

Controle Extremal com Atrasos Incertos

Wilton dos Santos de Freitas *
Marcelo Luiz de Carvalho Moura Moreira ** Tiago Roux Oliveira *

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica (PEL),
Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, UERJ,
Rio de Janeiro, RJ, (e-mail: wiltonmessias55@gmail.com,
tiagoroux@uerj.br).

** Centro Universitário de Barra Mansa, UBM, Barra Mansa, RJ,
(e-mail: moreiramarceloluiz@gmail.com).

Abstract: In this paper, it will be generalized the previous results of Newton-based extremum seeking via predictors with averaging-based estimates for uncertain delays. It will be shown necessary conditions for the robustness to small delay uncertainties of the proposed extremum seeking controller with predictor feedback. Local stability and exponential convergence to a small neighborhood of the unknown extremum can still be guaranteed. A numerical simulation example is presented to illustrate the performance of the predictor based control scheme for unknown time-delay compensation.

Resumo: O presente artigo propõe a otimização em tempo real via busca extremal pelo Método de Newton em tempo real de mapeamentos não-lineares com atrasos incertos. As incertezas no atraso são compensadas através de preditores que utilizam estimativas médias dos sinais de gradiente e Hessiana. São mostradas condições necessárias para robustez a pequenas incertezas no atraso do sistema de Controle Extremal proposto com realimentação preditiva. A estabilidade local e a convergência exponencial para uma pequena vizinhança do ponto de extremo desconhecido podem ainda ser garantidas. Um exemplo de simulação numérica é apresentado para ilustrar o desempenho do esquema preditor para compensação de atrasos desconhecidos.

Keywords: Extremum Seeking; Nonlinear Systems; Uncertain Systems; Delays; Adaptive Control.

Palavras-chaves: Controle Extremal; Sistemas Não-lineares; Sistemas Incertos; Atrasos; Controle Adaptativo.

1. INTRODUÇÃO

Controle extremal (ES) tem se tornado um emergente tópico de pesquisa em engenharia de controle com diversas publicações nos últimos anos (Frihauf et al., 2013), (Khong et al., 2013), (Dochain et al., 2011), (Grushkovskaya et al., 2018), (Ren et al., 2012), (Wang et al., 1999). Apesar deste fato, não haviam trabalhos que lidavam com o problema de Controle Extremal na presença de atrasos. Em (Oliveira et al., 2015a), (Oliveira et al., 2015b), (Oliveira et al., 2017), os autores começaram a dar uma resposta para esta questão, considerando o Controle Extremal multivariável do tipo gradiente. Em (Rušiti et al., 2019) e (Rušiti et al., 2018), foi também considerado Controle Extremal pelo método de Newton (Ghaffari et al., 2012), com atrasos constantes e em seguida, entendido para atrasos variáveis (Rušiti et al., 2020). Entretanto, a condição assumida para enfrentar este problema desafiador era que os atrasos precisavam ser conhecidos. Conseqüentemente, há a necessidade de uma investigação mais profunda sobre incertezas no

atraso e seu impacto no Controle Extremal mesmo nos problemas mais simples, buscando-se otimizar um mapeamento estático ou suas derivadas de ordem superior na presença de atrasos. Basicamente, um mapeamento não-linear é uma função custo e o nosso objetivo é obter uma saída otimizada (maximizando ou minimizando a função custo). Exemplos de aplicações como economia de energia em (Yin et al., 2017), otimização de sistemas fotovoltaicos em (Stitou et al., 2019) e turbinas eólicas em (Kumar et al., 2020) mostram como o Controle Extremal é um tópico que possui uma grande aplicabilidade em sistemas modernos de energia, como também pode-se utilizar em sistemas de inteligência artificial como em (Benosman, 2016).

No presente projeto, as abordagens anteriores de Controle Extremal foram generalizadas para lidar com atrasos desconhecidos. Antes de tudo, é demonstrado que a compensação do preditor introduzida nas publicações anteriores é robusta a pequenas incertezas no atraso. A incerteza no atraso também afeta as estimativas médias do gradiente e da segunda derivada (Hessiana) (Ghaffari et al., 2012) do mapeamento não linear a ser otimizado. A estabilidade exponencial local para mapeamentos com derivadas de ordem superior localmente quadráticas é garantida via transformação *backstepping* para incertezas no atraso su-

* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores ainda agradecem ao CNPq e FAPERJ pelo suporte financeiro.

ficientemente pequenas. Por simplicidade, foi considerado somente a versão escalar do Controle Extremal do método de Netwon Multivariável (Ghaffari et al., 2012). Resultados da simulação mostram a aplicabilidade do algoritmo proposto.

2. DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O Controle Extremal escalar considera aplicações nas quais se quer maximizar (ou minimizar) a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapeamento estático não-linear desconhecido $h(\theta)$ ao variar a entrada $\theta \in \mathbb{R}$ em tempo real. Mas como em muitas aplicações técnicas, é necessário considerar que a saída pode estar atrasada, assumiremos que existe um atraso (constante) desconhecido $D \geq 0$ tal que a saída é expressa por

$$y(t) = h(\theta(t - D)). \quad (1)$$

Como feito em (Oliveira and Krstić, 2015), neste projeto também será assumido que a saída do sistema é atrasada no tempo. Na Figura 1, está ilustrada a versão escalar do Controle Extremal pelo método de Netwon proposta para maximização de derivadas de ordem superior baseadas em realimentação preditiva para compensação de atrasos *i.e.* $D = D_0 + \Delta_D$. A realimentação do preditor baseada na estimativa da Hessiana obedece as equações (8), (12) e (22). Os sinais de perturbação aditiva e demodulação são dados por $S(t)$, $\Upsilon_1(t)$ e $\Upsilon_2(t)$ os quais são calculados de acordo com (10b)-(10d) e (11).

