

Aspectos práticos sobre a análise e controle de um Veículo Auto-Equilibrante

Leonardo J. Fiori* Rômulo L. Milhomem*

* *Curso de Engenharia de Controle e Automação, Instituto Federal de Santa Catarina, SC, (e-mail: leonardo.jf@aluno.ifsc.edu.br, romulo.milhomem@ifsc.edu.br).*

Abstract: This paper presents the study of the mathematical model for a self-balancing system, using the Euler-Lagrange methodology. The differential of the model studied is the possibility of making curves, adding a new degree of freedom to the system. The design and implementation of a control architecture that enable the stability of the system and guarantees the operation was also carried out, besides the identification of the physical parameters of the prototype, the construction of an algorithm for signal acquisition, and the implementation of the designed controller. Thus, with the practical application of the algorithm, it was possible to perform analyses on the responses of the system variables in relation to computer simulations, in order to verify whether the mathematical model satisfies the control objectives.

Resumo: Este trabalho apresenta o estudo do modelo matemático para um sistema auto-equilibrante, utilizando a metodologia de Euler-Lagrange. O modelo estudado tem por diferencial a possibilidade de realização de curvas, acrescentando um novo grau de liberdade ao sistema. Também foi realizado o projeto e implementação de uma arquitetura de controle que possibilite a estabilidade do sistema e que garanta o funcionamento do protótipo, além da identificação de seus parâmetros físicos, a construção de um algoritmo para a aquisição dos sinais, e implementação do controlador projetado. Dessa forma, com a aplicação prática do algoritmo, foi possível realizar análises sobre as respostas das variáveis do sistema em relação às simulações computacionais, a fim de verificar se o modelo matemático satisfaz os objetivos de controle.

Keywords: Assistive technologies, Self-balancing System, Euler-Lagrange Equations.

Palavras-chaves: Tecnologias assistivas, Sistema de Auto-Equilíbrio, Equações de Euler-Lagrange.

1. INTRODUÇÃO

O trânsito nas calçadas das vias públicas é dificultado pela presença de diversos tipos de obstáculos. Para cadeirantes estes obstáculos são acrescidos pelas inclinações das ruas e calçadas que comprometem sua postura. Para auxiliar a inclusão de pessoas com deficiência existem as tecnologias assistivas, que são voltadas a diminuir suas dificuldades de viver e de conviver em sociedade. Classificado como tecnologia assistiva está o emprego de cadeiras de rodas, equipamento que auxilia pessoas com dificuldade de locomoção a se deslocarem nos espaços no seu cotidiano.

Com a disseminação dos conceitos sobre veículos auto-equilibrantes, houve também a melhoria significativa no conforto do deslocamento de cadeira de rodas, por exemplo a empresa *Genny Mobility* que modificou o *Segway* adaptando às necessidades do cadeirante, usando controle de estabilidade com o movimento de arfagem, como o pêndulo invertido sobre duas rodas (Mobility, 2021). O equacionamento e desenvolvimento de sistemas de equilíbrio apresentaram um aumento de publicações durante a metade da década de 2000. Recentemente, plataformas robóticas de equilíbrio pendular têm sido desenvolvidas com aplicações em diversas áreas, sendo o desenvolvimento

de cadeiras de rodas uma das aplicações (Kim et al., 2011) (Kawamura and Murakami, 2011).

Trabalhos recentes mostram a evolução do sistema e sua aplicabilidade a tecnologias assistivas, como em Kawamura and Murakami (2011), no qual foi desenvolvido um sistema de controle de estabilidade para cadeiras de rodas baseado no distúrbio do ângulo de inclinação frontal. Em Tamiozzo and Milhomem (2018), é apresentado a construção do protótipo, bem como a modelagem através do método lagrangeano e a análise de duas técnicas diferentes de controle. Já em Serafin et al. (2019), é apresentado uma nova abordagem do modelo matemático, expondo uma variável de controle para a realização de curvas e não apenas de equilíbrio lateral, apresentando diversos métodos de controle para diferentes modos de operação do protótipo. Da mesma forma, Witzand (2009) apresenta a modelagem e controle de um veículo no formato de LEGO® e apresenta também a variável de controle para curvas.

Protótipo de veículos auto-equilibrantes, baseado no princípio do pêndulo invertido são constantemente abordados na literatura técnica, como em Cardozo and Vera (2012) e Bonales Valencia et al. (2014), que mostram a construção e análise desse tipo de veículo. O desenvolvimento de protótipos semelhantes, voltados à tecnologias assistivas,

é discutido em Alqudah et al. (2016) e Serafin et al. (2019), que mostram a construção, análise e controle de veículos auto-equilibrantes voltados a cadeirantes. Assim, este trabalho tem como tema o sistema desenvolvido em Fiori et al. (2019), que apresenta o projeto de um protótipo de veículo auto-equilibrante voltado ao atendimento do público cadeirante, o qual será brevemente apresentado na seção seguinte.

Dessa forma, o presente trabalho visa contribuir no aspecto da modelagem dinâmica da planta desenvolvida em Fiori et al. (2019) através das equações de Euler-Lagrange a fim de obter um modelo para realizar o segmento de trajetória (curvas) em conjunto com o equilíbrio, a movimentação em linha reta e controle de velocidade das rodas do protótipo, como propõe Witzand (2009), bem como a simulação e validação dos parâmetros para o modelo encontrado e apresentar o projeto uma lei de controle que busque satisfazer a premissa de estabilidade assintótica da planta. Adicionalmente, busca-se refletir sobre as dificuldades enfrentadas no desenvolvimento do protótipo, algumas ainda não superadas.

