

Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída combinando otimização evolutiva e formulações LMI ^{*}

Lucas Santos Gonçalves ^{*} Eduardo Nunes Gonçalves ^{**}

^{*} Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica
UFSJ/CEFET-MG Avenida Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG,
Brasil (e-mail: lucas1006@gmail.com).

^{**} Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET-MG Avenida
Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil (e-mail:
eduardong@cefetmg.br)

Abstract: Linear matrix inequality formulations are an important tool to tackle both analysis as well synthesis of control systems, specially for uncertain systems represented by polytopic models. Linear matrix inequalities are applied with success to robust state-feedback control synthesis. On the other hand, robust static or dynamic output-feedback control synthesis are more complicated to formulate as a convex optimization problem. Two different strategies for obtaining LMI formulations for static output feedback control synthesis require the calculation of an state-feedback gain or the choice of a matrix that affects the performance of the resulting controller or even the existence of a feasible solution. In this work we propose to select and apply an optimization algorithm to calculate the gain or matrix to obtain the optimal robust \mathcal{H}_∞ control system. We present two case studies to demonstrate the advantage of combining optimization with LMI formulations.

Resumo: Desigualdades matriciais lineares são uma ferramenta importante para lidar tanto com análise como síntese de sistemas de controle, especialmente para problemas incertos representados por modelos politópicos. Desigualdades matriciais lineares são aplicadas com sucesso para síntese de controladores por realimentação de estado. Por outro lado, controle robusto por realimentação estática ou dinâmica de saída são mais complicados de serem formulados como problemas de otimização convexos. Duas diferentes estratégias para obter formulações LMI para síntese de controladores por realimentação estática de saída requerem o cálculo de um ganho por realimentação de estados ou a escolha de uma matriz que afeta o desempenho do controlador resultante ou até mesmo a existência de uma solução factível. Nós propomos neste trabalho selecionar e aplicar um algoritmo de otimização para calcular o ganho ou a matriz para obter o sistema de controle \mathcal{H}_∞ robusto ótimo. Nós apresentamos dois estudos de casos para demonstrar a vantagem de combinar otimização com as formulações LMI.

Keywords: Optimization in Control and Automation systems; robust control, \mathcal{H}_∞ control, static output-feedback control.

Palavras-chaves: Otimização em sistemas de controle e automação; controle robusto, controle \mathcal{H}_∞ , controle por realimentação estática de saída.

1. INTRODUÇÃO

Desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) são uma poderosa ferramenta na área de controle robusto (Boyd et al., 1994). Com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, é possível obter formulações baseadas em LMI para análise robusta tanto de estabilidade quanto de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Considere o modelo no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_u(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t), \\ z(t) &= C_z(\alpha)x(t) + D_{zu}(\alpha)u(t) + D_{zw}(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C_y(\alpha)x(t) + D_{yw}(\alpha)w(t), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas (sinais de referência, perturbações e ruídos de medição), $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o sinal de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de variáveis controladas associadas com o desempenho \mathcal{H}_∞ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas utilizadas no cálculo da ação de controle $u(t)$. Considere que as matrizes do sistema pertencem a um politopo, sendo a combinação convexa dos seus vértices:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ C_y(\alpha) & D_{yw}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^v \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_{w,i} & B_{u,i} \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & D_{zu,i} \\ C_{y,i} & D_{yw,i} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

sendo v o número de vértices e $\alpha \in \Omega$:

^{*} Os autores agradecem o apoio das agências de fomento FAPEMIG, CNPq e CAPES

$$\Omega = \left\{ \alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_v]^T \mid \alpha_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \right\}. \quad (3)$$

Considere a seguinte descrição para o sistema em malha fechada, $T_{zw}(s, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f(\alpha)x(t) + B_f(\alpha)w(t), \\ z(t) &= C_f(\alpha)x(t) + D_f(\alpha)w(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, o sistema incerto representado pela Eq. (4) é quadraticamente estável se existe uma matriz simétrica definida positiva $X = X^T \succ 0$ que atende a LMI:

$$A_{f,i}X + XA_{f,i}^T \prec 0, \quad i = 1, \dots, v. \quad (5)$$

Considere o controle por realimentação estados, $u(t) = Kx(t)$, e a matriz em malha fechada dada pela combinação convexa dos vértices $A_{f,i} = A_i + B_{u,i}K$, de modo que a LMI (5) se torna:

$$\begin{aligned} (A_i + B_{u,i}K)X + X(A_i + B_{u,i}K)^T = \\ A_iX + B_{u,i}KX + XA_i^T + XK^T B_{u,i}^T \prec 0, \quad i = 1, \dots, v. \end{aligned} \quad (6)$$

