

# Controle de Rastreamento de Trajetórias em Tempo Finito

Carlos E. Celeste Jr\* José C. Geromel\*\*

\* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, SP (e-mail: c195395@dac.unicamp.br)*

\*\* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, SP, (e-mail: geromel@dsce.fee.unicamp.br).*

---

**Abstract:** This paper presents a new procedure for state feedback control design of a half-car motion expressed by a simple kinematic model. Control Lyapunov function and sliding mode control ideas are adopted and improved in order to impose, simultaneously, finite time and asymptotic tracking of a desired trajectory with a prescribed vehicle orientation (yaw angle). To accomplish these goals, suitable control design conditions on the steering angle are solved. A case study is presented and discussed in order to clearly illustrate the theoretical results.

**Resumo:** Este artigo apresenta um novo procedimento para o projeto de controle via realimentação de estado do movimento de um veículo expresso através de um modelo cinemático simples. Para isso, ideias adotadas no estudo de função de Lyapunov de controle e de modos deslizantes são utilizadas e melhoradas com o intuito de impor, simultaneamente, tempo finito e rastreamento assintótico de uma trajetória e orientação (ângulo de guinada) do veículo prescritas. Para atingir esses objetivos, condições de projeto adequadas sobre o ângulo de direção são resolvidas. Um estudo de caso é apresentado e discutido, a fim de ilustrar claramente os resultados teóricos.

*Keywords:* Control Lyapunov function; sliding modes; half-car steering control; trajectory tracking.

*Palavras-chaves:* Função de Lyapunov de controle; modos deslizantes; controle de direção; rastreamento de trajetórias.

---

## 1. INTRODUÇÃO

A literatura tem inúmeros trabalhos que tratam do controle de veículos para que se desloquem em uma trajetória pré-especificada. Modelos puramente cinemáticos ou modelos dinâmicos são adotados, por exemplo, em Jeon et al. (2013), Kristijan et al. (2008), Pepy et al. (2006), Rucco et al. (2012), Ying (2010) e nas suas referências.

De forma mais específica, uma solução local do problema de controle ótimo que permite determinar o ângulo de direção de um veículo foi proposto em Jeon et al. (2013), a partir da adoção de um modelo dinâmico de meio-carro que inclui as forças de atrito produzidas nos seus pneus dianteiros e traseiros. Assim sendo, podemos afirmar que uma possível estratégia de controle de rastreamento de trajetórias resulta da solução de um problema de otimização não linear. Veja também os procedimentos alternativos apresentados em Pepy et al. (2006) e Ying (2010). Neste mesmo contexto, porém, adotando modelos puramente cinemáticos, um procedimento de projeto de controle para rastreamento de trajetórias com margens de desempenho foi proposto em Kristijan et al. (2008). Em Rucco et al. (2012) o problema de controle de

tempo mínimo foi abordado, a partir de um modelo dinâmico bastante completo. Assim como ocorreu nos demais trabalhos citados, a estratégia de controle ótimo foi determinada numericamente através da solução, em geral difícil de ser calculada, de um problema de programação matemática não linear. Os resultados apresentados em Bhat & Bernstein (1998) e Bhat & Bernstein (2000), que fornecem condições para convergência em tempo-finito, serão analisados em detalhes para colocar em evidência as melhorias que pretendemos introduzir.

Neste artigo adotamos um procedimento alternativo combinando resultados teóricos já bem estabelecidos, que levaram ao desenvolvimento de dois dos mais efetivos métodos de projeto de controle não linear disponíveis na literatura, a saber: Função de Lyapunov de Controle (FLC) e Controle de Modos Deslizantes (CMD). Para maiores detalhes a respeito destes dois tópicos, o leitor deve consultar os trabalhos seminais Khalil (2002) e Utkin (1993), respectivamente. A seguir, nosso foco principal é o de generalizar o procedimento FLC, mas com uma função de Lyapunov semi-positiva definida que estabelece a distância do estado atual até a trajetória a ser rastreada. Além disso, uma característica principal do método de controle proposto é a de permitir que o ângulo de guinada do veículo também seja especificado. Ademais, a lei de controle via realimentação de estado proposta, ao contrário do que normalmente ocorre no contexto CMD, é contínua e o rastreamento da

---

\* Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo N<sup>o</sup> 302013/2019-9 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) - Processo N<sup>o</sup> 2020/07574-6.

trajetória especificada se dá em tempo finito, com erro fixado *a priori*. Os resultados apresentados em seguida se baseiam em um modelo de meio-carro puramente cinemático. Eles serão ilustrados por um caso de estudo que coloca em clara evidência a efetividade da lei de controle proposta.