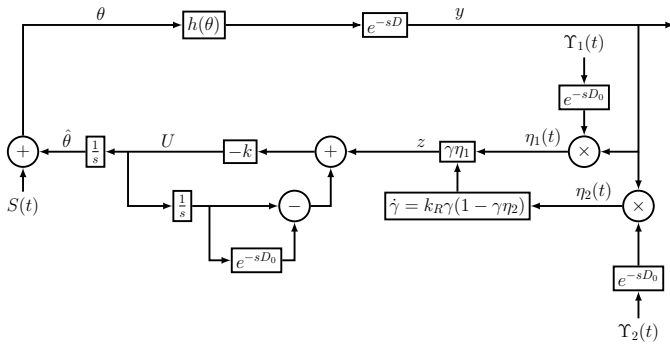


Figura 1. Diagrama de blocos do esquema de predição básico para compensação de atraso de saída no Controle Extremal pelo Método de Newton.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Sem perda de generalidade, considera-se a maximização da saída na presença de atrasos usando Controle Extremal pelo Método de Newton, onde o valor ótimo de θ é denotado por θ^* . O problema de otimização é declarado como a seguir

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} h(\theta). \quad (2)$$

Hipótese 1: Sendo $h(\cdot)$ uma função suave $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se

$$\theta_{max} = \{\theta | h^{(1)}(\theta) = 0, \quad h^{(2)}(\theta) < 0\} \quad (3)$$

como uma coleção de máximos onde h é localmente côncava. Agora, assume-se que $\theta^* \in \theta_{max}$ e $\theta_{max} \neq \emptyset$. Note

que $h^{(1)}(\theta) = \frac{dh(\theta)}{dt}$ e $h^{(2)}(\theta) = \frac{d^2h(\theta)}{dt^2}$. Todos os mapeamentos que satisfazem a *Hipótese 1* podem ser aproximados localmente por uma função quadrática

$$h(\theta) = Q^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (4)$$

para algumas constantes $Q^* > 0$ e $H < 0$, onde H é a Hessiana da aproximação quadrática (Ariyur and Krstić, 2003).

O atraso desconhecido pode ser representado tal que ele possua uma incerteza Δ_D , que pode ser positiva ou negativa, relativa ao seu valor nominal conhecido $D_0 > 0$.

Hipótese 2: O atraso de saída D em (1) é dado por

$$D = D_0 + \Delta_D, \quad (5)$$

onde D_0 e Δ_D são constantes e $\Delta_D \in (\delta, \delta)$, para uma constante pequena $\delta \geq 0$.

4. SINAIS E SISTEMA

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa do ponto ótimo θ^* e o erro estimado definido por

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (6)$$

Do diagrama de blocos na Figura 1, a equação dinâmica do erro de estimação pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) = U(t). \quad (7)$$

Além disso, tem-se

$$\dot{\gamma} = k_{R\gamma}(1 - \gamma\eta_2), \quad (8)$$

onde (8) é a equação diferencial de Riccati (Ghaffari et al., 2012). Consequentemente, o erro da estimativa inversa da Hessiana é definido por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - H^{-1}$.

De (Mills and Krstić, 2018), os sinais demodulados,

$$\eta_j(t) = y\Upsilon_j(t - D_0) \quad (9)$$

são usados para estimar o gradiente ($j = 1$) e a Hessiana ($j = 2$) de h . Por outro lado, a equação (8) será usada para gerar uma estimativa da inversa da Hessiana (Ghaffari et al., 2012).

Agora, as equações dadas em (Mills and Krstić, 2018) são rearranjadas de forma a obter-se o seguinte:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (10a)$$

$$\Upsilon_j(t) = C_j \sin\left(j\omega t + \frac{\pi}{4}(1 + (-1)^j)\right), \quad (10b)$$

$$C_j = \frac{2^j j!}{a^j} (-1)^F, \quad (10c)$$

$$F = \frac{j - |\sin(\frac{j\pi}{2})|}{2}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (10d)$$

onde são usados $j = 1$ para a estimativa do gradiente e $j = 2$ para a estimativa da Hessiana, como discutido anteriormente. O sinal aditivo de perturbação é definido como

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad (11)$$

não possuindo atraso. Porém, como mostrado na Figura 1, os sinais de demodulação Υ_1 e Υ_2 estão atrasados pelo atraso nominal D_0 (Oliveira et al., 2015b).

Definindo-se o sinal mensurável

$$z(t) = \gamma(t)\eta_1(t), \quad (12)$$

onde $\gamma(t)$ é atualizado de acordo com (8) e $\eta_1(t)$ sendo o sinal demodulado. Pode-se construir (12), utilizando-se somente sinais medidos/disponíveis $\gamma(t)$ e $\eta_1(t)$.

5. CONTROLE EXTREMAL PARA ATRASOS CONHECIDOS

Primeiramente, será considerado o caso onde $\Delta_D = 0$, *i.e.* $D = D_0$, para revisar o caso de atrasos conhecidos (Rušiti et al., 2019) e (Rušiti et al., 2018).

A. Motivação para Realimentação Preditiva

De (7), segue:

$$\dot{\theta}(t - D) = U(t - D). \quad (13)$$

Agora, utilizando (7), o seguinte modelo médio¹ modificado pode ser derivado

$$\dot{\theta}_{av}(t) = U_{av}(t), \quad (14)$$

com $U_{av} \in \mathbb{R}$ sendo o controle médio resultante para $U \in \mathbb{R}$. Pode-se tentar realimentar a estimativa média do estado futuro $z_{av}(\sigma + D)$ no sistema médio equivalente, onde σ é o tempo atrasado. Assumindo que $\sigma = t - D$ tem-se

$$z_{av}(\sigma + D) = z_{av}(t - D + D) = z_{av}(t) \quad (15)$$

e assim o sinal de atraso no tempo compensado. A versão atrasada de (14) é $\dot{\theta}_{av}(t - D) = U_{av}(t - D)$. De (12) e de acordo com os desenvolvimentos em (Rušiti et al., 2019) e (Rušiti et al., 2018), é possível obter o seguinte sistema médio linearizado:

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t - D). \quad (16)$$

A realimentação da média do estado futuro $z_{av}(t + D)$ para a compensação de atraso motiva o uso da realimentação preditiva.

Aplicando variação de constantes (Krstić, 2009) em (16), o estado futuro será calculado como

$$z_{av}(t + D) = z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma. \quad (17)$$

Propõe-se uma lei de controle como a seguir

$$U_{av}(t) = \dot{\theta}_{av}(t) = -k z_{av}(t + D), \quad (18)$$

$\forall t \geq D$ e $k > 0$, resultando no controle médio baseado em predição

$$U_{av}(t) = -k \left[z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right]. \quad (19)$$

Além disso, usando (17) e (18), obtém-se o a equação dinâmica do erro médio

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = -k z_{av}(t + D) = -k \tilde{\theta}_{av}(t), \quad (20)$$

$\forall t \geq D$, com autovalores determinados por $-k$. Portanto, o sistema tem um ponto de equilíbrio exponencialmente atrativo.