Como existe a presença do produto de variáveis KX , a desigualdade (6) é não-linear e de difícil solução. A simples mudança de variável $Y = KX$ permite transformar a LMI de análise em uma LMI de síntese (Geromel et al., 1991). Se existe uma matriz simétrica definida positiva $X = X^T \succ 0$ e uma matriz Y que atende a LMI:

$$A_iX + B_{u,i}Y + XA_i^T + Y^T B_{u,i}^T \prec 0, \quad i = 1, \dots, v, \quad (7)$$

então o controlador $K = YX^{-1}$, na ação de controle $u(t) = Kx(t)$, estabiliza quadraticamente o sistema. Como $X \succ 0 \Rightarrow |X| \neq 0 \Rightarrow \exists X^{-1}$. Esta mesma estratégia pode ser aplicada para, a partir de formulações de análise, obter formulações de síntese para sistemas de controle robusto com desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ (Gahinet et al., 1995). O controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados, $u(t) = Kx(t)$, pode ser caracterizado como:

$$\begin{aligned} \min_{X,Y,\gamma} \gamma \\ \text{sujeito a: } X = X^T \succ 0 \\ \begin{bmatrix} \Psi_{11} & B_{w,i} & XC_{z,i}^T + Y^T D_{z_u,i}^T \\ B_{w,i}^T & -\gamma I & D_{z_w,i}^T \\ C_{z,i}X + D_{z_u,i}Y & D_{z_w,i} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (8) \\ \Psi_{11} = A_iX + XA_i^T + B_{u,i}Y + Y^T B_{u,i}^T, \\ i = 1, \dots, v \end{aligned}$$

sendo que $K = YX^{-1}$ garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_\infty \leq \gamma$.

Se o sistema é incerto mas invariante no tempo, é possível obter formulações denominadas estendidas, baseadas em funções de Lyapunov dependente de parâmetros, que permite reduzir o conservadorismo (Shaked, 2001; de Oliveira et al., 2004; Trofino et al., 2005; He et al., 2005; Oliveira et al., 2011). Por exemplo, considerando $X = F = G^T$ no Lema 2 em de Oliveira et al. (2004), e substituindo o sistema por seu dual, $[A, B, C, D] \Leftrightarrow [A^T, C^T, B^T, D^T]$, pode ser derivada a seguinte formulação de síntese de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados:

$$\begin{aligned} \min_{P_i, X, Y, \gamma} \gamma \\ \text{sujeito a: } P_i = P_i^T, \succ 0 \\ \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & \Psi_{31}^T & B_{w,i} \\ \Psi_{21} & -(X + X^T) & \Psi_{31}^T & \mathbf{0} \\ \Psi_{31} & \Psi_{31} & -\gamma I & D_{z_w,i} \\ B_{w,i}^T & \mathbf{0} & D_{z_w,i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (9) \\ \Psi_{11} = A_iX + X^T A_i^T + B_{u,i}Y + Y^T B_{u,i}^T, \\ \Psi_{21} = P_i - X + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T, \\ \Psi_{31} = C_{z,i}X + D_{z_u,i}Y, \\ i = 1, \dots, v \end{aligned}$$

cujo controlador $K = YX^{-1}$, na ação de controle $u(t) = Kx(t)$, garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_\infty \leq \gamma$. Como $X + X^T \succ 0$, então X possui posto completo e existe X^{-1} . As matrizes P_i aumentam os graus de liberdade do problema e a não exigência de que X seja uma matriz simétrica permite obter soluções menos conservadoras que a formulação original (8).

No caso de realimentação estática de saída, $u(t) = Ky(t) = KC_{y,i}x(t)$, aparece o produto $KC_{y,i}X$, não sendo possível recuperar o controlador por uma simples mudança de variável. É mais difícil de obter a solução de formulações com desigualdades matriciais bilineares (BMI, do inglês, *bilinear matrix inequality*). Uma forma de resolver o problema BMI não-convexo é através do método LMI iterativa (ILMI, do inglês, *interactive linear matrix inequality*), baseado em um algoritmo cujos passos envolvem a solução de problemas LMI, alternando a otimização de uma variável fixando a outra (He and Wang, 2006). Tal algoritmo pode apresentar convergência lenta e requer uma solução inicial factível que pode afetar a qualidade da solução final. Em Dinh et al. (2012), o problema BMI é decomposto em dois problemas LMI sendo que a cada iteração o problema côncavo é linearizado e transformado em um problema convexo. Em Agulhari et al. (2012), é proposto a seguinte formulação LMI de síntese:

$$\begin{aligned} \min_{P(\alpha), V(\alpha), H(\alpha), R, L, \mu} \mu \\ \text{sujeito a: } P(\alpha) = P(\alpha)^T \succ 0, \\ \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} + \Upsilon_{11}^T & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ \Upsilon_{12}^T & \Upsilon_{22} & \Upsilon_{23} & \mathbf{0} & \Upsilon_{25} \\ \Upsilon_{13}^T & \Upsilon_{23}^T & -\mu \mathbf{I} & \Upsilon_{34} & \Upsilon_{35} \\ \Upsilon_{14}^T & \mathbf{0} & \Upsilon_{34}^T & \Upsilon_{44} & \Upsilon_{45} \\ \Upsilon_{15}^T & \Upsilon_{25}^T & \Upsilon_{35}^T & \Upsilon_{45}^T & -(R + R^T) \end{bmatrix} \prec 0, \\ \Upsilon_{11} = F(A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sf}(\alpha)), \\ \Upsilon_{12} = P(\alpha) - F(\alpha) + \\ (A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sf}(\alpha))^T V(\alpha)^T, \\ \Upsilon_{13} = F(\alpha)B_w(\alpha), \\ \Upsilon_{14} = (C_z(\alpha) + D_{z_u}(\alpha)K_{sf}(\alpha))^T H(\alpha), \\ \Upsilon_{15} = F(\alpha)B_u(\alpha) + C_y(\alpha)^T L^T - K_{sf}(\alpha)^T R^T \\ \Upsilon_{22} = -(V(\alpha) + V(\alpha)^T), \quad \Upsilon_{23} = V(\alpha)B_w(\alpha), \\ \Upsilon_{25} = V(\alpha)B_u(\alpha), \quad \Upsilon_{34} = D_{z_w}(\alpha)^T H(\alpha), \\ \Upsilon_{35} = D_{y_w}(\alpha)^T L^T, \quad \Upsilon_{45} = H(\alpha)^T D_{z_u}(\alpha), \\ \Upsilon_{44} = \mathbf{I} - (H(\alpha) + H(\alpha)^T), \end{aligned} \quad (10)$$

sendo $K_{sf}(\alpha)$ um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros, obtido previamente, que garante o sistema em malha-fechada robustamente estável. De acordo com o Teorema 2 em Agulhari et al. (2012), o controlador por realimentação estática de saída, $K = R^{-1}L$, garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_{\infty} \leq \gamma$, $\gamma = \sqrt{\mu}$. O desempenho do controlador resultante, ou até mesmo a factibilidade do problema (10), depende do controlador inicial $K_{sf}(\alpha)$. Para melhorar o resultado, é proposto um algoritmo que utiliza o controlador obtido para recalculer um novo controlador com melhor desempenho. O cálculo é repetido até que a diferença dos custos garantidos \mathcal{H}_{∞} entre duas iterações não seja significativa. Mesmo com este algoritmo, a solução final depende do controlador inicial utilizado. Com base no algoritmo proposto em Agulhari et al. (2012), é possível utilizar um controlador por realimentação estática de saída fixo, K_{so} , para obter o controlador inicial necessário para a formulação:

$$K_{sf,i} = K_{so}C_{y,i}, \quad i = 1, \dots, v. \quad (11)$$

Em Dong and Yang (2013) é apresentada uma formulação LMI para controle robusto \mathcal{H}_{∞} por realimentação estática de saída, para $D_{zw}(\alpha) = \mathbf{0}$ e $D_{yw}(\alpha) = \mathbf{0}$, que requer a busca de um valor escalar e que pode ser aplicada a problemas em que $C_{y,i}$ possuem posto linha completo ou não. Em Chang et al. (2015) é apresentada uma formulação LMI de síntese que requer a busca de dois parâmetros escalares. Uma outra possibilidade para linearizar o problema de síntese de realimentação estática de saída, quando $C_y(\alpha) = C_y$, ou seja, não possui incerteza, e $D_{yw}(\alpha) = \mathbf{0}$, é realizar as seguintes substituições em qualquer formulação LMI para síntese de realimentação de estados (Rubió-Massegú et al., 2013):

$$X = QX_qQ^T + RX_rR^T = [Q \ R] \begin{bmatrix} X_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, \quad Y = Y_rR^T, \quad (12)$$

sendo $X_q \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times (n-n_y)}$, $C_yQ = 0$, isto é, Q é a base ortonormal para o espaço nulo de C_y :

$$Q = \text{null}(C_y), \quad (13)$$

$X_r \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $C_yR = I$, sendo adotado por Rubió-Massegú et al. (2013):