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES

Considere um sistema não linear, invariante no tempo com representação de estado dada na forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi, u) & (1) \\ z &= g(\xi) & (2) \end{aligned}$$

em que  $\xi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a variável de estado,  $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a variável de controle e  $z(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  é a variável de saída controlada. O sinal de controle é considerado suave o suficiente para que (1) admita uma solução para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nosso principal objetivo é determinar uma lei de controle via realimentação de estado  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de modo que  $z = 0$ . A restrição  $z = g(\xi) = 0$  define uma ou um conjunto de trajetórias de interesse. Em linhas gerais, adotamos e generalizamos as ideias já muito bem estabelecidas no âmbito de FLC e CMD, mas em um novo cenário o qual, em nossa opinião, é mais adequado para lidar com o controle de rastreamento de trajetórias. Neste sentido, reafirmamos, o propósito não é o de assegurar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, mas de assegurar que uma trajetória qualquer de interesse possa ser rastreada.

Consideramos a função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z)$ , para detalhes veja Khalil (2002). Trata-se de uma função definida positiva, mas que depende de  $z \in \mathbb{R}^r$  e não de  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Como sabemos, se  $r < n$  ela não permite estabelecer nenhuma propriedade de estabilidade associada aos pontos de equilíbrio de (1). A sua derivada em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória do sistema (1)-(2), é dada por

$$\dot{\vartheta} = \nabla\vartheta(z)' J_g(\xi) f(\xi, u) \quad (3)$$

em que  $\nabla\vartheta(z) = \partial\vartheta/\partial z \in \mathbb{R}^r$  é o gradiente de  $\vartheta(z)$  e  $J_g(\xi) = \partial g(\xi)/\partial \xi \in \mathbb{R}^{r \times n}$  é o Jacobiano da transformação (2). As referências Bhat & Bernstein (1998) e Bhat & Bernstein (2000) estabelecem que para o caso em que  $z = g(\xi) = \xi$ , se existir uma lei de controle do tipo  $u(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f(0, u(0)) = 0$  e  $\dot{\vartheta} + \mu\sqrt{\vartheta}$  seja definida negativa, com  $\mu > 0$ , em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  então a partir de qualquer condição inicial nesta vizinhança ele pode ser atingido em um tempo finito  $T(\xi_0) \leq (2/\mu)\sqrt{\vartheta(\xi_0)}$ . A lei de controle resultante, em geral, não é contínua pois depende de funções do tipo  $\text{sign}(\cdot)$ . Em Bhat & Bernstein (1998) discute-se a possibilidade de obter leis de controle contínuas para o caso específico de um sistema dinâmico de segunda ordem, com duplo integrador, que será também tratado com mais detalhes em seguida.

## 3. PROJETO DA LEI DE CONTROLE

Como já foi dito, nosso objetivo é o de propor uma lei de controle contínua e suave para o rastreamento de uma trajetória pré-estabelecida pelo usuário. Neste sentido, para uma dada função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z)$ ,

devemos determinar (se possível) uma lei de controle via realimentação de estado  $u = u(\xi)$  de tal modo que

$$\dot{\vartheta} \leq \begin{cases} -\gamma\vartheta, & \vartheta(z) < c \\ -\mu\sqrt{\vartheta}, & \vartheta(z) \geq c \end{cases} \quad (4)$$

com parâmetros  $(\gamma, \mu, c)$  positivos. Como pode ser verificado, a continuidade do lado direito de (4) é assegurada desde que  $c = (\mu/\gamma)^2$ . A interpretação desta imposição é simples, suponha que em  $t = 0$ , a condição inicial seja  $\xi(0) = \xi_0$  com  $z_0 = g(\xi_0)$  tal que  $\vartheta(z_0) > c$ . Nesta região, (4) impõe que o contorno seja alcançado em um tempo finito que satisfaz

$$T(z_0) \leq (2/\mu) \left( \sqrt{\vartheta(z_0)} - \sqrt{c} \right) \quad (5)$$

Em seguida, de acordo com (4), para  $t > T(z_0)$ , o sistema evolui assintoticamente para  $z = 0$  governado por  $\dot{\vartheta}(z(t)) \leq e^{-\gamma(t-T(z_0))}c$ . Portanto, o sistema em malha fechada tem um bom desempenho, visto que quando está longe do objetivo  $z = 0$ , demora um intervalo de tempo finito para alcançar a vizinhança desta região e então procede para o objetivo  $z = 0$  assintoticamente, com uma determinada razão de decaimento. O intervalo de tempo finito definido por  $T(z_0)$ , que depende de  $\mu > 0$ , a razão de decaimento  $\gamma > 0$  e, por consequência, a amplitude  $c = (\mu/\gamma)^2$ , podem ser modificados segundo a escolha apropriada dos parâmetros positivos de projeto  $(\gamma, \mu)$ . É interessante observar que a escolha  $0 < \mu \ll \gamma$  faz com que  $c > 0$  seja arbitrariamente pequeno e (4) se iguale à condição de Bhat & Bernstein (1998) que discutimos anteriormente. Como veremos em seguida, a vantagem de (4) é que ela permite a síntese de leis de controle em malha fechada contínuas e suaves.