Assim, a seção 2 apresenta o sistema físico em que será desenvolvido esse trabalho. Na seção 3 será apresentada a modelagem matemática do sistema com base nas equações de Euler-Lagrange desenvolvido em Witzand (2009). Os parâmetros físicos e o modelo numérico são apresentados na seção 4. A seção 5 trata sobre o projeto do controlador desenvolvido. Na seção 6 são apresentados os resultados obtidos a partir dos cenários de testes. Por fim, as conclusões do trabalho, dificuldades e perspectivas futuras são apresentadas.

2. PROTÓTIPO DA CADEIRA DE RODAS

O protótipo mecânico desenvolvido em Fiori et al. (2019) é apresentado Figura 1, o qual tem a estrutura baseada em outros modelos de veículos auto-equilibrantes, como o próprio *Segway* e a cadeira comercial *Mobility* (2021), possuindo apenas duas rodas para movimentação.

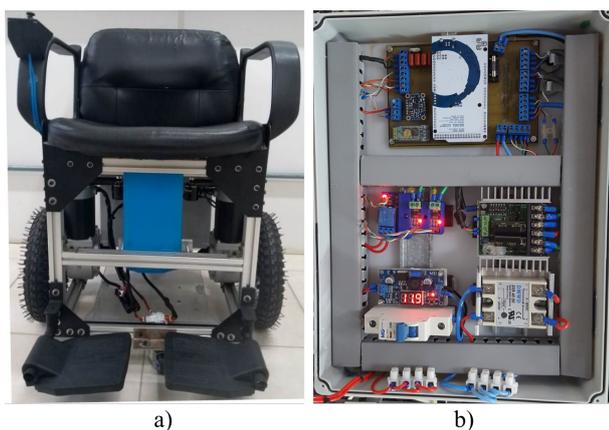


Figura 1. a) Visão frontal do protótipo. b) Componentes do painel elétrico.

O protótipo tem por objetivo o equilíbrio em apenas duas rodas, movimentar-se em linha reta e a realização de curvas, sendo necessário a aquisição de pelo menos três medidas de sinais referentes a: posição linear da cadeira

(θ); os deslocamentos angulares no sentido longitudinal (ψ) e lateral (ϕ), conforme a Figura 3. Com a leitura desses três sinais de posição, é possível obter as velocidades através de filtros implementados no algoritmo de funcionamento e, assim, obter todos os sinais necessários para trabalhar com o protótipo.

Na Figura 2, é apresentado um diagrama de interligação do protótipo, que conta com uma bateria de lítio de 24V para a alimentação dos motores e do sistema, um drive *Sabertooth 2x25* para acionamento dos motores e um microcontrolador *Atmega2560* embarcado na plataforma *Arduino Mega*, no qual também estão o algoritmo de aquisição de dados e de controle.

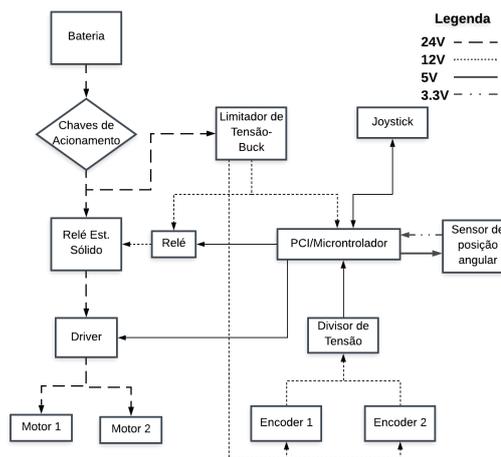


Figura 2. Diagrama de interconexão.

O protótipo conta com dois motores de corrente contínua de 24V e 300W que possuem redução de 1 : 28, com um *encoder* incremental para cada motor e, através de uma transmissão por polia e correia, é realizada a aquisição do sinal de posição linear.

Para medir os deslocamentos angulares longitudinal e lateral é usado o sensor *BNO055* que consolida os dados dos acelerômetros e giroscópios e os envia a partir de um protocolo serial ao microcontrolador *ARM® Cortex®-M0* que está presente no encapsulamento, juntamente com os demais sensores. Assim, tem-se os sinais das posições necessárias para o modelo matemático apresentado na seção seguinte, bem como um *hardware* estruturado para a realização deste estudo.

3. MODELAGEM DINÂMICA

A etapa de modelagem dinâmica foi dividida em três subseções visando explorar a metodologia utilizada no desenvolvimento do modelo matemático apresentado em Witzand (2009).

3.1 Análise de Forças e Sistema de Equações

Nessa subseção, é apresentado o modelo matemático do sistema físico presente no protótipo, utilizado nessa pesquisa. O protótipo apresentado na Figura 1, tem sua representação física mostrado na Figura 3, onde se tem um sistema de um pêndulo invertido sobre duas rodas.

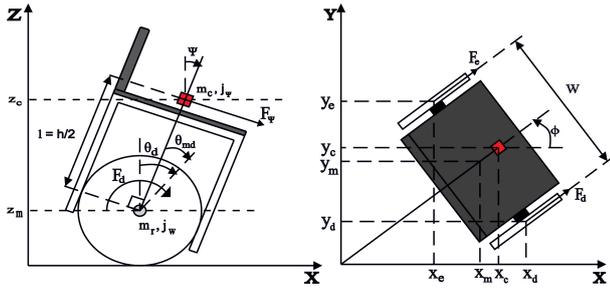


Figura 3. Representação do modelo físico.

Para efeitos de nomenclaturas, cálculos e determinação da correlação física entre as variáveis que compõem o modelo físico do sistema tem-se o Quadro 1 que apresenta os símbolos utilizados.

Quadro 1. Variáveis e Constantes do Sistema.