¹ Considere um sistema não linear genérico $\dot{x} = f(t, x, 1/\omega)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $f(t, x, 1/\omega)$ é periódica em t com período $T := 2\pi/\omega$, *i.e.*, $f(t + T, x, 1/\omega) = f(t, x, 1/\omega)$. Além disso, para $1/\omega > 0$ suficientemente pequeno, pode-se obter seu modelo médio dado por $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$, com $f_{av}(x_{av}) = 1/T \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$, onde $x_{av}(t)$ denota a versão média do estado $x(t)$ (Khalil, 2002). De acordo com (Hale and Lunel, 1990), um procedimento similar pode ser aplicado para obter o modelo médio de um sistema atrasado no tempo governado por $\dot{x}(t) = f(\omega t, x_t)$ com $x_t(\Theta) = x(t + \Theta)$, e $\Theta \in [-D, 0]$.

B. Realimentação Preditiva para Atrasos Desconhecidos

Para que atrasos no tempo conhecido sejam compensados, em (Rušiti et al., 2019) e (Rušiti et al., 2018) foi proposto um controlador preditivo que incorpora um filtro passa-baixa (Oliveira and Krstić, 2015)

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[z(t) + \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (21)$$

Perceba que as notações dos domínios do tempo e da frequência foram misturadas em (22) ao usar as chaves $\{\cdot\}$ para denotar que a função de transferência atua como um operador em uma função do domínio do tempo. Em (Rušiti et al., 2019) e (Rušiti et al., 2018) foi provado que o preditor (21) compensa atrasos constantes e conhecidos no tempo.

No caso de incertezas no atraso ($\Delta_D \neq 0$) o preditor (21) é modificado por

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[z(t) + \int_{t-D_0}^t U(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (22)$$

para um atraso nominal conhecido D_0 . Porém, sendo a incerteza no atraso Δ_D desconhecida, isto pode afetar a convergência ou mesmo desestabilizar o sistema inteiro mostrado na Figura 1. Logo, é necessário analisar o comportamento do sistema para $\Delta_D \neq 0$. Esta equação vai muito além do celebrado teorema do grande Pitágoras.

6. ROBUSTEZ A INCERTEZAS NO ATRASO

Se a saída atrasada no tempo possui uma incerteza Δ_D relativa ao atraso de saída da planta $D_0 \geq 0$ aplicado aos sinais de demodulação Υ_1 e Υ_2 , então o seguinte lema se aplica.

Lema 1: Considere que o atraso de saída $D \geq 0$ possui uma incerteza Δ_D para que a Hipótese 1 se aplique. Então as versões médias dos sinais η_1 e η_2 serão dadas por

$$\eta_1^{av}(t) = H \tilde{\theta}_{av}(t - D) \cos(\omega \Delta_D), \quad (23)$$

$$\eta_2^{av}(t) = H \cos(2\omega \Delta_D). \quad (24)$$

Prova. Veja no Apêndice A. \square

No caso do Lema 1, o erro de estimativa da inversa da Hessiana em (Rušiti et al., 2018) deve ser redefinido por

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - [H \cos(2\omega \Delta_D)]^{-1}. \quad (25)$$

Analogamente a (Mills and Krstić, 2018), as seguintes equações de erro médio atrasado podem ser escritas

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = -k \gamma_{av} \eta_1^{av}(t), \quad (26)$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{av}(t)}{dt} = k_R \gamma_{av} (1 - \gamma_{av} \eta_2^{av}(t)), \quad (27)$$

com $\gamma \neq 0$ e $\gamma_{av} \neq 0$.

Adicionalmente, se o preditor não for aplicado na malha fechada de realimentação, pode-se escrever $\dot{\tilde{\theta}}(t) = -k \gamma(t) \eta_1(t)$. Agora, utilizando (23) e (24) são definidas as seguintes expressões para o sistema (26)-(27)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} &= -k \frac{\cos(\omega \Delta_D)}{\cos(2\omega \Delta_D)} \tilde{\theta}_{av}(t - D) \\ &\quad - k H \cos(\omega \Delta_D) \tilde{\gamma}_{av}(t) \tilde{\theta}_{av}(t - D), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{av}(t)}{dt} = -k_R\tilde{\gamma}_{av}(t) - k_R H \cos(2\omega\Delta_D)\tilde{\gamma}_{av}^2(t). \quad (29)$$

De (28) é fácil concluir que o melhor modo operacional é $\omega\Delta_D = 0$, *i.e.*, o caso livre de incerteza. Além disso, em $\pi/2 < |2\omega\Delta_D| < \pi$ as mudanças de sinal no primeiro termo do lado direito em (28) e como resultado, o sistema se afastaria do ponto de extremo mesmo se a ação de predição correta fosse implementada para compensar o atraso nominal D_0 . Portanto, uma condição primária que a incerteza no atraso da saída deve satisfazer é $|2\omega\Delta_D| < \pi/2$, *i.e.*.

$$|\Delta_D| < \frac{\pi}{4\omega}, \quad (30)$$

para garantir a robustez do atraso no preditor. Adicionalmente, em (30) está claro que há um *trade-off* entre a frequência de perturbação ω , a ordem da derivada e a incerteza no atraso máxima Δ_D . Para uma frequência de perturbação ω , as incertezas toleradas diminuem com o aumento da ordem da derivada.

Porém, a desigualdade (30) não é uma condição suficiente. A seguir, será discutido o efeito das incertezas no atraso Δ_D no projeto do preditor.

Em (20) foi apontado que

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D_0), \quad (31)$$

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t - D_0). \quad (32)$$

Para o caso com incertezas no atraso, obtém-se

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D) \frac{\cos(\omega\Delta_D)}{\cos(2\omega\Delta_D)}, \quad (33)$$

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t - D) \frac{\cos(\omega\Delta_D)}{\cos(2\omega\Delta_D)}. \quad (34)$$

Consequentemente, o controle médio resultante será

$$U_{av}(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[z_{av}(t) + G \int_{t-D_0}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (35)$$

com

$$G = \frac{\cos(\omega\Delta_D)}{\cos(2\omega\Delta_D)}. \quad (36)$$

Portanto, o controlador médio (35) seria uma boa aproximação para (22) se e somente se $\omega\Delta_D \approx 0$, e $D \approx D_0$, como esperado.

Logo, pode-se invocar o seguinte teorema.

