

MODELAGEM, CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO COM RODA DE REAÇÃO

RODRIGO MAGALHÃES RODRIGUES ALVES*, GABRIEL PEREIRA DAS NEVES*, BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO*

**Escola Politécnica da USP
Depto. de Engenharia de Telecomunicações e Controle
São Paulo, SP, Brasil*

Emails: rodrigo.magalhaes.alves@usp.br, gabriel.pereira.neves@usp.br, angelico@lac.usp.br

Abstract— This article discusses the development, modeling and control of an inverted pendulum driven by a reaction wheel. A physical model is presented in order to validate and test the control. A controller is designed with two operational modes, the swing-up, which gets the pendulum to its upright position, and a digital LQR control in order to stabilize the pendulum at the non-stable equilibrium point. Simulations and practical tests resulted in satisfactory performance.

Keywords— Digital Control, Inverted pendulum, Reaction Wheel, LQR, Swing-up

Resumo— Este artigo discute o desenvolvimento, modelagem e controle de um pêndulo invertido com roda de reação. Um modelo físico é apresentado de modo a validar e testar o controle. Um controlador é projetado com dois modos de operação, o *swing-up* para levantar o pêndulo até sua posição invertida, e um controlador digital LQR para estabilizar o pêndulo neste ponto de equilíbrio instável. Simulações e testes práticos foram satisfatórios.

Palavras-chave— Controle Digital, Pêndulo Invertido, Roda de reação, LQR, Swing-up

1 Introdução

O pêndulo invertido trata-se de um sistema extensivamente estudado devido à sua característica não linear e sua instabilidade (Ogata, 2001). O objetivo do controle do pêndulo invertido é estabilizá-lo em sua posição vertical pra cima, ou seja, em seu ponto de equilíbrio instável. Existem diversas aplicações e variações de pêndulos invertidos, como por exemplo, o pêndulo translacional, explorado em (Sanchez et al., 2004), o pêndulo rotacional de Furuta, proposto em (Furuta K., 1999), e o pêndulo com roda de reação — estudado neste artigo e em (Block et al., 2007a). O conceito de pêndulo invertido pode ser abstraído para diversas aplicações práticas, como o veículo Segway (Kim and Kwon, 2017), um foguete em sua base de lançamento, dentre outros.

A utilização da roda de reação como atuador em sistemas de controle tem sido estudada e aplicada em diversas situações práticas. Um ramo que explora avidamente este mecanismo é o aeroespacial; atualmente, satélites, dentre outros veículos espaciais, utilizam rodas de reação como atuadores para o controle de atitude, como é o caso do telescópio Hubble (Carré and Bertrand, 1999). Outro exemplo reconhecido é o da Estação Espacial Internacional (ISS), que utiliza um giroscópio de reação para controle primário de atitude.

No projeto do controlador de um pêndulo invertido é amplamente utilizadas técnicas de controle clássico, como o PID. Já neste artigo, foi estudado e implementado o controle por realimentação de estados, mais especificamente . O LQR

tem a função de alocar os polos de uma maneira ótima, de modo a minimizar uma função de custo.

Neste projeto, para estabilizar o pêndulo, foi utilizado o regulador quadrático ótimo (LQR) foi aplicado, Considerou-se também um algoritmo de *swing-up* para levar o pêndulo para a posição invertida.

2 Construção

O pêndulo foi construído em uma base feita de MDF, como mostra a Figura 1. Na fase de projeto, o protótipo foi desenhado em CAD, de onde foram extraídos os parâmetros mecânicos do modelo. Um motor CC reutilizado foi escolhido como atuador para gerar o torque da roda de reação. Para a confecção da roda utilizou-se uma placa de alumínio de 4mm de espessura, que foi cortada em jato de água. Todos os parâmetros físicos da planta estão presentes na Tabela 1.

De modo a medir o ângulo do pêndulo, utilizou-se um encoder no eixo de giro do pêndulo. A velocidade angular do pêndulo é calculada por meio das leituras de posição do encoder. Além disso, a velocidade angular da roda de reação é estimada por meio das medições de ângulo do encoder já acoplado ao motor CC.

O motor CC escolhido foi o Faulhaber 2842s024C. Todos os parâmetros e constantes do motor estão dispostos na Tabela 2. O driver de acionamento do motor é uma ponte H com sinal PWM, que é fornecido pela placa microcontroladora FRDM K64F da NXP, como mostrada na Figura 2.