Símbolo	Descrição
θ	Posição média das rodas
ψ	Deslocamento angular no sentido longitudinal
ϕ	Deslocamento angular no sentido lateral
θ_m	Ângulo do motor
g	Aceleração da gravidade
m_r	Massa da roda
m_c	Massa do corpo
r	Raio da roda
w	Largura do corpo
d	Profundidade do corpo
h	Altura do corpo
l	Distância ao centro de massa
j_i	Momento de inércia do corpo i
n	Relação de transmissão
k_t	Constante de torque do motor
k_b	Constante de força contra-eletromotriz
f_m	Coefficiente de atrito entre corpo e motor
f_w	Coefficiente de atrito entre roda e chão

Uma das abordagens utilizadas para encontrar o modelo matemático de um sistema composto como o pêndulo invertido é o chamado método de Euler-Lagrange. Esse método permite equacionar o sistema de uma forma mais econômica no que diz respeito a escrita pois, envolve o número mínimo de coordenadas, bastando lidar com funções escalares de energia (Lemos, 2007).

Dessa forma, a partir da representação física apresentada na Figura 3, foram aplicadas as formulações de Lagrange resultando nas equações dos eixos x, y e z , conforme apresentado em Witzand (2009), fazendo uso das leis da mecânica clássica que estão implícitas no método Lagrangeano. O equacionamento para o eixo x do sistema é dado de (1) a (5) e para o eixo y (6) a (10). Os subíndices d e e representam direita e esquerda, respectivamente. Há ainda o subíndice c , que se refere ao centro de massa do protótipo, e m , que diz respeito ao ponto médio do protótipo.

x	y
$x_m = \int \dot{x}_m dt$ (1)	$y_m = \int \dot{y}_m dt$ (6)
$\dot{x}_m = r\dot{x} \cos \phi$ (2)	$\dot{y}_m = r\dot{y} \sin \phi$ (7)
$x_e = x_m - \frac{w}{2} \sin \phi$ (3)	$y_e = y_m + \frac{w}{2} \cos \phi$ (8)
$x_d = x_m + \frac{w}{2} \sin \phi$ (4)	$y_d = y_m - \frac{w}{2} \cos \phi$ (9)
$x_c = x_m + l \sin \psi \cos \phi$ (5)	$y_c = y_m + l \sin \psi \sin \phi$ (10)

Para o eixo z , o equacionamento é apresentado na Equação (11). Como não há variação de altura, \dot{z}_m é considerado

como 0.

$$z_m = r, \dot{z}_m = 0, z_e = z_m, z_d = z_m, z_c = z_m + l \cos \psi, \quad (11)$$

com θ e ϕ apresentados na Equações (12) e (13).

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_d + \theta_e), \quad (12)$$

$$\phi = \frac{r}{w}(\theta_d - \theta_e). \quad (13)$$

3.2 Formulação das Equações de Movimento de Lagrange

Ao usar formulação Lagrangeana, é preciso relacionar as energias cinéticas translacional, descrita por (14), e rotacional em (15), bem como as energias potenciais representadas em (16). Assim, convencionando o sinal positivo com as rodas girando no sentido horário, fazendo com que a cadeira seja impulsionada no sentido positivo do eixo x (Figura 3):

$$T_1 = \frac{1}{2}m_r(\dot{x}_e^2 + \dot{y}_e^2 + \dot{z}_e^2) + \frac{1}{2}m_r(\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2 + \dot{z}_d^2) + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2), \quad (14)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}j_w\dot{\theta}_e^2 + \frac{1}{2}j_w\dot{\theta}_d^2 + \frac{1}{2}j_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}j_\phi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}n^2j_m(\dot{\theta}_e - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}n^2j_m(\dot{\theta}_d - \dot{\psi})^2, \quad (15)$$

$$U_1 = m_rgz_e + m_rgz_d + m_cgz_c. \quad (16)$$

Para obter a função de energia de Lagrange (L), é preciso substituir as respectivas derivadas e relações necessárias em (14) a (16), gerando (17)

$$L = T_1 + T_2 - U_1. \quad (17)$$

Consequentemente a dinâmica do protótipo é determinada através da formulação das equações de movimento de Lagrange e ficam como (18), (19) e (20)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = F_\psi, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = F_\phi. \quad (20)$$

Onde F_θ , F_ψ e F_ϕ são as forças referentes a cada variável analisada. Realizando as derivadas em relação as variáveis indicadas, o modelo não-linear do sistema fica descrito por (21), (22) e (23).

$$\begin{aligned} & ((2m_r + m_c)r^2 + 2j_w + 2n^2j_m)\ddot{\theta} \\ & + (rlm_c \cos \psi - 2n^2j_m)\ddot{\psi} - rlm_c\dot{\psi}^2 \sin \psi = F_\theta, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & (rlm_c \cos(\psi) - 2n^2j_m)\ddot{\theta} + (m_cl^2 + j_\psi + 2n^2j_m)\ddot{\psi} \\ & - m_cl^2\dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi - m_cgl \sin \psi = F_\psi, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m_rw^2}{2} + m_cl^2 \sin \psi + \frac{w^2}{2r^2}(j_w + n^2j_m) + j_\phi\right)\ddot{\phi} \\ & + 2m_cl^2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \psi \cos \psi = F_\phi, \end{aligned} \quad (23)$$

onde o vetor de forças relacionadas as rodas é da forma

$$\begin{aligned} F_d &= nk_t i_d + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_d) - f_\omega \dot{\theta}_d \\ F_e &= nk_t i_e + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_e) - f_\omega \dot{\theta}_e; \end{aligned} \quad (24)$$

$$F_\psi = -nk_t i_e - nk_t i_d - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_e) - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_d), \quad (25)$$

$$F_\theta = F_e + F_d; F_\psi = F_\psi; F_\phi = (w/2r)(F_d - F_e). \quad (26)$$

As variáveis i_d e i_e são as correntes elétricas do motor direito e esquerdo e F_d e F_e são as forças aplicadas as rodas direita e esquerda. As correntes elétricas provêm da modelagem matemática de um motor de corrente contínua convencional.