Destas manipulações algébricas fica claro que, para um dado sistema dinâmico (1)-(2) e uma dada função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z)$ , para satisfazer as inequações (4) a maior dificuldade reside na escolha da lei de controle. O próximo lema caracteriza uma possível lei de controle tal que (4) seja satisfeita. É interessante observar que apenas uma condição de síntese da lei de controle impõe os dois comportamentos previstos em (4).

**Lema 1.** Dados os parâmetros  $(\gamma, \mu)$  positivos, definimos os parâmetros  $(\kappa, \lambda)$ , também positivos, que satisfazem  $\kappa = (\mu + \lambda\gamma)/2$ . Se existe um controle de realimentação de estado  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de tal modo que

$$J_g(\xi) f(\xi, u(\xi)) = -\kappa \frac{z}{\lambda + \|z\|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

então (4) é satisfeita para  $\vartheta(z) = \|z\|^2$  e  $c = (\mu/\gamma)^2$ .

**Prova.** Primeiro, considere  $\dot{\vartheta} \leq -\gamma\vartheta$  ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema de malha fechada. Usando (6) temos

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\gamma\|z\|^2 \quad (7)$$

a qual, a partir de manipulações algébricas simples, implica que  $\|z\| \leq (2\kappa - \lambda\gamma)/\gamma$ , ou seja,  $\vartheta(z) = \|z\|^2 \leq c$ . Segundo, considere que a inequação  $\dot{\vartheta} \leq -\mu\sqrt{\vartheta}$  se mantém ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema de malha fechada. Usando novamente (6) temos

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\mu\|z\| \quad (8)$$

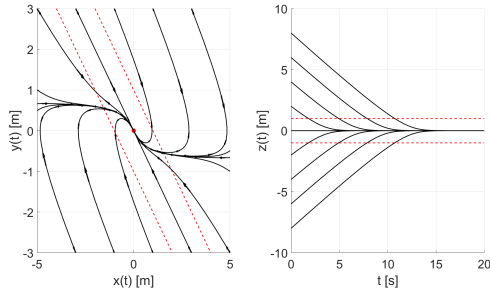


Figura 1. Trajetórias no plano de fase e evolução temporal da saída

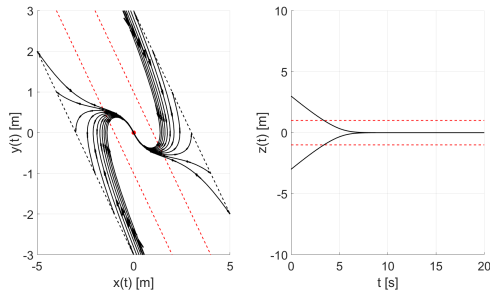


Figura 2. Trajetórias no plano de fase e evolução temporal da saída

implicando que  $\|z\| \geq \mu\lambda/(2\kappa - \mu)$ , ou seja,  $\vartheta(z) = \|z\|^2 \geq c$ . Vale ressaltar que para todos os pontos do espaço de estado tais que  $\vartheta(z) = \|z\|^2 = c$ , o sistema em malha fechada respeita ambas as inequações (7) e (8), assim

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\mu\|z\| = -\gamma\|z\|^2 \quad (9)$$

e a prova está completa.

Embora simples, mas da forma apresentada no Lema 1, um resultado semelhante parece não estar disponível na literatura. Como esperado, pode ser verificado que, para um dado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , não é sempre possível resolver a equação (6) resultando no correspondente controle de realimentação de estado  $u(\xi)$ . Felizmente, nas próximas seções, é mostrado que a condição de síntese de controle (6) pode ser resolvida em várias situações específicas, com particular ênfase à síntese de controle de rastreamento de trajetórias de um veículo definido através do seu modelo cinemático.

### 3.1 Exemplo Ilustrativo

Para ilustrar o resultado teórico do Lema 1 vamos aplicá-lo à síntese de controle de um sistema dinâmico de segunda ordem com duplo integrador proposto em Bhat & Bernstein (1998). Trata-se do modelo simples que fornece o deslocamento de uma massa unitária de 1 [kg] sob a ação de uma força com intensidade  $u$  [N], em um ambiente sem a presença de atrito. O deslocamento e a velocidade são denotados por  $x$  [m] e  $y$  [m/s], respectivamente. A representação de estado é da forma (1)-(2) em que