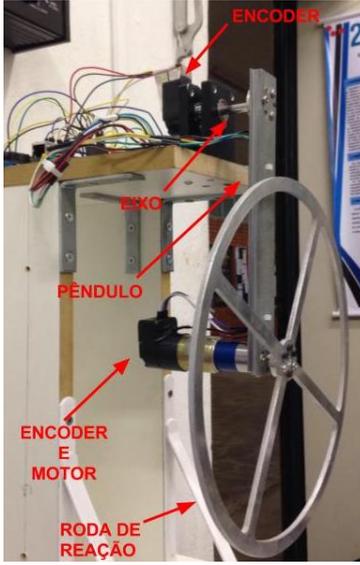


Figura 1: Estrutura mecânica do pêndulo invertido

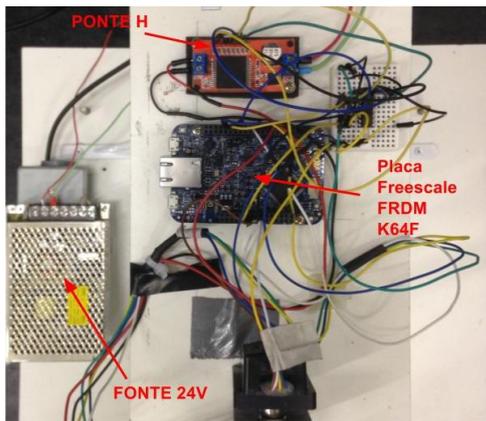


Figura 2: Estrutura elétrica do pêndulo invertido

Tabela 1: Parâmetros e variáveis da modelagem mecânica

Símb.	Parâmetro	Valor
M_p	Massa pêndulo [Kg]	0,07679
M_m	Massa motor [Kg]	0,160
M_w	Massa roda [Kg]	0,135
J_p	Mom. inérc. pêndulo [$kg\ m^2$]	$15,15 \times 10^{-3}$
J_w	Mom. inérc. roda [$kg\ m^2$]	$16,28 \times 10^{-4}$
B_p	Coef. atrito pêndulo [$\frac{N\cdot m}{rad/s}$]	0,0012
ℓ	Comprimento do pêndulo [m]	0,185
g	Acel. da gravidade [m/s^2]	9,82
d	Dis. do CM ao eixo [m]	0,17262
τ	Torque do motor [Nm]	-
$\ddot{\theta}_p$	Acel. ang. pêndulo [rad/s^2]	-
$\dot{\theta}_p$	Vel. ang. pêndulo [rad/s]	-
θ_p	Ângulo do pêndulo [rad]	-
$\dot{\omega}_w$	Acel. ang. roda [rad/s^2]	-

3 Modelagem do Sistema

Tem-se, como base, o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 3.

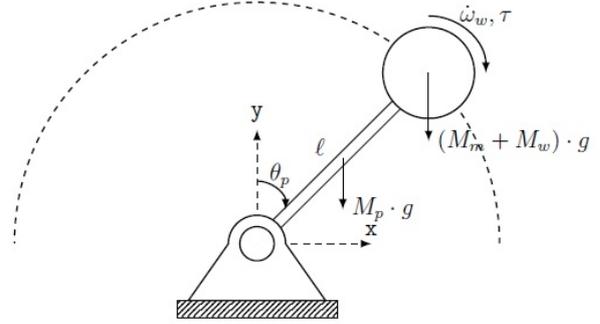


Figura 3: Diagrama de corpo livre do sistema

3.1 Modelagem Mecânica

Considerando a dinâmica e as referências utilizadas na Figura 3, pode-se desvincular a roda e o pêndulo e escrever duas equações, tais que:

$$d M g \text{sen}(\theta_p) = \tau + J_p \ddot{\theta}_p + B_p \dot{\theta}_p \quad (1)$$

$$\tau = J_w \dot{\omega}_w \quad (2)$$

onde foi assumido, de forma simplificada, que $M = M_p + M_w + M_m$. Além disso, d é a distância ao centro de massa do sistema a partir da origem (eixo de rotação da haste do pêndulo). Os parâmetros obtidos são apresentados na Tabela 1.

O coeficiente de atrito viscoso B_p no eixo do pêndulo foi identificado experimentalmente, resultando em $B_p = 0,0012 \frac{N\cdot m}{rad/s}$.