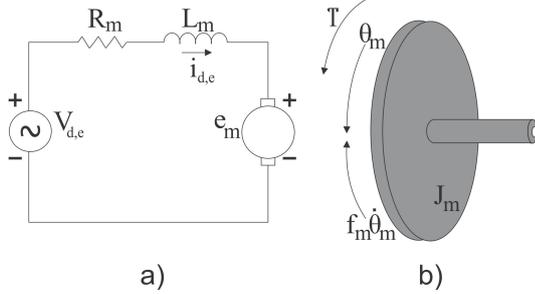


Figura 4. Motor de corrente contínua: a) Circuito elétrico da armadura; b) Diagrama de corpo livre do rotor.

Para o modelo dos atuadores do sistema, considera-se o diagrama da Figura 4. Assim, partindo-se da análise do circuito e da dinâmica de movimento das Figuras 4a) e 4b), respectivamente, e considerando que a indutância do motor é muito pequena e tem uma dinâmica muito mais rápida que o restante do sistema, não sendo considerada na análise, a corrente elétrica nos motores é dada em (27).

$$i_{d,e} = \frac{V_{d,e} + k_b \dot{\psi} - \dot{\theta}_{d,e}}{R_m}. \quad (27)$$

As forças referentes a θ, ψ e ϕ ficam na forma de (28), (29) e (30), respectivamente:

$$F_\theta = \alpha(V_e + V_d) + 2\beta\dot{\psi} - 2(\beta + f_\omega)\dot{\theta}, \quad (28)$$

$$F_\psi = -\alpha(V_e + V_d) - 2\beta + 2\beta\dot{\theta}, \quad (29)$$

$$F_\phi = (w^2/2r^2)\alpha(V_d - V_e) - (w^2/2r^2)\dot{\phi}(\beta + f_\omega), \quad (30)$$

sendo, a título de simplificações, $\alpha = (nk_t)/R_m$, $\beta = (nk_t k_b)/R_m + f_m$.

3.3 Linearização e Representação em Espaço de Estados

Empregando aproximações em séries de Taylor até a primeira ordem em torno de $x_l = 0$, como ponto de operação com $x_l = \psi_0, \phi_0$ e θ_0 , tem-se as aproximações em (31), e, com isso, o sistema linearizado de acordo com (32), (33) e (34).

$$\sin x_l = x_l, \cos x_l = 1, \dot{x}_l^2 = 0, \quad (31)$$

$$\sin x_l^2 = 0, \sin x_l \cos x_l = 0.$$

$$\begin{aligned} ((2_m r + m_c)r^2 + 2j_\omega + 2n^2 j_m)\ddot{\theta} + (r l m_c - 2n^2 j_m)\ddot{\psi} \\ = \alpha(V_e + V_d) + 2\beta\dot{\psi} - 2(\beta + f_\omega)\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (r l m_c - 2n^2 j_m)\ddot{\phi} + (m_c l^2 + j_\psi + 2n^2 j_m)\ddot{\psi} - m_c g l \psi \\ = -\alpha(V_e + V_d) - 2\beta + 2\beta\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} ((m_r w^2/2) + (w^2/2r^2)(j_\omega + n^2 j_m) + j_\phi)\ddot{\phi} \\ = (w^2/2r^2)\alpha(V_d - V_e) - (w^2/2r^2)\dot{\phi}(\beta + f_\omega). \end{aligned} \quad (34)$$

Posteriormente, deseja-se apresentar o sistema de equações em espaço de estados na forma de (35)

$$S = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \quad (35)$$

em que: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz associada aos estados do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ às entradas e $C \in \mathbb{R}^{w \times n}$ é associada as saídas desejadas. Para o modelo do sistema em estudo, as dimensões das matrizes associadas são $n, m, w = 6, 2, 3$. Os vetores x e u representam o vetor de estados definido como $x' = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]'$ e a entrada de controle em que $u' = [V_d \ V_e]'$, que indica a tensão aplicada ao motor direito e esquerdo.

Assim, realizando as substituições necessárias, isolando as variáveis de interesse e usando $c_a = r l m_c$, $p_a = 2n^2 j_m$, $d_a = (2m_r + m_c)r^2$, $\Gamma = m_c l^2 + j_\psi + p_a$, $\Lambda = d_a + p_a + 2j_\omega$, $\varpi = (m_r w^2)/2 + (w^2/2r^2)(j_\omega + n^2 j_m) + j_\phi$ e $q = \Lambda\Gamma - (c_a - p_a)^2$ apenas para simplificação da escrita, a representação do sistema é dada por (36) em que os termos das matrizes são dados nas Equações (37) e (38):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & -b_{31} \\ b_{41} & -b_{41} \\ 0 & 0 \\ b_{61} & -b_{61} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Dessa forma, é possível observar que o modelo obtido pode ser desacoplado em outros dois modelos, visto que, a parte que trata sobre o deslocamento angular lateral (ϕ), não tem ligação direta com os demais sinais do protótipo.

$$\begin{cases} a_{32} = -((m_c g l (c_a - p_a))/q), \\ a_{33} = -((2(\Gamma(\beta + f_\omega) + \beta(c_a - p_a)))/q), \\ a_{34} = ((2\beta(\Gamma + (c_a - p_a)))/q), a_{42} = ((m_c g l \Lambda)/q), \\ a_{44} = ((2(\beta\Lambda + (\beta + f_\omega)(c_a - p_a)))/q), \\ a_{65} = -((\beta + f_\omega)(w^2/2r^2))/\varpi, \\ a_{66} = 1/\varpi \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} b_{31} = ((\alpha(\Gamma + (c_a - p_a)))/q), \\ b_{41} = -((\alpha(\Lambda + (c_a - p_a)))/q), \\ b_{61} = -((w\alpha/2r)/h). \end{cases} \quad (38)$$

O modelo em espaço de estados apresentado na Equação (36) será utilizado ao longo do trabalho para o desenvolvimento do projeto do controlador. Os parâmetros numéricos do modelo serão discutidos na próxima seção e, posteriormente, os testes para a sua verificação.