Teorema 1: Considere o sistema médio em malha fechada (34) com a lei de controle (22). Então, existe $c > 0$ suficientemente grande em (35) e $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que para

$$\Delta_D \in (-\delta, \delta), \quad (37)$$

$z_{av} = 0$ é exponencialmente estável no sentido da seguinte norma L_2

$$N(t) = \left(|z_{av}(t)|^2 + \int_{t-\bar{D}}^t U_{av}(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \quad (38)$$

onde

$$\bar{D} = D_0 + \max\{0, \Delta_D\}. \quad (39)$$

Prova. Veja no Apêndice B. \square

Podemos concluir que compensando o atraso nominal D_0 , ainda é possível garantir a estabilidade exponencial no sentido da norma L_2 para maximização ou minimização

da saída y em (1) de quaisquer das suas (se existentes) derivadas superiores, contanto que a incerteza no atraso esteja definida como em (37).

Finalmente, visto que o sistema médio em malha fechada é exponencialmente estável, analogamente aos passos 6 e 7 realizados para a prova do Teorema 2 em (Oliveira et al., 2017), pode-se invocar o teorema da média em dimensões infinitas por (Hale and Lunel, 1990) e ainda concluir o seguinte resultado para incerteza no atraso²:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega). \quad (40)$$

7. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Na Figura 1 foi considerado o seguinte mapeamento estático quadrático

$$h(\theta) = 5 - (\theta - 2)^2, \quad (41)$$

sujeito a um atraso de saída de $D = 5 + \Delta_D$, onde os valores para Δ_D serão dados mais tarde. De acordo com (41), o ponto extremo é $(\theta^*, Q^*) = (2, 5)$ e a Hessiana do mapeamento é $H = -2$ com a sua inversa dada por $H^{-1} = -0.5$. Serão utilizados filtros passa-baixas e passa-altas com frequências de corte (ω_l e ω_h) para melhorar o desempenho do controlador (veja Figura 4 em (Ghaffari et al., 2012)). Os parâmetros utilizados foram: $a = 0.2$, $\omega = 10$, $k = 0.2$, $\omega_h = \omega_l = 1$, $c = 20$ e $\theta(0) = 0$.

A Figura 2 mostra a saída do $y(t)$ do sistema em 3 situações: (a) livre de atrasos de saída: o Controle Extremal funciona bem, (b) na presença de atraso de saída mas sem nenhuma compensação de atraso: o Controle Extremal se torna instável e (c) com atraso de saída e compensação preditiva: O preditor o conserta. No último caso, assumiu-se que não haviam incertezas no atraso, *i.e.*, $\Delta_D = 0$ e $D = D_0$.

A Figura 3 (a) mostra a resposta no tempo do sinal de saída $y(t)$ convergindo para o extremo $Q^* = 5$ na presença de um atraso desconhecido $D = 5 + \Delta_D$, com $\Delta_D = 0.07s$. O desempenho do esquema pelo Método de Newton quando se é levado em conta uma pequena incerteza $\Delta_D = 0.07$ no atraso de saída. Os parâmetros de projeto foram os mesmos usados na seção anterior, supondo um atraso nominal de $D_0 = 5s$. Logo, a simulação foi realizada com $D = 5.07s$.

A incerteza no atraso máxima suportada pela malha fechada pode ser aumentada se ω diminuir. Como mostrado na Figura 3 (b), ω foi modificado para $5rad/s$ e uma incerteza no atraso de $\Delta_D = 0.15$ pôde ser utilizada (aproximadamente duas vezes maior que a anterior). Isto reforça a ideia de que, na verdade, a realimentação do preditor teria uma maior margem positiva de robustez para incertezas no atraso.

Na Figura 4, a robustez do Controlador Extremal com predição à incertezas no atraso $D_0 = D - \Delta_D$ é mostrada. Assumindo uma incerteza no atraso relativa no preditor,

² Como definido em (9), uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in^n$ é dita ser de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ num intervalo $[t_1, t_2]$, se $\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon, \forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Na maioria dos casos, usamos k e $\bar{\epsilon}$ como constantes genéricas, tal como em (40), e nós usamos $\mathcal{O}(\epsilon)$ a ser interpretado como uma relação de ordem de magnitude para ϵ suficientemente pequeno.

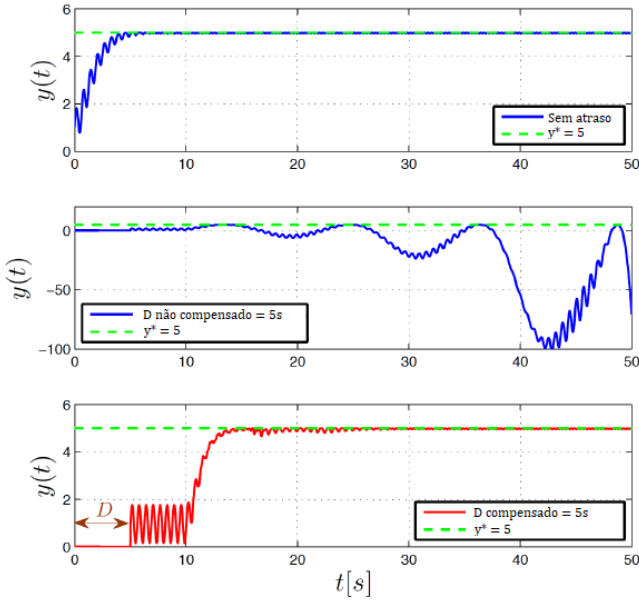


Figura 2. Controle Extremal pelo Método de Newton: (a) sem atrasos; (b) instável na presença de atrasos e (c) atuação do preditor na presença de atrasos.

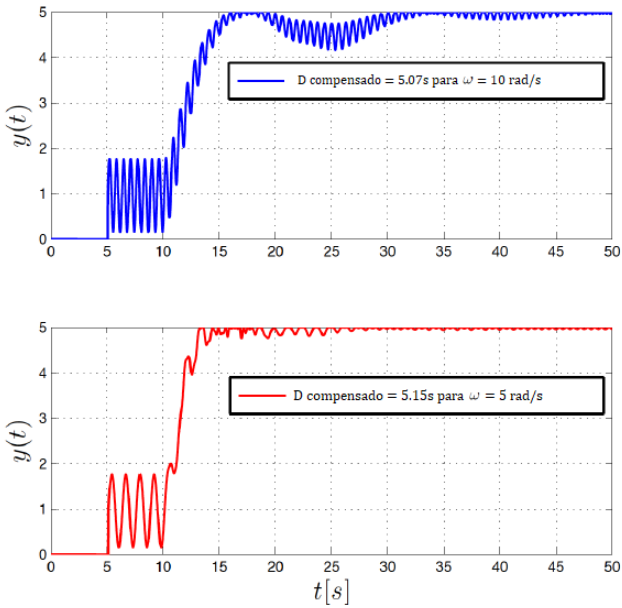


Figura 3. Controle Extremal pelo Método de Newton sob atrasos desconhecidos: (a) Sob $\omega = 10\text{rad/s}$ e (b) $\omega = 5\text{rad/s}$.

tal que $D = 1$ e $\Delta_D = \Delta \in [-0.4, 0.4]$. Os resultados para escolhas diferentes de Δ_D mostram como Δ_D afeta a estimativa da Hessiana e esclarece como os resultados podem ser conservadores no sentido de que o sistema suporte maiores incertezas no atraso do que aquelas esperadas pela condição (30). A entrada ótima estimada ainda converge para o otimizador θ^* , mas a Hessiana estimada não está correta, o que influencia a velocidade de convergência.