$$R = C_y^{\dagger} + QL, \quad (14)$$

sendo $C_y^{\dagger} = C_y^T(C_yC_y^T)^{-1}$. O controlador por realimentação estática de saída é dado por:

$$K = Y_rX_r^{-1}. \quad (15)$$

A escolha de $L \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times n_y}$ na Eq. (14) afeta a factibilidade e otimalidade da formulação de síntese. Em Palacios-Quiñonero et al. (2014), é sugerida uma forma de determinação da matriz L a partir da solução X de um problema de realimentação de estados, não necessariamente a escolha ótima. Segundo Palacios-Quiñonero et al. (2014), para cada $X = X^T \succ 0$, existe uma única matriz L tal que $X = QX_rQ^T + RX_rR^T$, com $R = C_y^{\dagger} + QL$, para matrizes $X_q = X_q^T \succ 0$ e $X_r = X_r^T \succ 0$ apropriadas. Além disso, L pode ser escrita como (Palacios-Quiñonero et al., 2014):

$$L = Q^{\dagger}XC_y^T(C_yXC_y^T)^{-1}, \quad (16)$$

sendo X a solução do problema LMI com $C_y = I$, isto é, formulação para realimentação de estados. Pode-se trocar

o sinal na Eq. (16), sendo interessante avaliar as duas possibilidades (Gopmandal and Ghosh, 2021).

Para formulações estendidas, como a Eq. (9), é possível obter melhores resultados por meio de uma mudança de variáveis triangular, com o uso da variável X_{qr} adicional, ao invés de bloco diagonal (Gopmandal and Ghosh, 2021):

$$X = [Q \ R] \begin{bmatrix} X_q & X_{qr} \\ \mathbf{0} & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, \quad Y = Y_rR^T. \quad (17)$$

Vários problemas de controle podem ser formulados como um problema de controle por realimentação estática de saída, como sintonia de controle PID (He and Wang, 2006; Gopmandal and Ghosh, 2021), ou síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída com ordem reduzida (Syrmos et al., 1997; Agulhari et al., 2012). Desse modo é relevante desenvolver novos métodos de síntese ou aperfeiçoar os métodos já existentes. A contribuição deste trabalho é realizar um estudo a respeito da aplicação de técnicas de otimização para a determinação do ganho K_{so} na Eq. (11) ou a matriz L na Eq. (14), para verificar o quanto é possível melhorar o desempenho do sistema de controle em comparação com as opções de calcular $K_{sf,i}$ por formulações LMI ou adotar $L = \mathbf{0}$ ou L dado pela Eq. (16). Tratam-se de problemas não-convexos multimodais, isto é, mínimos locais em diferentes regiões do espaço de busca. Desse modo, algoritmos evolutivos são os mais adequados para obter soluções melhores. Neste trabalho optamos pelo uso do método evolução diferencial (Storn and Price, 1997), que na experiência dos autores, é um método simples de implementar, com poucos parâmetros de sintonia e que geralmente apresenta resultados melhores.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo é determinar o ganho K no controle por realimentação estática de saída, $u(t) = Ky(t)$, para sistemas incertos lineares invariantes no tempo representados pelo modelo politópico, Eq. (2), que minimiza o pior caso de norma \mathcal{H}_{∞} no domínio de incerteza:

$$K^* = \arg \min_K \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha, K)\|_{\infty} \quad (18)$$

sujeito a $K \in \mathcal{F}$,

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores K na ação de controle $u(t) = Ky(t)$ que estabilizam robustamente o sistema em malha-fechada.

Através de formulações LMI, o problema (18) é representado por um problema de programação semi-definida (SDP, do inglês, *semi-definite program*) com função objetivo linear e restrições LMI. Se o problema for factível, o controlador resultante garante a estabilidade robusta e que $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_{\infty} \leq \gamma$, sendo γ um limitante conhecido como custo garantido \mathcal{H}_{∞} . Formulações LMI tornam o problema mais fácil de ser solucionado ao custo de conservadorismo da solução.