4. PARÂMETROS DO MODELO

O modelo numérico pode ser alcançado por meio das informações em uma folha de dados de equipamentos, medições diretas e/ou calculando as grandezas de interesse.

Entretanto, alguns parâmetros podem não estar tão facilmente disponíveis, sendo necessário ensaios para realizar a identificação desses valores. O Quadro 2 apresenta a forma com que os parâmetros pertinentes ao modelo matemático (36) foram obtidos.

Quadro 2. Forma de Obtenção dos Parâmetros

Medidos/Obtidos em <i>datasheet</i>	$r, m_r, m_p, w, d, h, l, j_m \epsilon k_t$
Calculados	j_ω, j_ψ e j_ϕ
Estimados em ensaios	R_m e f_m

No caso dos motores, os valores referentes a constante de torque e o momento de inércia serão utilizados a partir de dados de um motor semelhante ao utilizado apresentado em EletroCraft (2021) e, de acordo com Serafin et al. (2019) e Basilio and Moreira (2001), tem-se $k_b = k_t$.

Para a definição dos parâmetros restantes dos motores, utilizou-se dos métodos apresentados em Basilio and Moreira (2001). Para os motores utilizados, foram aplicados sinais com frequências de $1kHz$ a $20kHz$ de amplitudes diversas, entre $12.5V$ e $20V$, sendo realizados três testes para cada frequência, além de uma média aritmética sobre os três testes, chamado de *Teste 4*.

Com os dados colhidos, foi utilizado um algoritmo genérico do método dos mínimos quadrados para realizar a aproximação dos dados através de uma curva. Para a determinação da curva que melhor se ajustasse aos dados, foi analisado apenas o sinal do coeficiente de determinação (R^2) relacionado a cada parte do modelo matemático do motor que, conforme a metodologia de Basilio and Moreira (2001), é dividido entre parte elétrica e parte mecânica. O coeficiente de determinação é usado para julgar a adequação de um modelo à aproximação realizada. Quanto mais próximo de 1 for o valor de R^2 , melhor a curva representa o modelo a ser estimado (Hines et al., 2015).

O teste que obteve o melhor desempenho, para o índice analisado, (0,5078 para o modelo elétrico e 0,4638 para o modelo mecânico) foi o Teste 4. Apesar de os valores estarem relativamente distantes de 1, são aceitáveis em função das condições disponíveis para realização dos testes. A Figura 5 apresenta a corrente elétrica aplicada ao motor e a corrente elétrica simulada a partir dos parâmetros estimados, na qual pôde-se observar uma tendência de seguimento entre os sinais de corrente simulado e real. Assim, os parâmetros estimados, foram validados conforme a Figura 5 e tem as suas magnitudes descritas na Tabela 1.

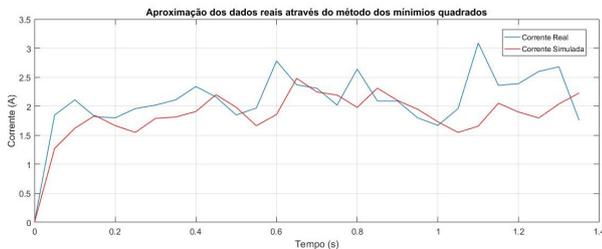


Figura 5. Curva de aproximação para obtenção dos parâmetros do motor.

Considerando uma superfície lisa e de boa qualidade, o atrito entre roda e chão pode ser utilizado como $f_\omega =$

0.01 (Serafin et al., 2019). Também é possível dizer que, pela forma que estão fixados, o conjunto cadeira-motor é praticamente um corpo único e, portanto, o valor do coeficiente de atrito entre corpo e motor (f_m) será adotado o mesmo valor de Witzand (2009). Assim, utilizando dos meios citados, tem-se os parâmetros físicos apresentados na Tabela 1.

Os resultados apresentados na Tabela 1 servirão de parâmetros para os projetos de controladores desenvolvidos a seguir e, dessa forma, é possível validá-los como valores que representam efetivamente o modelo matemático (36).

Tabela 1. Constantes do Sistema Físico.

Constante	Magnitude	Unidade
n	28	$[-]$
R_m	2,03	$[\Omega]$
k_t	0,0585	$[Nm/A]$
j_m	0,000274518	$[kgm^2]$
k_b	0,0585	$[Vs/rad]$
m_r	2,5	$[kg]$
r	0.16	$[m]$
f_ω	0,01	$[-]$
j_ω	0,0320	$[kgm^2]$
m_c	85	$[kg]$
w	0,655	$[m]$
d	0,77	$[m]$
h	0,78	$[m]$
l	0,38	$[m]$
j_ψ	4,8133	$[kgm^2]$
j_ϕ	8,5160	$[kgm^2]$
f_m	0,0022	$[-]$
g	9,81	$[m/s^2]$

5. PROJETO DO CONTROLADOR

O sistema de controle tem como premissa controlar o comportamento do sistema através do emprego de uma ação de controle retroativa, que realiza medições dos sinais na saída. Esses sinais são transmitidos a um controlador que calcula um sinal de controle correspondente a partir de ganhos aplicados ao sistema (Franklin et al., 2013). Assim, o projeto do controlador será descrito nas subseções, contemplando suas características e forma de implementação.

5.1 Características de Projeto de Controle

Na prática, a instrumentação existente no sistema real corresponde as posições angulares $[\theta \ \psi \ \phi]$, e para a estimação dos valores de velocidade, é implementado um filtro derivativo, devido a incertezas esperadas para o modelo matemático. A Figura 6 apresenta de forma simplificada o processo de controle do sistema.