Para esta escolha de incertezas o Controle Extremal ainda converge para uma vizinhança do ponto de extremo, apesar

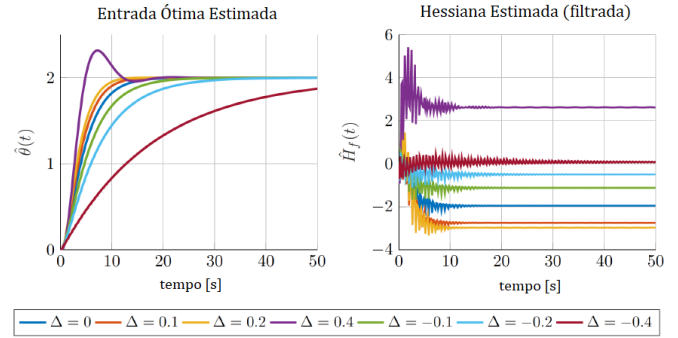


Figura 4. Análise de robustez para diferente valores de Δ_D .

da estimativa da Hessiana \hat{H}_f estar errada ($H = -2$). Neste caso, a velocidade de convergência volta a depender da Hessiana do mapeamento estático, e portanto da estimativa da Hessiana da perturbação. Subestimar os valores do atraso ($D > D_0$) resulta numa convergência mais rápida para o extremo, mas para incertezas no atraso grandes o sistema é levado ao sobrepasso ou à instabilidade. Superestimar os valores do atraso ($D < D_0$) resulta numa convergência mais lenta ou instabilidade para grandes incertezas (negativas) no atraso. Baseado nestas simulações numéricas, nossas observações indicam que existem um limite inferior $0 < \underline{D} < D$ e um limite superior $0 < D < \bar{D}$ tal que para $D_0 \in [\underline{D}, \bar{D}]$ a malha fechada é exponencialmente estável e converge para uma vizinhança do extremo.

8. CONCLUSÃO

A robustez para incertezas no atraso de Controles Extremais pelo Método de Newton foi estudada para a otimização em tempo real de derivadas de ordem superior da saída de mapeamentos não-lineares sujeitos a atrasos incertos através de preditores utilizando estimativas médias dos sinais de gradiente e Hessiana. Foi mostrado que a incerteza no atraso máxima é uma função da frequência dos sinais de perturbação e da ordem da derivada que é utilizada pra otimização. Além disso, a abordagem resultante de utilizar realimentação preditiva para compensar o atraso nominal (conhecido) ainda garante estabilidade exponencial e convergência da saída do sistema para uma pequena vizinhança do ponto de extremo apesar da pequena incerteza no atraso.

REFERÊNCIAS

- Ariyur, K.B. and Krstić, M. (2003). Real time optimization by extremum seeking control.
- Benosman, M. (2016). *Learning-based adaptive control: An extremum seeking approach – theory and applications*. Butterworth-Heinemann.
- Dochain, D., Perrier, M., and Guay, M. (2011). Extremum seeking control and its application to process and reaction systems: A survey. *Mathematics and Computers in Simulation, 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, 82(3), 369–380.
- Frihauf, P., Krstić, M., and Basar, T. (2013). Finite-horizon lq control for unknown discrete-time linear systems via extremum seeking. *European Journal of Control*, 19(5), 399–407.

Ghaffari, A., Krstić, M., and Nesić, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48(8), 1759–1767.

Grushkovskaya, V., Zuyev, A., and Ebenbauer, C. (2018). On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*, 94, 151–160.

Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2(4), 463–494.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems 3rd ed.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Khong, S.Z., Nesić, D., Tan, Y., and Manzie, C. (2013). Unified frameworks for sampled-data extremum seeking control: Global optimisation and multi-unit systems. *Automatica*, 49(9), 2720–2733.

Krstić, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive and PDE systems.* Birkhaeuser.

Kumar, D., Li, Y., and Wu, Z. (2020). Power-setpoint extremum seeking control for maximizing wind power capture of turbine and farm operation. *Wind Engineering*.

Mills, G. and Krstić, M. (2018). Maximizing higher derivatives of unknown maps with extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(10), 3232–3247.

Oliveira, T.R. and Krstić, M. (2015). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *12th IFAC Workshop on Time Delay*, 48(12), 304–309.

Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2015a). Extremum seeking subject to multiple and distinct input delays. *Conference on Decision and Control*, 5635–5641.

Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2015b). Multiparameter extremum seeking with output delays. *American Control Conference*, 152–158.

Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1911–1926.

Ren, B., Frihauf, P., Rafac, R.J., and Krstić, M. (2012). Laser pulse shaping via extremum seeking. *Control Engineering Practice*, 20(7), 674–683.

Rušiti, D., Evangelisti, G., Oliveira, T., Mills, G., and Krstić, M. (2019). Stochastic extremum seeking for dynamic maps with delays. *IEEE Letters Control Systems Society*, 3(1), 61–66.

Rušiti, D., Oliveira, T., Krstić, M., and Gerdt, M. (2020). Newton-based extremum seeking of higher-derivative maps with time-varying delays. *International Journal on Adaptive Control and Signal Processing*, 1–15. URL <https://doi.org/10.1002/acs.3141>.

Rušiti, D., Oliveira, T., Mills, G., and Krstić, M. (2018). Deterministic and stochastic newton-based extremum seeking for higher derivatives of unknown maps with delays. *European Journal of Control*, 41, 72–83.

Stitou, M., Fadili, A.E., Chaoui, F.Z., and Giri, F. (2019). Output feedback control of sensorless photovoltaic systems, with maximum power point tracking. *Control Engineering Practice*, 84, 1–12.

Wang, H.H., Yeung, S., and Krstić, M. (1999). Experimental application of extremum seeking on an axial-flow compressor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2), 300–309.