3.2 Modelagem Elétrica

O modelo linear padrão para um motor CC está descrito nas equações (3) e (4).

$$\tau = n K_t i_a - B_{motor} \omega_w \quad (3)$$

$$V_{in} = R_a i_a + n K_v \omega_w \quad (4)$$

Todos os parâmetros relevantes estão na Tabela 2. O coeficiente de atrito do eixo do motor também foi identificado experimentalmente.

Tabela 2: Parâmetros e variáveis da modelagem elétrica

Símb.	Parâmetro	Valor
R_a	Resist. armadura $[\Omega]$	21,0
K_v	Const. de f.c.e.m. $[\frac{V}{rad/s}]$	0,0449
K_t	Const de torque $[\frac{N \cdot m}{A}]$	0,04479
B_{motor}	Coef. de atrito motor $[\frac{N \cdot m}{rad/s}]$	0,0646
n	Redução do motor	14
i_a	Corrente de armadura $[A]$	-
ω_w	Vel. ang. roda $[rad/s]$	-
V_{in}	Tensão de armadura $[V]$	-

3.3 Sistema

Por meio de um rearranjo das equações apresentadas, um modelo completo do sistema é obtido. Note que a variável V_{in} é a única entrada do sistema, que será substituída por uma variável *PWM*, tal que $V_{in} = 24PWM$.

O vetor de estados é definido como $\mathbf{x} = [\theta_p \ \dot{\theta}_p \ \omega_w]^T$. Manipulando as equações mecânicas e elétricas e linearizando-as em torno do ponto de operação, $\mathbf{x} = [0 \ 0 \ 0]^T$, pode-se obter a seguinte relação no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{M \cdot g \cdot d}{J_p} & \frac{B_p}{J_p} & \frac{(K_t \cdot K_v \cdot n^2 + B_{motor} \cdot R_a)}{J_p \cdot R_a} \\ 0 & 0 & \frac{-(K_t \cdot K_v \cdot n^2 + B_{motor} \cdot R_a)}{J_w \cdot R_a} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-(24 \cdot K_t \cdot n)}{J_p \cdot R_a} \\ \frac{(24 \cdot K_t \cdot n)}{J_w \cdot R_a} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Substituindo todos os valores de parâmetros apresentados nas Tabelas 1 e 2, tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 41,5995 & -0,0792 & 7,1793 \\ 0 & 0 & -66,8094 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -47,3114 \\ 440,2752 \end{bmatrix}$$

O sistema em tempo contínuo é discretizado (Franklin et al., 1994), visto que será utilizado o LQR em tempo discreto. Para tanto, definiu-se

um período de amostragem $T_s = 1/200$ s. Assim, o modelo linear em tempo discreto é dado por:

$$\mathbf{x}[k+1] = \Phi \cdot \mathbf{x}[k] + \Gamma \cdot u$$

com

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,0005 & 0,0050 & 0,0001 \\ 0,2080 & 1,0001 & 0,0305 \\ 0 & 0 & 0,7160 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0,0005 \\ -0,2011 \\ 1,8714 \end{bmatrix} \quad (8)$$

4 Controle

Os projetos dos controladores LQR discreto e *swing-up* por energia são descritos nesta seção.

4.1 Controle estabilizador LQR discreto

O controlador LQR digital foi explorado para o controle de estabilização do pêndulo. O algoritmo deste controlador é acionado quando as condições de troca entre o algoritmo de *swing-up* e o de estabilização são respeitadas — estas condições serão discutidas posteriormente.

O controle LQR digital (Skogestad and Postlethwaite, 2007), é um controle ótimo de realimentação de estados, que minimiza o seguinte funcional:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}[k]^T \mathbf{Q} \mathbf{x}[k] + u[k]^T \mathbf{R} u[k] \quad (9)$$

$\mathbf{x}[k]$: vetor de estados

$u[k]$: vetor de entrada

\mathbf{Q} : matriz de ponderação de estados

\mathbf{R} : matriz de ponderação de entrada

A solução é dada por:

$$u[k] = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}[k], \quad (10)$$

onde,

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} \Phi \quad (11)$$

sendo P a solução da equação algébrica de Riccati discreta (Franklin et al., 1994)

$$\Phi^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}) \Phi + \mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (12)$$