O objetivo deste trabalho é propor uma forma de determinar o ganho K_{so} na Eq. (11) ou a matriz L na Eq. (14) que resulte em um sistema de controle por realimentação estática de saída com menor custo garantido \mathcal{H}_{∞} . Para verificar se a solução de um SDP é factível, isto é, se todas as desigualdades lineares matriciais foram atendidas, os *solvers* retornam o resíduo das restrições, σ , relacionado ao

mínimo autovalor do conjunto de desigualdades matriciais. Se $\sigma > 0$ a solução obtida é factível. É possível que um *solver* retorne valor de σ negativo, mas próximo de zero, que pode ser uma solução factível. Seja S o conjunto de vértices do modelo politópico do sistema incerto e $LMI(S, \Lambda)$, a função que retorna a solução do problema LMI, na forma do ganho, K , custo garantido, γ , e o resíduo das restrições, σ . O parâmetro Λ a ser otimizado depende da formulação LMI, neste trabalho $\Lambda = K_{so}$ ou $\Lambda = L$. Considerando a aplicação de algoritmos de otimização evolutivos para determinação do ganho ótimo K_{so}^* ou da matriz L^* ótima, este trabalho propõe o seguinte problema de otimização:

$$\Lambda^* = \arg \min_{\Lambda} f(\Lambda), \quad (19)$$

sendo a função objetivo $f(\Lambda)$ determinada a partir de $[K, \gamma, \sigma] = LMI(S, \Lambda)$ aplicando uma forma de tratar restrições baseada em penalidade. Uma vez determinado Λ^* , então o controlador e custo garantido ótimos são dados por:

$$[K^*, \gamma^*, \sigma] = LMI(S, \Lambda^*), \quad (20)$$

No caso em que $\Lambda = L$, a função objetivo será da forma:

$$f(L) = \begin{cases} M - \sigma & \text{se } \sigma < -\epsilon, \\ \gamma & \text{se } \sigma \geq -\epsilon, \end{cases} \quad (21)$$

com $0 \leq \epsilon \ll 1$ e $M \gg 1$. Neste trabalho adotamos $\epsilon = 10^{-12}$ e $M = 10^{12}$. Se a solução é não factível, o valor da função objetivo será muito maior do que a de uma solução factível. No processo de seleção de algoritmos evolutivos, quando comparadas duas soluções não factíveis, a solução mais próxima da região factível, de acordo com o valor de σ , será selecionada. No caso do cálculo da matriz L , pode ser considerada qualquer formulação LMI para o cálculo de realimentação de estados adaptada para realimentação estática de saída por meio da Eq. (12) ou da Eq. (17).

No caso de $\Lambda = K_{so}$, é considerada a formulação (10) com $\gamma = \sqrt{\mu}$ e $K_{sf,i}$, $i = 1, \dots, v$, dado pela Eq. (11) considerando o K_{so} dado pelas variáveis de otimização Λ . A formulação (10) pode gerar uma solução factível para um controlador que resulte em sistema em malha-fechada não robustamente estável se a formulação for baseada em um controlador dependente de parâmetros, $K_{sf,i}$, que não garante o sistema em malha-fechada robustamente estável. Desse modo, é necessário verificar se $K_{sf,i}$, calculado a partir de um K_{so} usando a Eq. (11), resulta em um sistema robustamente estável antes de utilizá-lo na formulação (10). Em nossa implementação consideramos a formulação de análise de estabilidade derivada do Lema 2 em de Oliveira et al. (2004). Seja σ_e a variável para verificar a factibilidade do teste de estabilidade, então:

$$f(K_{so}) = \begin{cases} M_e - \sigma_e & \text{se } \sigma_e < -\epsilon, \\ M - \sigma & \text{se } \sigma_e \geq -\epsilon \text{ e } \sigma < -\epsilon, \\ \gamma & \text{se } \sigma_e \geq -\epsilon \text{ e } \sigma \geq -\epsilon, \end{cases} \quad (22)$$

sendo adotado $M_e = 10^{16}$ de modo que uma solução previamente não robustamente estável, que sequer foi utilizada na formulação (10), tem menor chance de ser selecionada para uma nova geração. O interessante da formulação LMI proposta por Agulhari et al. (2012) para implementação do problema (19) é que, além de verificar a estabilidade robusta e calcular o custo garantido \mathcal{H}_∞ , ela também gera uma solução aprimorada em relação à solução gerada pelo algoritmo evolutivo. A desvantagem é

o maior custo computacional em relação à otimização da matriz L nos estudos de casos apresentados a seguir.