$$\dot{x} = y \quad (10)$$

$$\dot{y} = u \quad (11)$$

$$z = \alpha x + y \quad (12)$$

sendo  $\alpha > 0$  dado. A função de Lyapunov de controle escolhida é a mais simples possível, ou seja,  $\vartheta(z) = z^2$ . Definindo a variável de estado  $\xi = [x \ y]' \in \mathbb{R}^2$  e as funções  $f(\xi, u)$  e  $g(\xi)$  podemos verificar que a lei de controle em malha fechada

$$u(\xi) = -\alpha y - \kappa \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (13)$$

satisfaz a condição expressa no Lema 1. De fato, com a lei de controle (13), a derivada temporal de  $\vartheta(z)$  ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema em malha fechada satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(z) &= 2z(\alpha\dot{x} + \dot{y}) \\ &= 2z(\alpha y + u) \\ &= -2\kappa \frac{|z|^2}{\lambda + |z|} \end{aligned} \quad (14)$$

na qual usamos o controle de realimentação de estado  $u = u(\xi)$  dado em (13). No plano de fase, a reta  $z = 0$  é atingida em tempo finito e assim permanece. Ademais, a partir deste instante de tempo também ocorre  $\dot{z} = 0$ , o que impõe  $0 = \alpha\dot{x} + \dot{y} = \alpha y + \dot{y}$ . Em princípio, como a função de Lyapunov de controle escolhida não é definida positiva, com ela, não podemos diretamente concluir que  $\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Entretanto, como as condições  $z(t) \rightarrow 0$  e  $y(t) \rightarrow 0$  implicam que  $x(t) \rightarrow 0$  concluímos que  $\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Ou seja, a lei de controle (13) assegura que a origem  $\xi = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha fechada.

O duplo integrador em malha fechada foi simulado, utilizando os seguintes valores para os parâmetros do controlador:  $\alpha = 1.00$  [Hz],  $\mu = 1.00$  [m/s<sup>2</sup>],  $\gamma = 1.00$  [Hz],  $\kappa = 0.75$  [m/s<sup>2</sup>],  $\lambda = 0.50$  [m/s] e  $\sqrt{c} = 1.00$  [m/s]. As seguintes observações podem ser feitas:

- A Figura 1 mostra no lado esquerdo o plano de fase e no lado direito a evolução temporal da saída  $z(t)$ . Em linhas tracejadas são indicados os contornos definidos pela derivada da função de Lyapunov (4). Como esperado, todas as trajetórias convergem para a origem. É notável a concordância deste plano de fase com aquele dado em Bhat & Bernstein (1998) embora a lei de controle (13) seja contínua e muito mais simples.
- A Figura 2 ilustra uma situação peculiar. O seu lado esquerdo mostra o plano de fase do sistema em malha fechada para diversas condições iniciais tais que  $\vartheta(z_0) = z_0^2 = 9$ . Novamente observa-se que todas as trajetórias convergem para a origem. Além disso, a estimativa  $T(z_0) \leq 4.0$  [s] dada em (5) para o tempo necessário até que as trajetórias atinjam o contorno de  $\vartheta(z) \geq c = 1$  é satisfeita. Com o lado direito da Figura 2 podemos determinar que  $T(z_0) \approx 3.2$  [s] e verificar que todas as funções  $z(t)$  coincidem com apenas duas, de tal forma a satisfazerem a mesma estimativa (5).

Como bem ilustra o exemplo que acabamos de resolver, o resultado do Lema 1 introduz uma condição de síntese de controle em malha fechada bastante simples, contínua e suave em relação à variável de estado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Observe que a magnitude relativa das regiões que definem (4) pode ser ajustada com a escolha adequada dos parâmetros que definem  $c > 0$ . É importante ressaltar mais dois aspectos

que serão utilizados em seguida. Por um lado, trajetórias especificadas podem ser rastreadas e, por outro lado, os parâmetros livres do controlador podem ser ajustados para que o sinal de controle satisfaça alguma restrição adicional, requerida por uma determinada aplicação prática.

#### 4. MODELO CINEMÁTICO

Consideramos o modelo de meio-carro para um veículo em que  $\ell_F$  [m] é a distância entre a roda dianteira e o centro de massa CM e  $\ell_R$  [m] é a distância entre a roda traseira e o centro de massa. O comprimento total do carro é denotado por  $L = \ell_R + \ell_F$  [m]. Com relação aos respectivos eixos inerciais,  $\delta$  [rad] é o ângulo de direção e  $\theta$  [rad] é o ângulo de guinada. Assumindo que o ponto de referência do carro com coordenadas  $(x, y)$  é a roda traseira, o modelo cinemático é descrito pelas seguintes equações diferenciais não lineares.