A parcela integral é aplicada aos sinais de posição média das rodas (θ) e deslocamento angular lateral (ϕ) utilizando do princípio da separação de estados, conforme (39).

$$C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

A topologia do filtro derivativo implementado é apresentado em (40) (Siemens, 2021)

$$y[k] = (U_f - (T - K_f T_d)y(k-1))/(T + K_f T_d), \\ K_f = 2a_f; U_f = K_f u(k) - K_f u(k-1), \quad (40)$$

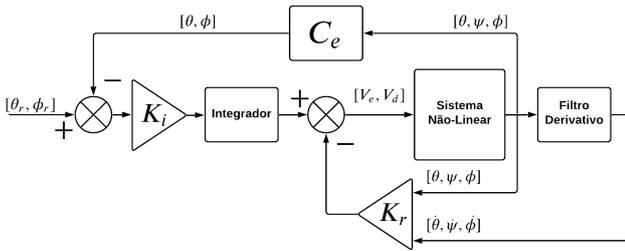


Figura 6. Representação da malha de controle.

onde $y(k)$ é a saída do filtro, a_f é a parcela de ajuste dinâmica do filtro e T_d representa a constante de tempo derivativa, estipulados a partir de simulações, a fim de melhorar o sistema de controle. T representa o período de amostragem do sistema. Assim, considera-se a lei de controle (41).

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_d \end{bmatrix} = -Kx(t) + K_i \int_0^{\infty} e(t) dt. \quad (41)$$

Dessa forma, para o projeto do controlador foi escolhido uma estratégia de controle conhecida como LQR (*Linear Quadratic Regulator*) buscando o ajuste dos ganhos $K = [K_r \ -K_i]$, de forma que seja usada a mínima energia para alcançar a estabilidade e que consiga responder à uma faixa de incerteza que pode ser apresentada pelo sistema, caracterizando a robustez do controlador.

Com a definição da lei de controle, tem-se um novo vetor de estados, formado pelos estados anteriores somados as integrais dos erros para lei de controle (41). A matriz de ganhos K gerada é apresentada em (42), obtida a partir de ajustes no método do LQR

$$\begin{bmatrix} -5,7887 & -256,2256 & -7,5329 & -52,9263 & \dots \\ -5,7887 & -256,2256 & -7,5329 & -52,9263 & \dots \\ \dots & -4,4591 & -4,2843 & 2,2361 & 2,2361 \\ \dots & 4,4591 & 4,2843 & 2,2361 & -2,2361 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Nesse sentido, ao estabelecer a lei de controle para a estabilidade do sistema, pode-se obter os valores para a aplicação no sistema real visto na seção 2.

5.2 Implementação do Sistema de Controle

A Figura 7 apresenta o fluxograma do algoritmo de controle implementado ao sistema real. A lei de controle (41) é discretizada da forma:

$$I(k) = (Te(k) + I(k-1)), \quad (43)$$

$$u_k = -K_r x(k) + K_i I(k), \quad (44)$$

em que os vetores K_r e K_i provêm do vetor de ganhos K apresentado em (42), a variável $e(k)$ representa o erro calculado em relação à referência aplicada, $u(k)$ apresenta o vetor de entrada do sinal de tensão do sistema $[V_e \ V_d]$ e $x(k)$ é o vetor de estados. A inserção do sinal de referência se dá por meio de um *joystick*, em que seus eixos enviam os sinais analógicos de x para referência de θ e y para referência de ϕ . O período de amostragem (T) foi utilizado em $50ms$, uma vez que garante a amostragem, com uma margem de duas vezes, do autovalor mais rápido.

O sensor *BNO055* é o limitante do período de amostragem usado no sistema, uma vez que, por se tratar de uma

comunicação serial, o sensor precisa de um tempo tanto para a entender a requisição e para enviar a resposta, quanto para uma nova requisição, caso contrário ocorre um *deadlock* e, conseqüentemente o algoritmo de controle é comprometido. Para o *encoder*, tinha-se o problema de perda de pulsos em função da alta resolução em conjunto com a redução do motor, sendo resolvido através do uso de uma redução entre o eixo do motor e o eixo do *encoder*, reduzindo o número de pulsos em uma proporção de 1 : 3, ajustando, assim, os dados do sistema para a realização dos cálculos de controle.

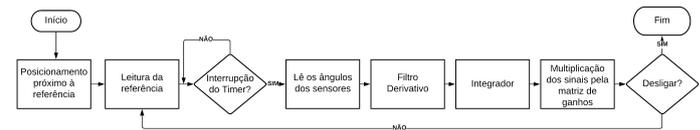


Figura 7. Fluxograma do algoritmo implementado.

Após realizar a implementação do algoritmo de controle, na seção seguinte serão realizadas análises acerca da aplicação do projeto de controle no protótipo, discutindo os cenários de verificação e testes realizados, fazendo comparações com as respostas simuladas e apresentando os resultados obtidos.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Serão realizados testes para observação do funcionamento do controlador para os ângulos θ e ϕ , a fim de observar os resultados com relação à simulação e, posteriormente os testes para o comportamento do ângulo de equilíbrio ψ serão realizados. Para os testes de segmento de referência, foram utilizadas duas rodas de apoio (anti-tombamento) e a inserção de referência de forma interna utilizando o algoritmo, não sendo avaliado nesse momento o controle de (ψ), buscando apenas demonstrar a funcionalidade do algoritmo de controle da Figura 7. Os testes foram realizados em uma superfície plana e de boa qualidade, visando ser conveniente com o atrito entre roda e chão.

6.1 Posição média da roda θ e Posição lateral ϕ

O primeiro teste realizado foi com o início da movimentação da cadeira para frente com as rodas girando no sentido horário, demonstrando que o sistema segue a referência aplicada, como propõe a lei de controle (41).