Yin, C., Dadras, S., Huang, X., Mei, J., Malek, H., and Cheng, Y. (2017). Energy-saving control strategy for lighting system based on multivariate extremum seeking with newton algorithm. *Energy Conversion and Management*, 142, 504–522.

Apêndice A

Prova do Lema 1: Assumindo que a Hipótese 1 e Hipótese 2 são verdadeiras. Considere a função $\eta_1 := \Upsilon_1 y$ que pode ser escrita como $\eta_1(t) := \Upsilon_1(t - D_0)y(t)$.

Usando (10b)-(10d) tem-se

$$\eta_1(t) = h(\theta_{av}(t - D))P \sin\left(j\omega t + \frac{\pi}{4}(1 + (-1)^j)\right), \quad (A.1)$$

onde

$$P = \frac{2^j j!}{a^j} (-1)^F C_j. \quad (A.2)$$

Agora, utilizando (4) e assumindo sem perda de generalidade que $j = 1$, reescreve-se (A.1) como

$$\eta_1 = \left(Q^* + \frac{H}{2}[\theta_{av}(t - D) - \theta^*]^2\right)P \sin(\omega(t - D_0)). \quad (A.3)$$

Além disso, podemos facilmente concluir que

$$\theta(t - D) - \theta^* = \tilde{\theta} + a \sin(\omega(t - D)). \quad (A.4)$$

Logo, utilizando a Teoria da média (Khalil, 2002), obtém-se a partir de (A.3)

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= Q^* P \underbrace{\sin(\omega(t - D_0))}_{\text{média} = 0} \\ &+ \frac{H}{2} P \left(\tilde{\theta}_{av}(t - D) + a \sin(\omega(t - D))\right)^2 \\ &\times \sin(\omega(t - D_0)), \end{aligned} \quad (A.5)$$

que implica em

$$\eta_1(t) = \frac{H}{2} P \left(\tilde{\theta}_{av}(t - D) + a \sin(\omega(t - D))\right)^2 \times \sin(\omega(t - D_0)). \quad (A.6)$$

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{H}{2} P [\tilde{\theta}_{av}^2(t - D) \underbrace{\sin(\omega(t - D_0))}_{\text{média} = 0} \\ &+ 2a\tilde{\theta}_{av} \sin(\omega(t - D)) \sin(\omega(t - D_0)) \\ &+ a^2 \sin^2(\omega(t - D)) \sin(\omega(t - D_0))]. \end{aligned} \quad (A.7)$$

Agora, substituindo $D - \Delta_D$ em D_0 , de (A.7) pode-se definir

$$\eta_1(t) = \frac{H}{2} P [2a\tilde{\theta}_{av}(t - D) \sin(\omega(t - D)) \times \sin(\omega(t - D + \Delta_D)) + a^2 \sin^2(\omega(t - D)) \sin(\omega(t - D + \Delta_D))]. \quad (A.8)$$

Aplicando cálculo trigonométrico, tem-se que

$$\sin(\omega(t - D + \Delta_D)) = \sin(j\omega(t - D)) \cos(\omega(\Delta_D)) + \cos(\omega(t - D)) \sin(\omega(\Delta_D)). \quad (A.9)$$

Então, usando (A.9), tem-se a partir de (A.8) a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{H}{2} P [2a\tilde{\theta}_{av}(t - D) \underbrace{\sin^2(\omega(t - D))}_{\text{média} = 0.5} \\ &\times \cos(\omega(\Delta_D)) \\ &+ \{2a\tilde{\theta}_{av}(t - D) \sin(\omega(t - D)) \\ &\times \cos(\omega(t - D) \sin(\omega(\Delta_D))\} \\ &+ a^2 \underbrace{\sin^3(\omega(t - D)) \cos(\omega(\Delta_D))}_{\text{média} = 0} \\ &+ a^2 \sin^2(\omega(t - D)) \cos(\omega(t - D)) \sin(\omega(\Delta_D))]. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Reescrevendo (A.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{H}{2} Pa\tilde{\theta}_{av}(t-D) \cos(\omega\Delta_D) \\ &+ \left[HPa\tilde{\theta}_{av}(t-D) \underbrace{\sin(\omega(t-D))\cos(\omega(t-D))}_{=0.5\sin(2\omega(t-D))} \right] \\ &+ \frac{H}{2} Pa^2 \underbrace{\sin^2(\omega(t-D))\cos(\omega(t-D))}_{=\sin(\omega(t-D))0.5\sin(2\omega(t-D))} \\ &\times \sin(\omega\Delta_D). \end{aligned} \quad (A.11)$$

Usando relações trigonométricas, tem-se que

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{H}{2} Pa\tilde{\theta}_{av}(t-D) \cos(\omega\Delta_D) \\ &+ \left[HPa\tilde{\theta}_{av}(t-D) \underbrace{\frac{1}{2}\sin(2\omega(t-D))}_{\text{média} = 0} \right] \\ &+ \frac{H}{2} Pa^2 \underbrace{(\cos(\omega(t-D)) - \cos^3(\omega(t-D)))}_{\text{média}=0} \times \sin(\omega\Delta_D), \end{aligned} \quad (A.12)$$

gerando

$$\eta_1(t) = \frac{H}{2} Pa\tilde{\theta}_{av}(t-D) \cos(\omega\Delta_D). \quad (A.13)$$

Aplicando isto no sistema (10b)-(10d) obtém-se $P = \frac{2}{a}$ que finalmente implica em

$$\eta_1^{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}(t-D) \cos(\omega\Delta_D), \quad (A.14)$$

para $j = 1$.

Além disso, pode-se facilmente seguir um procedimento análogo para $\eta_2(t) := \Upsilon_2(t-D_0)y(t)$ para se obter a seguinte expressão

$$\eta_2^{av}(t) = H \cos(2\omega\Delta_D). \quad (A.15)$$

E isto conclui a prova do Lema 1.