$$\dot{x} = w_T \cos(\theta) \quad (15)$$

$$\dot{y} = w_T \sin(\theta) \quad (16)$$

$$\dot{\theta} = (w_T/L) \tan(\delta) \quad (17)$$

em que  $w_T$  [m/s] é o módulo do vetor velocidade, considerado constante e positivo para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Para maiores detalhes a respeito deste modelo, solicita-se que o leitor consulte as referências Kristijan et al. (2008) e Pepy et al. (2006). Definimos também a saída controlada

$$z = (y - y_T) \cos(\theta_T) - (x - x_T) \sin(\theta_T) + \beta(\theta - \theta_T) \quad (18)$$

sendo o escalar  $\beta > 0$  e as coordenadas do ponto alvo  $(x_T, y_T, \theta_T)$  pré-especificados. A partir de uma condição inicial qualquer  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , o nosso propósito inicial é sintetizar o ângulo de direção dependente do estado  $\delta \in \Delta = \{\delta : |\delta| \leq \delta_{max}\}$ , de tal forma que a trajetória do sistema (15)-(17) atinja uma vizinhança de  $z = 0$  em tempo finito  $T(\cdot)$  e, em seguida, convirja assintoticamente para  $z = 0$ .

É importante interpretar este objetivo no contexto do projeto de controle proposto. A restrição  $z = 0$  implica que sempre que  $\theta = \theta_T$ , a trajetória do sistema no plano  $(x, y)$  é uma reta que passa por  $(x_T, y_T)$  com velocidade  $\dot{y} = \tan(\theta_T)\dot{x}$ . Porém, quando  $\theta \neq \theta_T$  a trajetória é uma reta paralela à anterior que exibe a mesma propriedade para a velocidade, mas não passa pelo ponto alvo  $(x_T, y_T)$ . Vale ressaltar que mesmo que o sistema em malha fechada atinja a reta que passa pelo ponto alvo  $(x_T, y_T)$ , com ângulo  $\theta_T$ , pode ocorrer que ele não passe por este ponto, pois as restrições impostas sobre o projeto podem impedir que isto de fato ocorra. Este aspecto será discutido com detalhes mais adiante. Além disto, na sequência, com base no Lema 1, será proposto um controle de realimentação de estado para o ângulo de direção tal que  $\theta(t) \rightarrow \theta_T$ , assintoticamente. Como consequência, projetamos uma estratégia para que o veículo seja capaz de rastrear uma trajetória pré-especificada, decompondo-a em seguimentos de retas e controlando o sistema para que ele se mova sequencialmente de um segmento para o próximo.

Definindo a variável de estado  $\xi = [x \ y \ \theta]^T \in \mathbb{R}^3$ , a variável de controle  $u = \tan(\delta) \in \mathbb{R}$  e a variável de saída controlada  $z \in \mathbb{R}$ , o modelo cinemático (15)-(18) pode ser reescrito na forma (1)-(2). O próximo teorema resume a lei de controle que é obtida pela aplicação direta do Lema 1.

**Teorema 2.** Sejam dados os parâmetros positivos  $(\gamma, \mu)$  e  $(\kappa, \lambda)$  tais que  $\kappa = (\mu + \lambda\gamma)/2$ . O controle de realimentação de estado  $u(\xi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$u(\xi) = -\left(\frac{L}{\beta}\right) \text{sen}(\theta - \theta_T) - \left(\frac{\kappa L}{w_T \beta}\right) \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (19)$$

faz com que (4) seja satisfeita para a função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = |z|^2$  e  $c = (\mu/\gamma)^2$ .

**Prova.** A derivada em relação ao tempo da função de controle de Lyapunov  $\vartheta(z) = |z|^2$  ao longo de uma solução qualquer das equações cinemáticas (15)-(17) é tal que

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= 2z(\dot{y} \cos(\theta_T) - \dot{x} \sin(\theta_T) + \beta \dot{\theta}) \\ &= 2z(w_T \text{sen}(\theta - \theta_T) + w_T(\beta/L) \tan(\delta)) \\ &= -2\kappa \frac{|z|^2}{\lambda + |z|} \end{aligned} \quad (20)$$

onde usamos o controle de realimentação de estado  $u = u(\xi)$  dado por (19). Como (20) coincide com a derivada em relação ao tempo da função de controle de Lyapunov do Lema 1, a prova está concluída.

É interessante observar que os parâmetros de projeto  $(\lambda, \beta)$ , positivos, são livres e podem ser escolhidos de forma a atender algum requisito adicional. Por exemplo, (19) deixa claro que se

$$\frac{L}{\beta} \left(1 + \frac{\kappa}{w_T}\right) \leq \tan(\delta_{max}) \quad (21)$$

então  $|u(\xi)| \leq \tan(\delta_{max})$  o que implica que  $\delta(\xi) = \tan^{-1}(u(\xi)) \in \Delta$ . Este requisito, importante em aplicações práticas, pode ser satisfeito através da escolha adequada dos parâmetros de projeto mencionados. Isto pode ser feito sem alterar as margens de estabilidade  $(\gamma, \mu)$  e o tamanho da vizinhança de  $z = 0$  definida por  $c = (\mu/\gamma)^2$ . Além disso, o próximo corolário coloca em evidência uma propriedade de convergência muito importante da lei de controle (19).