Uma primeira escolha para as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} pode ser realizada por meio de uma ponderação de todos os termos da diagonal de \mathbf{Q} (Lewis et al., 2012). Primeiramente, define-se para cada variável de estado um valor máximo de variação. O peso deve ser tal que respeite a equação:

$$q_i \cdot \Delta x_i^2 = 1 \quad (13)$$

$\Delta x_i \equiv$ variação máxima do estado

sendo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Este método faz com que o esforço destinado para a realimentação de cada variável de estado seja normalizado. Foram considerados os seguintes limites de variação:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0,1 \text{ rad} \\ \Delta x_2 &= 1,0 \text{ rad} \\ \Delta \dot{x}_1 &= 1,0 \text{ rad} \end{aligned}$$

Nota-se que um peso maior foi dado ao ângulo do pêndulo, e portanto um esforço maior será destinado a estabilizar esta variável. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} resultantes são dadas por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = 1$$

Com isso, obtém-se

$$\mathbf{K} = [-55,4067 \quad -8,5226 \quad -0,5919]$$

A Figura 4 mostra o diagrama de blocos do sistema discretizado, com o bloco de saturação na entrada para limitar o *duty-cycle* do PWM de -1 a 1, sendo que o sinal negativo representa inversão de sentido.

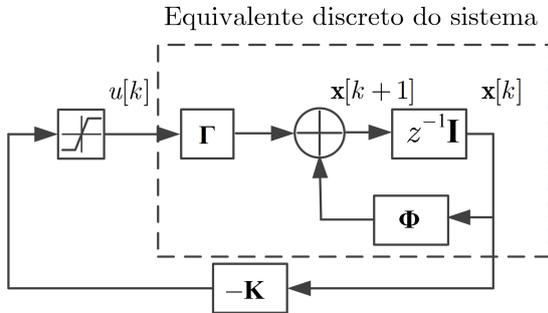


Figura 4: Diagrama de blocos do sistema

4.2 Swing-up

O algoritmo de *swing-up* foi inspirado no método apresentado em (Åström and Furuta, 2000) e (Block et al., 2007b). O objetivo é fornecer a energia necessária para o pêndulo alcançar a posição de energia potencial máxima, ou seja, vertical para cima. Este ponto é o de equilíbrio instável em que o controle de estabilidade será aplicado. Uma forma simplificada para o *swing-up* é tal que:

$$u = -K_{max} \cdot \theta^n \cdot \text{sgn}(\dot{\theta} \cdot \cos(\theta)) \quad (15)$$

A constante K_{max} é ajustada por meio de ensaios. O termo θ^n pondera o torque aplicado pelo

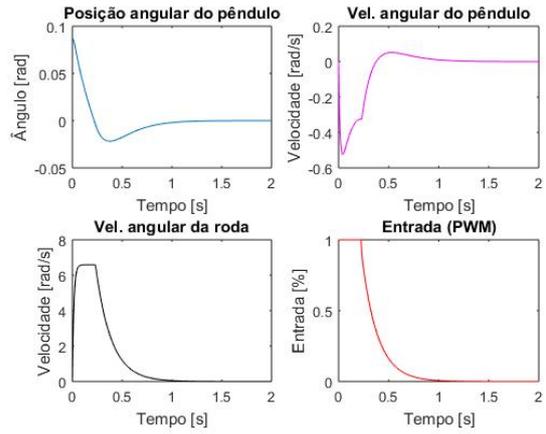


Figura 5: Dados obtidos por meio de simulação

motor na roda, sendo que, para ângulos entre 0 e 1 *rad*, quanto mais próximo de 0 *rad* — ponto de operação do controle — menor será a atuação do motor, principalmente devido ao expoente n , que diminui significativamente o torque para pequenos ângulos. Idealmente, o pêndulo deve chegar na posição invertida apenas com energia potencial e energia cinética nulas. O ajuste do *swing-up* foi realizado empiricamente e, por fim, foi implementado o seguinte algoritmo:

$$u = -0,002 \cdot \theta^5 \cdot \text{sgn}(\dot{\theta} \cdot \cos(\theta))$$

5 Resultados

Inicialmente, o controle LQR foi validado via simulação com o modelo não linear e assumindo condição inicial já próxima do ponto de equilíbrio. Com condição inicial de 5°, pode-se verificar que o controle foi capaz de estabilizar o sistema no ponto de operação, conforme apresentado na Figura 5. Porém, nos instantes iniciais, o atuador atingiu a saturação.