A Figura 8 apresenta o resultado da cadeira à uma referência aplicada ao sinal de posição média das rodas (θ) ao qual foi selecionado uma referência interna de 360° e seus múltiplos. Pôde-se observar a convergência para a referência aplicada e a proximidade do sinal real e simulado.

O segundo teste deu-se juntamente ao primeiro, com a cadeira se movimentando para frente, onde se realizou curvas para a direita. Na Figura 9, tem-se a representação do teste realizado para curvas de 90° para a direita para o ângulo ϕ com a cadeira.

Visando demonstrar a mínima interferência entre os sinais dos ângulos θ e ϕ , realizou-se um teste no qual foi inserido uma referência do tipo degrau com amplitude de 360° ao

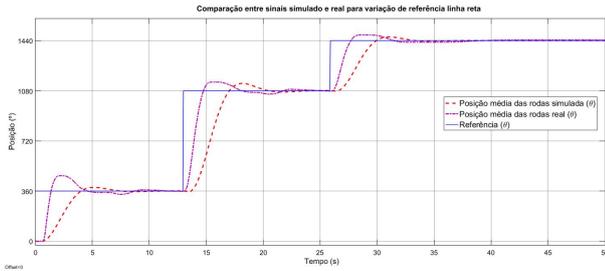


Figura 8. Comparação entre sinal simulado e real para segmento de referência aplicada a θ .

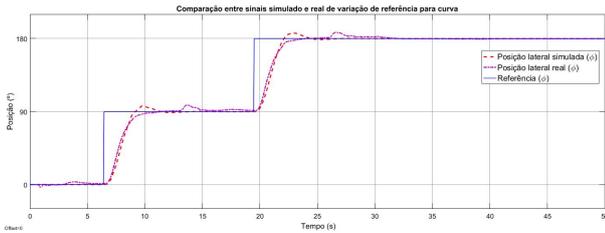


Figura 9. Teste para segmento de referência aplicada ao sinal de ϕ .

ângulo θ no instante $t = 0s$, e ao ângulo ϕ um degrau com 90° de amplitude no instante $t = 28s$. Isso ocorre devido ao modelo ter a possibilidade de ser desacoplado para os estados de ϕ e $\dot{\phi}$. Na Figura 10 podem ser vistas as comparações para os sinais de θ e ϕ para a simulação e o teste.

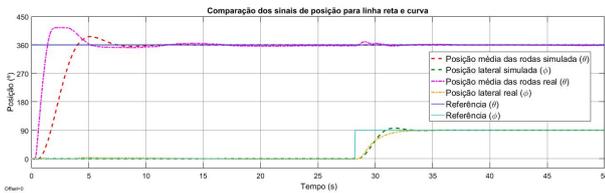


Figura 10. Demonstração da conservação do sinal para uma referência diferente do outro.

É possível observar que, durante os testes, o sistema respondeu de maneira mais rápida. Isso se deve ao fato da incerteza sobre parâmetros físicos, como a distância até centro de massa (l), que influencia diretamente a dinâmica do sistema. Dessa forma, os demais parâmetros da Tabela 1 puderam ser verificados, uma vez que o comportamento real do sistema se dá de forma semelhante ao sistema simulado para os ângulos estudados.

6.2 Ângulo de equilíbrio ψ

Para o ângulo ψ , foram realizados alguns testes para verificar seu comportamento. A Figura 11 apresenta a instabilidade no sistema ao impor uma referência do tipo degrau para o ângulo θ para que a cadeira se movimentasse $1m$ em linha reta.

A oscilação dentro um limite deve-se ao uso das rodas anti-tombamento, visando fazer com que a cadeira se movimentasse em linha reta para então observar o sinal de ψ . Apesar dos ajustes nos ganhos, em função da incerteza



Figura 11. Teste para o ângulo de equilíbrio.

sobre o centro de massa do protótipo o qual teve sua distância estimada empiricamente e, de acordo com os testes, não se encontra no mesmo local apresentado na Figura 3 por conta de vários fatores como a distribuição do peso do *hardware*, o sistema não funcionou como o esperado. Outro fator que contribuiu para o não funcionamento do sistema foi a limitação da amostragem do sinal em função do sensor utilizado, a qual deveria ser mais rápida, como apresentam Serafin et al. (2019) e Witzand (2009).

6.3 Discussões gerais

Com os resultados apresentados nas Figuras 8, 9 e 10, pode-se observar o funcionamento correto do controlador para os ângulos θ e ϕ , realizando o segmento de referência em linha reta e em curvas. Apesar da possibilidade de desacoplar o sistema, optou-se em aplicá-lo de forma acoplada visando contribuir no aspecto de realização de curvas com esse tipo de protótipo.

Ao realizar os testes e a comparação com a simulação, notou-se que o sistema real respondeu de forma diferente que o modelo (36). Essa diferença é proveniente das não-linearidades presentes no sistema real, e que não estão no sistema simulado como a zona morta e a folga nos atuadores. Além disso, também se deve ao fato da incerteza sobre a distância até o centro de massa (l), que influencia diretamente na dinâmica do sistema de (36). Com isso, foram realizados ajustes nesse parâmetro a fim de obter uma simulação mais próxima do modelo real e comparar os sinais.

Para verificar o funcionamento do protótipo utilizando o *joystick* para inserir a referência, realizou-se testes nas mesmas condições anteriores para θ e ϕ .

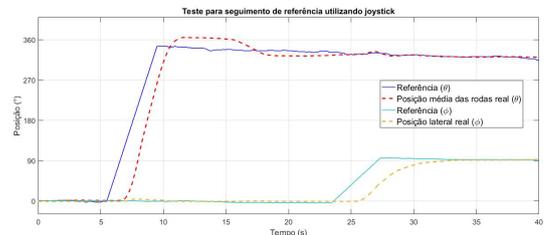


Figura 12. Teste de seguimento de referência inserida pelo *joystick*.