**Corolário 3.** Sob das condições do Teorema 2, considere que o sistema em malha fechada evolui de um estado inicial arbitrário  $(x_0, y_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ . Se  $z(T_c) = 0$  então  $z(t) = 0$  para todo  $t \geq T_c \geq 0$ . Além disso, se  $|\theta(t) - \theta_T| \leq \pi$  então  $\theta(t) \rightarrow \theta_T$  conforme  $t \rightarrow +\infty$ , assintoticamente.

**Prova.** Com o controle de realimentação em malha fechada (19), obtemos imediatamente que

$$\dot{z} = -\kappa \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (22)$$

o que significa que  $z(t) = 0$  é uma solução para todo  $t \geq T_c \geq 0$  desde que  $z(T_c) = 0$ . Além disso, como o lado direito de (22) é Lipschitz contínuo, a solução nula é única. Por outro lado, considerando simultaneamente o controle (19) e  $\dot{z}(t) = 0$ , resulta que

$$\dot{\theta} = -(w_T/\beta) \text{sen}(\theta - \theta_T) \quad (23)$$

cujas soluções satisfaz

$$\left| \tan\left(\frac{\theta(t) - \theta_T}{2}\right) \right| = e^{-(w_T/\beta)(t-T_c)} \left| \tan\left(\frac{\theta(T_c) - \theta_T}{2}\right) \right|$$

para todo  $t \geq T_c$ . Isto implica que  $\theta(t)$  converge para  $\theta_T + 2\pi k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , assintoticamente. A suposição  $|\theta(t) - \theta_T| \leq \pi$  para todo  $t \geq T_c \geq 0$  assegura que a única possibilidade é  $k = 0$ , completando a prova.

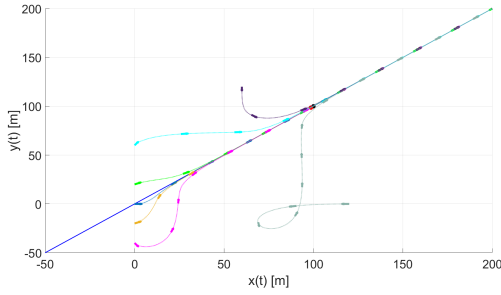


Figura 3. Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático no teste de ponto alvo

É claro que o método de projeto de controle proposto faz com que a variável de saída controlada  $z$  dada por (18) seja tal que  $z \rightarrow 0$  com  $\theta = \theta_T + 2\pi k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . As combinações de  $(x, y, \theta)$  para as quais  $z = 0$  são a reta que desejamos (com  $k = 0$ ) e retas paralelas a ela com deslocamentos múltiplos de  $2\pi$  [rad] (quando  $k \neq 0$ ). Isto pode ser corrigido impondo-se, sem perda de generalidade, que  $|\theta - \theta_T| \leq \pi$ , assim eliminando os múltiplos de  $2\pi$  [rad]. Este método introduz uma descontinuidade na função de Lyapunov  $\vartheta(z) = |z|^2$  que pode ser interpretada como sendo uma correção necessária do ponto alvo  $(x_T, y_T, \theta_T) = (x_T, y_T, \theta_T + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  para impor convergência apenas à reta de interesse.

Existe um compromisso claro para a escolha do parâmetro  $\beta > 0$ . Se  $\beta > 0$  é aumentado para satisfazer o limite (21), o preço a ser pago é a diminuição na razão de convergência de  $\theta(t)$  em direção a  $\theta_T$ . Assim sendo, o resultado do Corolário 3 afirma que a reta desejada  $(y(t) - y_T) = \tan(\theta_T)(x(t) - x_T)$  junto com  $\theta(t) = \theta_T$  é alcançada assintoticamente. No entanto, não é certo que a trajetória do sistema em malha fechada passe pelo ponto alvo  $(x_T, y_T)$ , pois esse objetivo pode ser impossível de ser alcançado devido a existência da restrição na variável de controle  $\delta(t) \in \Delta$  e o fato de que a magnitude do vetor velocidade é mantida constante. Observe que as equações (15)-(16) do modelo cinemático implicam que

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = w_T > 0 \quad (24)$$

Como uma observação final, é importante salientar que não há dificuldade em posicionar o centro de massa CM em alguma posição desejada  $(x_{cm}, y_{cm})$ . Isto pode ser feito posicionando-se a roda traseira em  $(x_T, y_T) = (x_{cm} - \ell_R \cos(\theta_T), y_{cm} - \ell_R \sin(\theta_T))$ . Esses aspectos são ilustrados no estudo de caso que será discutido em detalhes a seguir.

