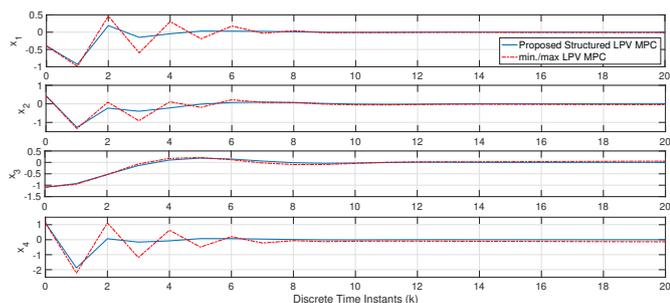


Figura 3. Evolução dos Estados.

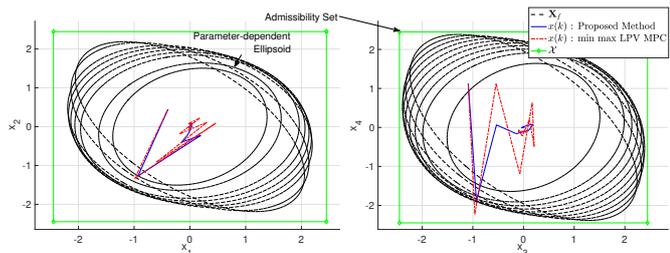


Figura 4. Trajetórias em Malha Fechada e Conjuntos de Admissibilidade  $\mathcal{X}$  e Estabilidade/ Factibilidade  $\mathbf{X}_f$ .

desempenho. Na Tabela 1, apresentamos os índices RMS ( $r\{\cdot\}$ ) para cada estado, tal como para a função de custo do MPC  $J_k$ , além do índice  $t_c$ , que indica o tempo médio necessário para o cômputo da ação de controle, dado em milissegundos. Usamos (M) para indicar os resultados do algoritmo min./max LPV MPC e (E) para indicar os resultados da abordagem estruturada.

Através destes índices, podemos concluir que o método proposto permite um desempenho levemente superior àquele obtido com o método robusto<sup>2</sup>. A melhoria no desempenho é proveniente do laço de estabilização LPV, que impõe as especificações de alocação de polos e “esconde” do problema de otimização MPC as variáveis futuras de otimização, sendo este agendado por ponto de operação. Ressaltamos também que o tempo médio necessário para o cômputo da lei de controle é muito menor com a estratégia proposta, uma vez que o modelo de predição é linear a cada período de amostragem. Este resultado indica a flexibilidade do método para aplicações em tempo real, embarcadas em microcontroladores.

Como um comentário final, ressaltamos que o uso de extrapolação das variáveis de agendamento pode ser considerado no método, refinando as predições do MPC. Ademais, a formulação estruturada permite considerar outros objetivos de desempenho através do canal de realimentação LPV, tal como minimização de normas  $H_2$  e  $H_\infty$ .

Tabela 1. Resultados de Desempenho

	$r\{x_1\}$	$r\{x_2\}$	$r\{x_3\}$	$r\{x_4\}$	$r\{J_k\}$	$t_c$
(M)	0,2736	0,3430	0,3192	0,6280	13.83	60,56
(E)	0,2083	0,2882	0,3119	0,4393	7.65	<b>7.04</b>

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, propusemos uma nova estrutura de síntese para algoritmos MPC para sistemas representados através

<sup>2</sup> Ajustado com os mesmos parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$ .

de modelos LPV. O método é concebido através da divisão da lei de controle em uma realimentação LPV estabilizante e uma lei preditiva complementar. O algoritmo de otimização do MPC é agendado por ponto de operação, sendo independente dos valores futuros das variáveis de agendamento LPV. Já o canal de realimentação LPV é usado para impor estabilidade e garantir especificações no domínio do tempo. A síntese é feita através de desigualdades matriciais bilineares paramétrico-dependentes. Através de ensaios em simulação, mostramos as vantagens do método, que possibilita aplicações tempo real, devido ao baixo custo do programa quadrático resultante.

## REFERÊNCIAS

- Cisneros, P.G. and Werner, H. (2017). Fast nonlinear MPC for reference tracking subject to nonlinear constraints via quasi-LPV representations. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 11601–11606.
- Cisneros, P.S. and Werner, H. (2018). A dissipativity formulation for stability analysis of nonlinear and parameter dependent MPC. In *Annual American Control Conference*, 3894–3899. IEEE.
- Hanema, J., Lazar, M., and Tóth, R. (2017). Stabilizing tube-based model predictive control: Terminal set and cost construction for LPV systems. *Automatica*, 85, 137–144.
- Heath, W.P., Wills, A.G., and Akkermans, J. (2005). A sufficient condition for the stability of optimizing controllers with saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(12), 515–529.
- Lu, Y. and Arkun, Y. (2000). Quasi-min-max MPC algorithms for LPV systems. *Automatica*, 36(4), 527–540.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2020). Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey. *Annual Reviews in Control*, 49, 64 – 80.
- Morato, M.M., Nguyen, M.Q., Sename, O., and Dugard, L. (2019a). Design of a fast real-time LPV model predictive control system for semi-active suspension control of a full vehicle. *Journal of the Franklin Institute*, 356(3), 1196–1224.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2019b). Novel qLPV MPC design with least-squares scheduling prediction. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28), 158–163.
- Santos, T.L.M., Bonzanini, A.D., Heirung, T.A.N., and Mesbah, A. (2019). A constraint-tightening approach to nonlinear model predictive control with chance constraints for stochastic systems. In *American Control Conference*, 1641–1647. IEEE.
- Veenman, J. and Scherer, C.W. (2014). IQC-synthesis with general dynamic multipliers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(17), 3027–3056.
- Yang, W., Gao, J., Feng, G., and Zhang, T. (2016). An optimal approach to output-feedback robust model predictive control of LPV systems with disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(15), 3253–3273.