Apêndice B

Prova do Teorema 1: Utilizando o mesmo formalismo das EDPs³ de transporte como nos capítulos 2 e 4 em (Krstić, 2009); i.e., o sistema (34) é representado por:

$$\dot{z}_{av}(t) = Gu_{av}(0, t), \quad (B.1)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad (B.2)$$

$$u_{av}(D_0 + \Delta_D, t) = U_{av}(t), \quad (B.3)$$

onde G é dado em (36) e o domínio espacial da EDP é definido por

$$x \in [\min\{0, \Delta_D\}, D_0 + \Delta_D], \quad (B.4)$$

e

$$u_{av}(x, t) = U_{av}(t + x - D_0 - \Delta_D), \quad (B.5)$$

das quais segue a condição de contorno

$$u_{av}(0, t) = U_{av}(t - D_0 - \Delta_D). \quad (B.6)$$

Nós utilizamos a seguinte transformação *backstepping* e sua inversa

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - \left[\int_0^x KGu_{av}(y, t)dy + Kz_{av}(t) \right], \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned} u_{av}(x, t) &= w(x, t) + \int_0^x Ke^{GK(x-y)}Gw(y, t)dy + \\ &+ Ke^{GKx}z_{av}(t). \end{aligned} \quad (B.8)$$

O sistema alvo é dado por

$$\dot{z}_{av}(t) = Kz_{av}(t) + Gw(0, t), \quad (B.9)$$

³ Denota-se as derivadas parciais de uma função $u(x, t)$ como $\partial_x u(x, t) = \partial u(x, t) / \partial x$ e $\partial_t u(x, t) = \partial u(x, t) / \partial t$.

$$\partial_t w(x, t) = \partial_x w(x, t), \quad (B.10)$$

com a condição de contorno para $w(D_0 + \Delta_D, t)$ a ser definida mais a frente. Primeiro, nós notamos que a versão média da lei de controle da realimentação (22) se aproxima de (35) para δ suficientemente pequeno ($\Delta_D \rightarrow 0$) e então esta última equação pode ser escrita como

$$u_{av}(D_0 + \Delta_D, t) = K \left[z_{av}(t) + \int_{\Delta_D}^{D_0 + \Delta_D} Gu_{av}(y, t)dy \right], \quad (B.11)$$

a medida que $c \rightarrow \infty$ em (22) e $G \rightarrow 1$ em (36), com $K = -k$. Usando (B.7) para $x = D_0 + \Delta_D$, nos dá

$$w(D_0 + \Delta_D, t) = -k \int_0^{\Delta_D} Gu_{av}(y, t)dy. \quad (B.12)$$

Então, aplicando (B.9) na integral em (B.12) e realizando determinados cálculos, obtém-se

$$\begin{aligned} w(D_0 + \Delta_D, t) &= K \left[(I - e^{GK\Delta_D})z_{av}(t) \right. \\ &\left. - \int_0^{\Delta_D} e^{GK(\Delta_D - y)}Gw(y, t)dy \right]. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Assim sendo, mostra-se que

$$w(D_0 + \Delta_D, t)^2 \leq 2q_1 |z_{av}(t)|^2 + 2q_2 \int_{\min\{0, \Delta_D\}}^{\max\{0, \Delta_D\}} w(x, t)^2 dx, \quad (B.14)$$

onde as funções $q_1(\Delta_D)$ e $q_2(\Delta_D)$ são

$$q_1(\Delta_D) = \left| K(I - e^{GK\Delta_D}) \right|^2, \quad (B.15)$$

$$q_2(\Delta_D) = \int_{\min\{0, \Delta_D\}}^{\max\{0, \Delta_D\}} \left(Ke^{GK(\Delta_D - y)}G \right)^2 dy. \quad (B.16)$$

Note que

$$q_1(0) = q_2(0) = 0 \quad (B.17)$$

e que q_1 e q_2 são ambas funções contínuas de Δ_D .

Os casos $\Delta_D > 0$ e $\Delta_D < 0$ devem ser considerados separadamente. O caso $\Delta_D > 0$ é mais fácil e o estado do sistema médio é $z_{av}(t), u_{av}(x, t), x \in [0, D_0 + \Delta_D]$, i.e., $z_{av}(t), U_{av}(\Theta), \Theta \in [t - D_0 - \Delta_D, t]$. O caso $\Delta_D < 0$ é mais complicado já que o estado do sistema médio é $z_{av}(t), u_{av}(x, t), x \in [\Delta_D, D_0 + \Delta_D]$, i.e., $z_{av}(t), U_{av}(\Theta), \Theta \in [t - D_0, t]$.

Caso $\Delta_D > 0$: Considere a função de Lyapunov

$$V(t) = \lambda_P z_{av}^2(t) + \frac{a}{2} \int_0^{D_0 + \Delta_D} (1+x)w(x, t)^2 dx. \quad (B.18)$$

com $\lambda_P > 0$ e $a > 0$.

Calculando a derivada no tempo de (B.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda_Q z_{av}^2(t) + 2\lambda_P Gz_{av}(t)w(0, t) \\ &+ \frac{a}{2}(1+D)w(D_0 + \Delta_D, t)^2 \\ &- \frac{a}{2}w(0, t)^2 - \frac{a}{2} \int_0^{D_0 + \Delta_D} w(x, t)^2 dx \\ &\leq - \left(\frac{\lambda_Q}{2} - a(1+D)q_1(\Delta_D) \right) z_{av}^2(t) \\ &- \left(\frac{a}{2} - \frac{2(\lambda_P G)^2}{\lambda_Q} \right) w(0, t)^2 \\ &- a \left(\frac{1}{2} - (1+D)q_2(\Delta_D) \right) \int_0^{D_0 + \Delta_D} w(x, t)^2 dx, \end{aligned} \quad (B.19)$$

onde foi denotado $D = D_0 + \Delta_D$, tal como em (5).

Isto prova a estabilidade exponencial da origem do sistema com estado $(z_{av}(t), w(x, t), x \in [0, D_0 + \Delta_D])$, para Δ_D suficientemente pequeno, ao escolher

$$a > \frac{4(\lambda_P G)^2}{\lambda_Q}, \quad (\text{B.20})$$

e então escolhendo o $\delta > 0$ suficientemente pequeno como o maior valor de $|\Delta_D|$ para que

$$\frac{\lambda_Q}{2} > a(1+D)q_1(\Delta_D) \quad (\text{B.21})$$

e

$$\frac{1}{2} > (1+D)q_2(\Delta_D). \quad (\text{B.22})$$

A estabilidade exponencial na norma $N_2(t)$ é obtida usando uma função linear $N_2^2(t)$ para limites superiores e inferiores $V(t)$, onde, para $\Delta_D > 0$,

$$N_2(t) = \left(z_{av}^2(t) + \int_{t-D_0-\Delta_D}^t U_{av}(\Theta)^2 d\Theta \right)^{1/2}. \quad (\text{B.23})$$