3. ESTUDO DE CASOS

Para resolver o problema de otimização (19) foi utilizado o método evolução diferencial original, com multiplicador da mutação diferencial com distribuição aleatória uniforme no intervalo $F \in [0,5, 1)$, para cada operação, probabilidade de cruzamento $C_r = 0,9$, tamanho da população $N = \max(8, 2\eta)$, sendo $\max(a, b)$ o maior valor entre a e b , e número de gerações $N_g = 10N$, sendo η o número de variáveis de otimização que é igual ao número de elementos da matriz L , $\eta = (n - n_y)n_y$, ou do ganho K_{so} , $\eta = n_u n_y$. No caso da otimização de L as variáveis de otimização foram distribuídas uniformemente no intervalo de $[-1, 1]$. No caso da otimização de K_{so} , o intervalo inicial depende da dimensão esperada dos ganhos do controlador. As variáveis de otimização não são limitadas ao intervalo inicial. As formulações LMI foram implementadas usando o YALMIP (Lofberg, 2004) e solucionadas pelo *solver* SDPT3 (Toh et al., 1999). A variável σ para teste de factibilidade é obtida pela função `check` do YALMIP: `sigma=min(check(LMIs))`, sendo LMIs o conjunto de restrições LMI. Os projetos são comparados com base nos valores dos custos garantidos \mathcal{H}_∞ , γ_{cg} , tal que $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_\infty \leq \gamma_{cg}$, calculados pela técnica de cálculo com precisão ϵ apresentada em Gonçalves et al. (2007), sendo adotada precisão de 0,01%. Nos estudos de caso a seguir, adotaremos a formulação (9), substituindo X e Y por matrizes dependente de parâmetros, X_i e Y_i , para calcular $K_{sf,i} = Y_i X_i^{-1}$, $i = 1, \dots, v$, para inicialização do algoritmo apresentado em Agulhari et al. (2012) que utiliza a formulação (10). Também utilizaremos a formulação (9) para determinar X no cálculo de L dado pela Eq. (16) e para o cálculo do ganho por realimentação estática de saída, com a substituição de variáveis dada pela Eq. (17), que também é utilizada para implementação da função $[K, \gamma, \sigma] = LMI(S, L)$. Nos resultados, os subscritos dos controladores K são para diferenciar de qual formulação eles foram obtidos.

3.1 Exemplo 17 (Dong and Yang, 2013)

Considere o sistema incerto apresentado em Dong and Yang (2013) com mudança na escolha do vetor z para limitar o esforço de controle:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,9896 & 17,41 & 96,15 \\ 0,2648 & -0,8512 & -11,39 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, B_{u,1} = \begin{bmatrix} -97,78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1,702 & 50,72 & 263,5 \\ 0,2201 & -1,418 & -31,99 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, B_{u,2} = \begin{bmatrix} -85,09 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

$$B_{w,1} = B_{w,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{z,1} = C_{z,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{zu,1} = D_{zu,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, C_{y,1} = C_{y,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A formulação LMI proposta em Dong and Yang (2013), com a variável escalar igual a $\tau = 0,004$, resulta em $K_d = [1,5697 \ 14,2298]$ e $\gamma_{cg} = 2,3729$. A formulação LMI

proposta em Chang et al. (2015), com as variáveis escalares iguais a $\beta = \rho = 0,006$, resulta em $K_c = [0,5009 \ 4,5965]$ e $\gamma_{cg} = 2,4710$. Utilizando o método proposto em Agulhari et al. (2012) é obtido $K_a = [0,1766 \ 1,8829]$ e $\gamma_{cg} = 2,9375$ após 269 iterações. Otimizando K_{so} para solução do problema (10), com as variáveis de otimização distribuídas inicialmente no intervalo $[-1000, 1000]$, é obtido $K_a^* = [1,0161 \ 8,9986] \times 10^3$ e $\gamma_{cg} = 2,3015$, uma redução de 21,7%. Para $L = [-0,0671 \ -1,0400]$, dada pela Eq. (16) com sinal negativo, foi obtido $\gamma_{cg} = 4,5553$. Otimizando L para solução do problema (9), com a substituição dada pela Eq. (17), resultou $L^* = [0,0539 \ -0,0949]$, $K_r^* = [0,0578 \ 0,8220]$ e $\gamma_{cg} = 4,4852$, uma redução de 1,5%. A combinação da formulação LMI de síntese proposta em Agulhari et al. (2012) com a otimização proposta nesse trabalho apresentou o melhor resultado.