## 5. ESTUDO DE CASO

Simulamos o modelo cinemático (15)-(18) em malha fechada com a lei de controle (19). Adotamos  $\ell_R = \ell_F = 2.0$  [m], velocidade constante  $w_T = 15.0$  [m/s] e ângulo máximo de direção de  $\delta_{max} = \pi/6$  [rad]. A saída controlada  $z$  foi definida para que o ponto alvo para a roda traseira fosse  $(x_T, y_T) = (98.58, 98.58)$  [m] e o ângulo de guinada  $\theta_T = \pi/4$  [rad]. Desta forma, o ponto alvo para o centro de massa foi  $(x_{cm}, y_{cm}) = (100.0, 100.0)$  [m]. Os valores escolhidos para os parâmetros do controlador foram os seguintes:  $\mu = 11.25$  [m/s],  $\gamma = 11.25$  [Hz],  $\kappa = 11.25$  [m/s],  $\beta = 12.12$  [m/rad] e  $\lambda = 1.00$  [m].

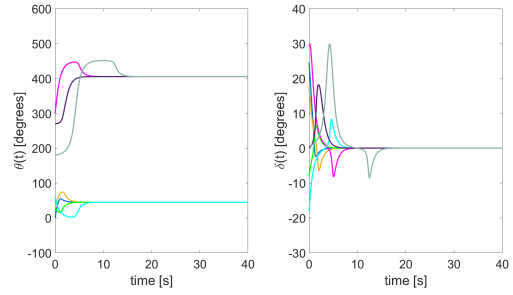


Figura 4. Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  do modelo cinemático no teste de ponto alvo

Foram realizadas sete simulações com condições iniciais diferentes  $(x_0, y_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ , com duração de  $T_{sim} = 40$  [s]. Tendo como base as Figuras 3 e 4 as seguintes observações podem ser feitas:

- Figura 3 mostra que todas as trajetórias traçadas relativamente ao referencial inercial  $(x, y)$  convergem para a reta definida por  $z = 0$  como esperado. Verificamos também que algumas condições iniciais são tão severas que não é possível atingir o ponto alvo com a roda traseira (marca vermelha) ou com o centro de massa (marca preta). Vale lembrar que a velocidade do carro é mantida constante e o ângulo de direção é limitado durante toda a simulação, sendo essas as grandezas que impedem que o veículo possa realizar qualquer tipo de curva.
- O lado esquerdo da Figura 4 mostra a evolução do ângulo de guinada  $\theta(t)$ . Após um certo intervalo de tempo, ele alcança o valor desejado de  $\theta_T = \pi/4$  [rad]. Isto ocorre em todos os casos. A diferença entre eles é o intervalo de tempo necessário para completar esta tarefa.
- O lado direito da Figura 4 mostra o ângulo de direção  $\delta(t)$ . É muito eficaz para atingir os objetivos do projeto e nunca viola  $|\delta(t)| \leq \delta_{max} = \pi/6$  [rad]. Em certos casos, o limite superior é alcançado em algum instante de tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Isto indica, claramente, que os resultados anteriores, embora sejam apenas suficientes para a síntese da lei de controle, não são conservadores.

Este estudo de caso coloca em evidência que a lei de controle proposta é eficaz no contexto do controle de direção do modelo cinemático definido pelas equações (15)-(18). Isto também é verdade sob condições adversas, representadas pelas escolhas das condições iniciais.

### 5.1 Rastreamento de trajetórias

Com o intuito de expandir e demonstrar a aplicabilidade do projeto desenvolvido e da lei de controle proposta, elaboramos também uma estratégia para que o modelo cinemático fosse capaz de rastrear uma trajetória pré-especificada. Esta trajetória é representada por um conjunto de pontos alvo, ou seja, a trajetória é dividida em seguimentos de reta, cada um com um ponto alvo, o qual desejamos que o veículo atinja e, quando ele começar a se distanciar de um deles, o objetivo muda para que o próximo seja atingido e assim sucessivamente.

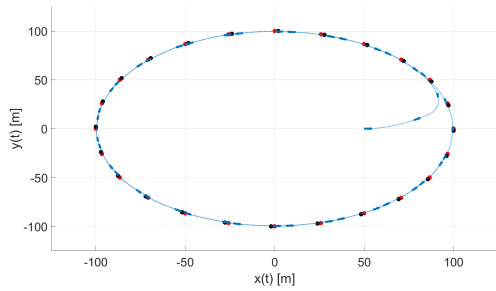


Figura 5. Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático no teste de rastreamento de uma trajetória circular