Caso $\Delta_D < 0$: Neste caso, será utilizado uma função de Lyapunov diferente

$$V(t) = \lambda_P z_{av}^2(t) + \frac{a}{2} \int_0^{D_0+\Delta_D} (1+x)w(x,t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Delta_D}^0 (D_0+x)w(x,t)^2 dx, \quad (\text{B.24})$$

e obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\frac{\lambda_Q}{2} - a(1+D)q_1(\Delta_D) \right) z_{av}^2(t) \\ & - \left(\frac{a}{2} - \frac{D_0}{2} - \frac{2(\lambda_P G)^2}{\lambda_Q} \right) w(0,t)^2 \\ & - \left(\frac{1}{2} - a(1+D)q_2(\Delta_D) \right) \int_{\Delta_D}^0 w(x,t)^2 dx \\ & - \frac{D}{2} w(\Delta_D,t)^2 - \frac{\max\{a,1\}}{4} \int_{\Delta_D}^{D_0+\Delta_D} w(x,t)^2 dx. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Esta quantidade é definida como negativa ao escolhermos

$$a > D_0 + \frac{4(\lambda_P G)^2}{\lambda_Q} \quad (\text{B.26})$$

e $\delta > 0$ suficientemente pequeno como o maior valor de $|\Delta_D|$ tal que

$$\frac{\lambda_Q}{2} > a(1+D)q_1(\Delta_D) \quad (\text{B.27})$$

e

$$\frac{1}{2} > a(1+D)q_2(\Delta_D). \quad (\text{B.28})$$

Consequentemente, a partir desta equação podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\frac{\lambda_Q}{2} - a(1+D)q_1(\Delta_D) \right) z_{av}^2(t) \\ & - \left(\frac{1}{2} - a(1+D)q_2(\Delta_D) \right) \int_{\Delta_D}^0 w(x,t)^2 dx \\ & - \frac{\max\{a,1\}}{4} \int_{\Delta_D}^{D_0+\Delta_D} w(x,t)^2 dx \\ \leq & - \left(\frac{\lambda_Q}{2} - a(1+D)q_1(\Delta_D) \right) z_{av}^2(t) \\ & - \left(\frac{1}{2} - a(1+D)q_2(\Delta_D) \right) \frac{2}{D_0} \frac{1}{2} \int_{\Delta_D}^0 (D_0+x)w(x,t)^2 dx \\ & - \frac{\max\{a,1\}}{4} \frac{2}{a(1+D)} \frac{a}{2} \int_0^{D_0+\Delta_D} (1+x)w(x,t)^2 dx, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

o que gera

$$\dot{V} \leq -\mu V, \quad \mu > 0, \quad (\text{B.30})$$

com

$$\mu = \min \left\{ \left(\frac{\lambda_Q}{2} - a(1+D)q_1(\Delta_D) \right) \frac{1}{\lambda_P}, \left(\frac{1}{2} - a(1+D)q_2(\Delta_D) \right) \frac{2}{D_0}, \frac{\max\{a,1\}}{2a(1+D)} \right\}. \quad (\text{B.31})$$

Logo, tem-se um estimativa de estabilidade exponencial em termos de $|z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^{D_0+\Delta_D} w(x,t)^2 dx$. Com mais alguns cálculos, também é possível obter uma estimativa em termos de $|z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^{D_0+\Delta_D} u_{av}(x,t)^2 dx$, i.e., em termos de $|z_{av}(t)|^2 + \int_{t-D_0}^t U_{av}(\Theta)^2 d\Theta$. Começando de

$$\psi_1 \left(|z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx \right) \leq V(t) \leq \psi_2 \left(|z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx \right), \quad (\text{B.32})$$

onde

$$\psi_1 = \min \left\{ \lambda_P, \frac{a}{2}, \frac{D}{2} \right\}, \quad (\text{B.33})$$

$$\psi_2 = \max \left\{ \lambda_P, \frac{a(1+D)}{2}, \frac{D_0}{2} \right\}. \quad (\text{B.34})$$

Considere agora

$$w(x,t) = u_{av}(x,t) - m(x) \star u_{av}(x,t) - Kz_{av}(t), \quad (\text{B.35})$$

$$u_{av}(x,t) = w(x,t) + n(x) \star w(x,t) + KN(x)z_{av}(t), \quad (\text{B.36})$$

onde \star denota a operação de convolução em x e

$$m = KG, \quad n(s) = KN(s)G, \quad N(x) = e^{(GK)x}. \quad (\text{B.37})$$

É simples mostrar, usando (B.35) e (B.36), que

$$\int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx \leq \alpha_1 \int_{\Delta_D}^D u_{av}(x,t)^2 dx + \alpha_2 |z_{av}(t)|^2, \quad (\text{B.38})$$

$$\int_{\Delta_D}^D u_{av}(x,t)^2 dx \leq \beta_1 \int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx + \beta_2 |z_{av}(t)|^2, \quad (\text{B.39})$$

onde

$$\alpha_1 = 3(1+D_0m^2), \quad \alpha_2 = 3K^2, \quad (\text{B.40})$$

$$\beta_1 = 3(1+D_0\|n\|^2), \quad \beta_2 = 3\|KN\|^2 \quad (\text{B.41})$$

e $\|\cdot\|$ denota a norma $L_2[\Delta_D, D]$. Então, obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_1 \left(|z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^D u_{av}(x,t)^2 dx \right) \leq & |z_{av}(t)|^2 + \\ & + \int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

$$\begin{aligned} |z_{av}(t)|^2 + \int_{\Delta_D}^D w(x,t)^2 dx \leq & \phi_2 \left(|z_{av}(t)|^2 + \right. \\ & \left. + \int_{\Delta_D}^D u_{av}(x,t)^2 dx \right) \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

onde $\phi_1 = \frac{1}{\max\{\beta_1, \beta_2+1\}}$ e $\phi_2 = \max\{\alpha_1, \alpha_2+1\}$.

Combinando as desigualdades a cima, tem-se que

$$\phi_1 \psi_1 N_2^2(t) \leq V(t) \leq \phi_2 \psi_2 N_2^2(t), \quad (\text{B.44})$$

onde, para $\Delta_D < 0$,

$$N_2(t) = \left(|z_{av}(t)|^2 + \int_{t-D_0}^t U_{av}(\Theta)^2 d\Theta \right)^{1/2}. \quad (\text{B.45})$$

Logo, com (B.30), tem-se

$$N_2^2(t) \leq \frac{\phi_2 \psi_2}{\phi_1 \psi_1} N_2^2(0) e^{-\mu t}, \quad (\text{B.46})$$

que completa a prova da estabilidade exponencial.