A Figura 12 apresenta o teste realizado utilizando os sinais analógicos provenientes do *joystick* presente no protótipo, para realizar a inserção da referência para o sistema.

7. CONCLUSÃO

AGRADECIMENTOS

No presente trabalho buscou-se estudar sobre o modelo matemático apresentado em Witzand (2009) e realizar sua adequação ao protótipo construído em Fiori et al. (2019), como apresentado na seção 3, chegando-se ao modelo final apresentado em (36). Adicionalmente, buscou-se realizar o controle das variáveis em questão, os quais tiveram seus resultados satisfatórios para os ângulos de θ e ϕ . Observou-se para a dinâmica do equilíbrio (ϕ) que o controlador não funcionou de forma correta, embora tenha tentado atingir a estabilidade, não se obteve êxito, em função dos problemas sobre amostragem e a incerteza do parâmetro de distância até o centro de massa (l). Observando assim, de forma preliminar, os resultados alcançados na construção do protótipo de um veículo auto-equilibrante aplicado a tecnologias assistivas, que continua em desenvolvimento em projetos integradores e de pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC) - Campus Chapecó.

Com isso, o estudo realizado no contexto de Projetos Integradores aplicados ao Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, traz contribuições acerca do modelo matemático (36) aplicado a protótipos de cadeiras de rodas auto-equilibrantes, abrindo a ótica de aplicação a partir de Witzand (2009). Como o trabalho ainda está em desenvolvimento, houve dificuldades durante a realização desse estudo no que diz respeito ao *hardware* e ao *software*, contemplando: as aquisições dos sinais de posição; a definição do período de amostragem em função da dificuldade no uso do sensor *BNO055*; a realização do controle lateral e da posição média das rodas; dificuldades com relação a identificação dos parâmetros sobre os motores, pois não se tem acesso à folha de dados do equipamento e, os testes para identificação não foram realizados em ambiente adequado; o sensor giroscópio presente no protótipo foi um fator de grande influência sobre o algoritmo e tratamento de dados, pois ele limita a amostragem do algoritmo de controle, podendo ocasionar um *deadlock*, comprometendo o funcionamento do algoritmo da Figura 7; o *design* do protótipo voltado à ergonomia do usuário, acarretou em dificuldades na medida do centro de massa do sistema em função da distribuição das massas no protótipo, influenciando no modelo numérico (36).

Apesar do trabalho ter alcançado parcialmente os objetivos elencados, há características do sistema que podem ser melhoradas e novas metodologias de trabalho podem ser adotadas, a fim de satisfazer os objetivos inicialmente elencados. Essas melhorias podem ser: o ajuste da ergonomia; uso de outro sensor giroscópio para medida dos ângulos ϕ e ψ , juntamente com um sistema para condicionamento do sinal do novo sensor; abordar formas para definir ou estimar os parâmetros incertos, como a distância até o centro de massa, que pode variar dependendo do usuário do veículo. Também pode-se elencar melhorias da estratégia de controle, que levem em consideração as restrições do sistema, como o uso de LMIs (*Linear Matrix Inequality*) dedicadas ao propósito do problema.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC) - Campus Chapecó e ao LABICON (Laboratório de Instrumentação e Controle) pelo uso da infraestrutura e apoio no desenvolvimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Alqudah, M., Abdelfattah, Mustafa e Boiko, I., and Alhammedi, K. (2016). Dynamic modeling and control design for a self-balancing two-wheel chair. In *2016 5th International Conference on Electronic Devices, Systems and Applications (ICEDSA)*, 1–4. doi:10.1109/ICEDSA.2016.7818556.
- Basilio, J.C. and Moreira, M.V. (2001). Experimentos para estimação dos parâmetros de motores de corrente contínua. In *XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*.
- Bonales Valencia, J.A., Rincon Pasaye, J.J., and Bernai, R.G. (2014). Instrumentation and wireless control for the self-balancing mobile robot on two wheels. In *2014 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, 1–5. doi:10.1109/ROPEC.2014.7036310.
- Cardozo, G.S.S. and Vera, L.M.S. (2012). Prototype for a self-balanced personal transporter. In *2012 Workshop on Engineering Applications*, 1–6. doi:10.1109/WEA.2012.6220101.
- EletroCraft (2021). *MP24 Right-Angle Gearmotor MobilePower™ Series Low Voltage - High Torque*. Eletrocraft Powering Innovation.
- Fiori, L.J., Federici, C.R., Fossatto, M., Milhomem, R.L., and Tres, R.J. (2019). Desenvolvimento de tecnologia assistiva para cadeirantes: Cadeira de rodas auto-equilibrante. In *Anais do Seminário de Ensino, Pesquisa, Extensão e Inovação do IFSC*.
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia*. Bookman.
- Hines, W.W., Montgomery, D.C., and Goldsman, David M. e Borrer, C.M. (2015). *Probabilidade e estatística na engenharia*. LTC.
- Kawamura, T. and Murakami, T. (2011). Vibration suppression for uprising control of two-wheel driven wheelchair. In *IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 3323–3328. doi:10.1109/IECON.2011.6119844.
- Kim, S., Seo, J., and Kwon, S. (2011). Development of a two-wheeled mobile tilting balancing (mtb) robot. In *2011 11th International Conference on Control, Automation and Systems*, 1–6.
- Lemos, N. (2007). *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física.
- Mobility, G. (2021). Genny factory.
- Serafin, J.M., Roqueiro, N., and Braga, R.A.M. (2019). *Modelagem, Análise e Controle de um Protótipo de Cadeira de Rodas Auto-Equilibrante*. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.
- Siemens (2021). Pid control with pid_compact for simatic s7-1200/s7-1500.
- Tamiozzo, G.E. and Milhomem, R.L. (2018). Modelagem e controle de um veículo segway.
- Witzand, S.J. (2009). Coordinated lego.