3.2 Aeronave com decolagem e aterrissagem vertical

Considere o modelo da dinâmica no plano vertical de uma aeronave com decolagem e aterrissagem vertical (VTOL, do inglês, *Vertical Take-Off and Landing*) cujas matrizes são (Narendra and Tripathi, 1973; Leibfritz and Lipinski, 2003):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,010 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,707 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_w &= \begin{bmatrix} 0,04678 & 0 \\ 0,04572 & 0,00988 \\ 0,04369 & 0,00111 \\ -0,02179 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ b_{21} & -7,5922 \\ -5,52 & 4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_z &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \\
 C_y &= [0 \ 1 \ 0 \ 0],
 \end{aligned} \tag{23}$$

sendo considerados como parâmetros incertos (Narendra and Tripathi, 1973): $a_{32} \in [0,06635; 0,5047]$; $a_{34} \in [0,1198; 2,526]$ e $b_{21} \in [0,9775; 5,112]$. Este exemplo é interessante porque os ganhos $K_{sf,i}$ ou as matrizes $L = \mathbf{0}$ ou L dada pela Eq. (16) não resultam em soluções factíveis. Também não foram obtidos valores escalares que tornassem a formulação proposta em Chang et al. (2015) factível para esse problema. Desse modo, é necessário utilizar a otimização evolutiva para obter soluções factíveis. Otimizando K_{so} para solução do problema (10), com as variáveis de otimização distribuídas inicialmente no intervalo $[-1000, 1000]$, é obtido:

$$K_a^* = \begin{bmatrix} -1,6566 \\ 4,9701 \end{bmatrix} \times 10^3 \Rightarrow \gamma_{cg} = 0,9267.$$

Otimizando L para solução do problema (9), com a substituição dada pela Eq. (17), é obtido:

$$\begin{aligned}
 L^* &= \begin{bmatrix} 0,3747 \\ -1,6267 \\ -0,9801 \end{bmatrix} \Rightarrow K_r^* = \begin{bmatrix} -246,9848 \\ 678,1485 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \gamma_{cg} = 0,9413.
 \end{aligned}$$

Considere os distúrbios, $w(t) = [d_1(t) \ d_2(t)]^T$, como sendo pulsos, $d_1(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$ e $d_2(t) = \mathbf{1}(t-50) - \mathbf{1}(t-$

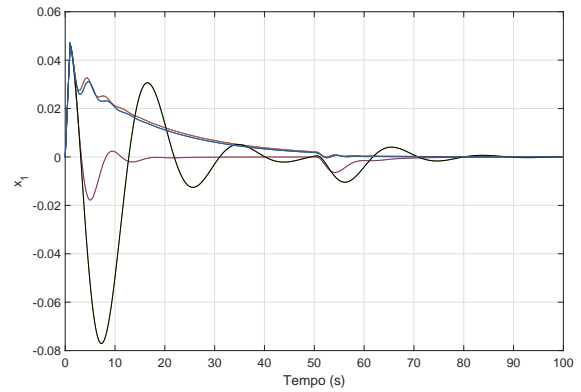


Figura 1. Transitórios velocidade horizontal para o VTOL, controlador K_a^* , para os 8 vértices.

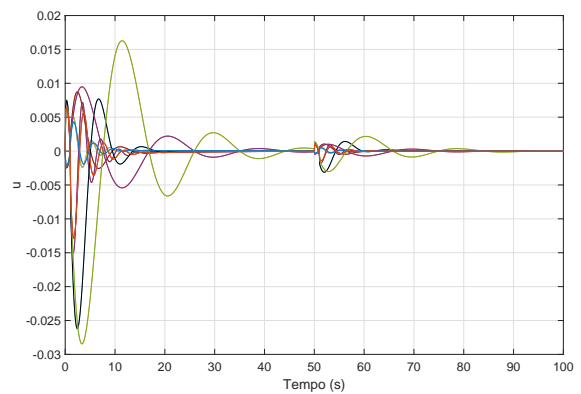


Figura 2. Transitórios dos sinais de controle para o VTOL, controlador K_a^* , para os 8 vértices.

51). Os transitórios da velocidade horizontal $x_1(t)$, e dos sinais de controle, $u(t)$, para os oito vértices do sistema incerto, para o controlador K_a^* , são apresentados nas Figs. 1 e 2, respectivamente. Apesar dos custos garantidos \mathcal{H}_∞ similares, para os sinais de distúrbios simulados, os maiores ganhos do controlador K_a^* resultaram em uma rejeição aos distúrbios mais significativa, escala 10^{-6} , em relação ao K_r^* que resulta escala 10^{-5} , nos transitórios da velocidade vertical, com sinais de controle da mesma ordem de grandeza.

4. CONCLUSÃO

Foi verificado nos estudos de caso realizados que a proposta de otimização da matriz L , no método de transformar formulações LMI de síntese de controle por realimentação de estados para formulações de síntese de controle por realimentação estática de saída, resulta em uma melhoria no desempenho do sistema de controle, ou até mesmo localiza uma matriz L que resulta em uma solução factível, sendo desse modo fundamental. O método proposto para a otimização da matriz L , com a formulação proposta da função objetivo baseada no método de penalidade para solução com algoritmos de otimização evolutivos, se mostrou eficaz. As mesmas conclusões também são válidas com relação à técnica de calcular o controlador por realimentação estática de saída a partir de um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros.