Na validação prática, tanto o controle estabilizante quanto o *swing-up* foram testados. Vale ressaltar que a referência de posição utilizada pelo *swing-up* — ângulo θ — é diferente da utilizada pelo controle estabilizante — ângulo φ . A relação entre elas é a seguinte:

$$\varphi = \theta - \pi \cdot \text{sgn}(\theta) \quad (16)$$

Assim, não faz diferença para o controle o *swing-up* terminar na posição $\theta > 0$ ou $\theta < 0$.

Resultados práticos de *swing-up* e LQR são apresentados na Figura 6. O pêndulo foi movido com sucesso para a região de atuação do controle estabilizante LQR. Por sua vez, o LQR foi capaz de estabilizar o sistema, apresentado um desvio máximo de 4°. Porém, pode-se perceber que o pêndulo opera com muitas oscilações no ponto de estabilização, e a hipótese levantada para justificar este efeito é a folga existente no acoplamento da

roda com o motor. Além disso, a haste utilizada como pêndulo é pouco resistente para momentos fletores, causando movimentos indesejados e não desprezíveis para o pêndulo. Um vídeo do sistema pode ser encontrado no canal Youtube do Laboratório de Controle Aplicado da Escola Politécnica da USP (LCA), pelo link www.youtube.com/c/laboratoriodecontroleaplicadopoliusp.

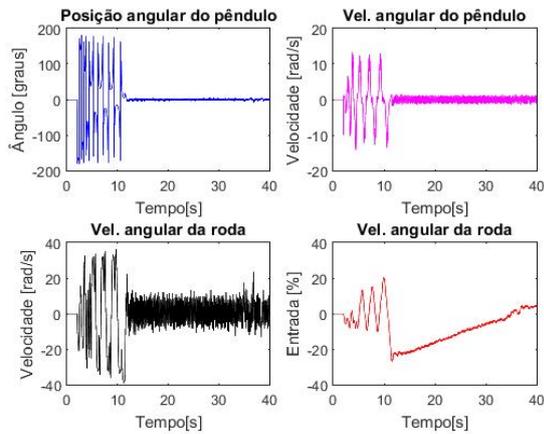


Figura 6: Dados medidos com controlador LQR e Swing up

6 Conclusão

O sistema construído foi de baixo custo e tem um grande potencial para ser utilizado e melhorado em laboratórios didáticos de controle. O algoritmo de *swing-up* foi bem implementado, e o pêndulo atingiu a posição invertida com sucesso. O controle LQR se mostrou eficaz ao estabilizar o pêndulo e inclusive aceitar ruídos e perturbações significantes. Porém, uma montagem mais robusta que minimize as folgas de acoplamento e que possua uma haste mais rígida, poderia resultar em resultados mais próximos do obtido na simulação com o modelo nominal. Um motor mais potente também é indicado para futuras melhorias no sistema.

Referências

- Åström, K. J. and Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control, *Automatica* **36**(2): 287–295.
- Block, D. J., Astrom, K. J. and Spong, M. W. (2007a). *The Reaction Wheel Pendulum*, Morgan & Claypool.
- Block, D. J., Åström, K. J. and Spong, M. W. (2007b). The reaction wheel pendulum, *Synthesis Lectures on Control and mechatronics* **1**(1): 1–105.

- Carré, D. J. and Bertrand, P. A. (1999). Analysis of hubble space telescope reaction wheel lubricant, *Journal of spacecraft and rockets* **36**(1): 109–113.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A. and Powell, J. D. (1994). *Feedback control of dynamic systems*, Vol. 3, Addison-Wesley Reading, MA.
- Furuta K., Yamakita M., H. T. (1999). Control practice using pendulum, *American Control Conference* pp. 490–494.
- Kim, S. and Kwon, S. (2017). Nonlinear optimal control design for underactuated two-wheeled inverted pendulum mobile platform, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **22**(6): 2803–2808.
- Lewis, F. L., Vrabie, D. and Syrmos, V. L. (2012). *Optimal control*, John Wiley & Sons.
- Ogata, K. (2001). *Modern Control Engineering*, 4th edn, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Sanchez, J., Dormido, S., Pastor, R. and Morilla, F. (2004). A java/matlab-based environment for remote control system laboratories: illustrated with an inverted pendulum, *IEEE Transactions on Education* **47**(3): 321–329.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2007). *Multivariable feedback control: analysis and design*, Vol. 2, Wiley New York.