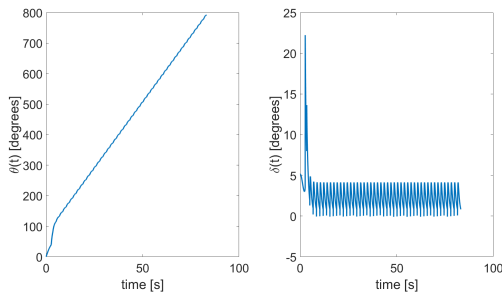


Figura 6. Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  do modelo cinemático no teste de rastreamento de uma trajetória circular

Naturalmente, escolhemos como critério de mudança do ponto alvo, a análise da derivada em relação ao tempo da distância entre o veículo e ponto alvo do segmento corrente, dada por

$$d(t) = \sqrt{(x(t) - x_T)^2 + (y(t) - y_T)^2} \quad (25)$$

$$\dot{d}(t) = \left( \frac{(x(t) - x_T)\dot{x}(t) + (y(t) - y_T)\dot{y}(t)}{d(t)} \right) \quad (26)$$

O ponto alvo muda para o próximo quando for detectado um instante de tempo tal que  $\dot{d}(t) \geq 0$  e  $\dot{d}(t - dt) < 0$  com  $dt > 0$  suficientemente pequeno. Esta condição permite detectar, com certa precisão, a ocorrência do mínimo da função distância. É importante destacar que este não é o único modo de tomar esta decisão, e outros critérios podem levar a resultados diferentes.

Utilizamos os mesmos parâmetros do controlador adotados anteriormente. A trajetória a ser rastreada pelo centro de massa do veículo, foi especificada como sendo uma circunferência centrada na origem com raio  $r = 100$  [m], formada por 24 pontos, sobre a qual o veículo deve dar duas voltas completas. Obtivemos os resultados mostrados nas Figuras 5 e 6, a respeito das quais podemos fazer as seguintes observações:

- A Figura 5 mostra que o controlador proposto consegue rastrear a trajetória desejada, mesmo que no início o veículo não esteja sobre ela. A lei de controle faz o veículo atingir e se manter sobre a trajetória desejada.
- O lado esquerdo da Figura 6 mostra a evolução do ângulo de guinada  $\theta(t)$ . O comportamento observado está de acordo com o esperado, tendo em vista que o veículo deve dar duas voltas completas.
- O lado direito da Figura 6 mostra o ângulo de direção  $\delta(t)$ . É possível notar um comportamento transitório,

no qual o veículo tenta atingir a circunferência, e também um comportamento em regime, quando ele já está sobre a trajetória desejada. As descontinuidades são causadas pelas trocas de ponto alvo.

Desta forma, o teste de rastreamento de trajetória proposto mostra que a lei de controle é adequada para aplicações práticas desde que a trajetória desejada seja decomposta em um conjunto de segmentos de reta.

## 6. CONCLUSÃO

A lei de controle em malha fechada proposta neste artigo, diferentemente do usual, é contínua e combina aspectos bem estabelecidos no âmbito de função de Lyapunov de controle e de modos deslizantes para assegurar convergência em tempo finito. Essas propriedades foram verificadas através de um exemplo ilustrativo de segunda ordem, de um estudo de caso do modelo cinemático clássico de meio-carro e da aplicação do controle desenvolvido no rastreamento de uma trajetória circular definida por um conjunto de segmentos de retas. Dessa forma, concluímos que a lei de controle de realimentação de estado proposta é efetiva no contexto do controle do modelo cinemático de um veículo e oferece uma interessante alternativa a outros métodos existente na literatura que pode ser explorada em outras aplicações práticas.

## REFERÊNCIAS

- Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (1998). Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, 678–682.
- Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (2000). Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems, *SIAM J. Control Optim.*, 38, 751–766.
- Jeon, J. H., Cowlagi, R. V., Petersy, S. C., Frazzoli, E., Tsiotras, P., & Iagnemma, K. (2013). Optimal Motion Planning with the Half-Car Dynamical Model for Autonomous High-Speed Driving, *American Control Conference*, 188–193.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall.
- Kristijan, M., Philippsen, R., & Siegwart, R. (2008). Path Following for Autonomous Vehicle Navigation with Inherent Safety and Dynamics Margin”, *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, 108–113.
- Pacejka, H. (1987). Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies, *SAE Paper N° 870421*.
- Pepy, R., Lambert, A., & Mounier, H. (2006). Path Planning using a Dynamic Vehicle Model, *2nd International Conference on Information & Communication Technologies*, 781–786.
- Rucco, A., Notarstefano, G., & Hauser, J. (2012). Computing minimum lap-time trajectories for a single-track car with load transfer, *51st IEEE Conference on Decision and Control*, 6321–6326.
- Utkin, V. I. (1993). Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40, 23–36.
- Ying, X. (2010). Racing Line Optimization, *Master of Science in Computation for Design and Optimization*, Massachusetts Institute of Technology.