Neste caso o algoritmo de otimização evolutivo determina o controlador por realimentação de estados que irá resultar no melhor controlador por realimentação estática de saída. Mesmo quando o resultado obtido pelas formulações LMI, calculados em segundos, já for satisfatório, ainda assim é interessante aplicar a otimização, que requer minutos ou horas, para obter uma solução que será utilizada por anos, podendo significar maior segurança, melhor qualidade de um produto, com menor consumo de energia. Ambas as formas de síntese de controladores por realimentação estática de saída geram resultados satisfatórios. Vale ressaltar que mesmo com custos garantidos \mathcal{H}_∞ similares, os controladores, obtidos com as diferentes formulações LMI, podem ter ordem de grandeza dos ganhos bastante diferentes. Tal diferença pode afetar as respostas transitórias resultantes. Desse modo é sempre interessante utilizar as diferentes possibilidades de síntese para avaliação por simulações ou por meio de experimentos.

REFERÊNCIAS

- Agulhari, C.M., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2012). LMI relaxations for reduced-order robust control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6), 1532–1537. doi:10.1109/TAC.2011.2174693.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA. doi:10.1137/1.9781611970777.
- Chang, X.H., Park, J.H., and Zhou, J. (2015). Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, 85, 23–32. doi:10.1016/j.sysconle.2015.08.007.
- de Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F., and Peres, P.L.D. (2004). \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40, 1053–1061. doi:10.1016/j.automatica.2004.01.025.
- Dinh, Q.T., Gumussoy, S., Michiels, W., and Diehl, M. (2012). Combining convex-concave decompositions and linearization approaches for solving BMIs, with application to static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6), 1377–1390. doi:10.1109/TAC.2011.2176154.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2013). Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, 49(6), 1821–1829. doi:10.1016/j.automatica.2013.02.047.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J., and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB®*. The MATH WORKS Inc., Natick.
- Geromel, J.C., Peres, P.L.D., and Bernussou, J. (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29, 381–402. doi:10.1137/0329021.
- Gonçalves, E.N., Palhares, R.M., Takahashi, R.H.C., and Mesquita, R.C. (2007). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ ε -guaranteed cost computation of uncertain linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 1(1), 201–209. doi:10.1049/iet-cta:20050334.
- Gopmandal, F. and Ghosh, A. (2021). A hybrid search based synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable pid control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(12), 6069–6090. doi:10.1002/rnc.5581.
- He, Y., Wu, M., and She, J.H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and \mathcal{H}_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 52(7), 380–383. doi:10.1109/TCSII.2005.850418.
- He, Y. and Wang, Q.G. (2006). An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10), 1678–1683. doi:10.1109/TAC.2006.883029.
- Leibfritz, F. and Lipinski, W. (2003). Description of the benchmark examples in *COMPl_eib* 1.0. Technical report. URL <http://www.complib.de/>.
- Lofberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 284–289. IEEE. doi:10.1109/CACSD.2004.1393890.
- Narendra, K.S. and Tripathi, S.S. (1973). Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10(4), 193–199. doi:10.2514/3.44364.
- Oliveira, R.C.L.F., de Oliveira, M.C., and Peres, P.L.D. (2011). Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons. In *2011 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, 1038–1043. IEEE, Denver, CO, USA. doi:10.1109/CACSD.2011.6044553.
- Palacios-Quinonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossella, J., and Karimib, H. (2014). Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(1), 139–155. doi:10.1016/j.jfranklin.2013.08.011.
- Rubió-Massegú, J., Rossell, J., Karimi, H., and Palacios-Quinonero, F. (2013). Static output-feedback control under information structure constraints. *Automatica*, 49(1), 313–316. doi:10.1016/j.automatica.2012.10.012.
- Shaked, U. (2001). Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4), 652–656. doi:10.1109/9.917671.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341–359. doi:10.1023/A:1008202821328.
- Syrmos, V.L., Abdallah, C.T., Dorato, P., and Grigoriadis, K. (1997). Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33(2), 125–137. doi:10.1016/S0005-1098(96)00141-0.
- Toh, K.C., Todd, M.J., and Tütüncü, R.H. (1999). SDPT3 — a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 545–581. doi:10.1080/10556789908805762.
- Trofino, A., Coutinho, D.F., and Barbosa, K.A. (2005). Improved \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. *Revista Controle & Automação*, 16(4), 427–434. doi:10.1590/S0103-17592005000400004.