

# ESTIMANDO O CONJUNTO ATRATOR DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS USANDO UMA EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA VIA MÚLTIPLAS FUNÇÕES ESCALARES

THIAGO DE SOUZA PINTO\*, LUÍS FERNANDO ALBERTO COSTA†, MICHELE CRISTINA VALENTINO\*

\**Av. Alberto Carazzai, 1640  
Univ. Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR  
Cornélio Procópio, PR, Brasil*

†*Av. Trabalhador São Carlense, 400  
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP  
São Carlos, SP, Brasil*

Emails: [thiagosp@uftpr.edu.br](mailto:thiagosp@uftpr.edu.br), [lfcAlberto@usp.br](mailto:lfcAlberto@usp.br), [valentino@utfpr.edu.br](mailto:valentino@utfpr.edu.br)

**Abstract**— This paper proposes an extension of the LaSalle’s invariance principle for affine switched systems under arbitrary dwell-time switching via multiple scalar functions. The extension proposed is useful for obtaining uniform estimates of the attractor set of this class of dynamic systems under nonlinear matrix inequalities. In order to obtain better estimates, we propose a nonlinear optimization problem, which takes into account the minimization of the volume of the ellipsoid that estimates the estimate of the attractor. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords**— Affine Switched Systems, Attractor, Multiple Auxiliary Functions, Principle of Invariance.

**Resumo**— Este artigo propõe uma extensão do princípio de invariância de LaSalle para sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário via múltiplas funções escalares. A extensão proposta é útil para obter estimativas uniformes do conjunto atrator desta classe de sistemas dinâmicos via desigualdades matriciais não-lineares. No intuito de melhorar as estimativas obtidas foi proposto um problema de otimização não linear, o qual leva em conta a minimização do volume de um elipsoide que estima o conjunto atrator. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a efetividade da abordagem proposta.

**Palavras-chave**— Sistemas Chaveados Afins, Atrator, Múltiplas Funções Auxiliares, Princípio de Invariância.

## 1 Introdução

Os sistemas chaveados são um tipo particular de sistemas híbridos que apresentam dinâmica contínua e discreta no tempo. De modo geral, estes sistemas são compostos por uma família de subsistemas e uma lei de chaveamento adequada que escolhe, a cada instante de tempo, o subsistema dinâmico que será ativado (Liberzon and Morse, 1999). Essas leis de chaveamento podem ser supervisionadas ou não supervisionadas e podem ser orientadas por tempo ou conduzidas por eventos. Recentemente, tem-se observado um crescente interesse da comunidade científica no estudo do problema de estabilidade de sistemas chaveados. Uma das razões deste aumento é que estes sistemas podem caracterizar mais adequadamente as variações estruturais de muitos sistemas práticos no seu processo operacional. Desse modo, sistemas chaveados são encontrados em muitas aplicações práticas, tais como: sistemas elétricos de potência, controle de sistemas mecânicos, controle de processos, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência e muitos outros campos (Lin and Antsaklis, 2009). Além disso, sistemas chaveados surgem na aplicação de controladores múltiplos que são amplamente utilizado no controle intelectual e controle adaptativo (Liberzon, 2003).

Mesmo existindo importantes avanços na teoria de estabilidade de sistemas chaveados, veja

os artigos (Liberzon and Morse, 1999), (Lin and Antsaklis, 2009), os livros recentes (Liberzon, 2003), (Sun, 2005), (Sun and Ge, 2011), (Yang et al., 2014) e as referências neles contidas, ainda continua sendo desafiador a determinação exata do conjunto atrator e da região de atração destes sistemas dinâmicos. Assim, a estimação do conjunto atrator e da região de atração de sistemas chaveados é um tópico de importância significativa. Nestes casos, o interesse não é estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio particular, mas o comportamento assintótico das soluções.

O Princípio de Invariância é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos. Neste intuito, uma função escalar auxiliar, muitas vezes denominada função de Lyapunov, é utilizada. Uma propriedade fundamental dessa função é a não-positividade de sua derivada ao longo das soluções. Porém, encontrar tal função, satisfazendo todas as suposições do princípio de invariância, pode ser difícil para muitos sistemas dinâmicos. Por isso, uma extensão do princípio de invariância, a qual permite que a derivada da função auxiliar possa ser positiva em alguns conjuntos limitados, foi proposta para sistemas contínuos em (Rodrigues et al., 2000), para sistemas discretos em (Alberto et al., 2007), para sistemas com atraso em (Rabelo and Alberto, 2010) e para sistemas chaveados não lineares

res em (Valentino et al., 2012).

Ainda, buscando superar as dificuldades existentes em encontrar uma função escalar auxiliar satisfazendo todas as suposições impostas pelo princípio de invariância e suas extensões, uma abordagem que utiliza o método de múltiplas funções foi considerada (Branicky, 1998; Bacciotti and Mazzi, 2005; Valentino et al., 2015). Em comparação com a função comum, ele permite que cada subsistema chaveado tenha sua própria função de Lyapunov. No entanto, são necessárias, algumas condições adicionais sobre essas funções nos instantes de chaveamento para assegurar que a solução permaneça em um conjunto compacto.

Tendo como motivação os resultados obtidos em (Valentino et al., 2012) e (Bacciotti and Mazzi, 2005), este artigo apresenta uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos não-lineares, denominada na literatura como sistemas chaveados afins, sob chaveamentos *dwell-time* arbitrários, utilizando a abordagem de múltiplas funções auxiliares, que é útil para obter estimativas de conjuntos atratores de sistemas chaveados afins cuja área de atração é global. Do ponto de vista prático, esta extensão busca superar as dificuldades existentes em encontrar as funções auxiliares que satisfaçam as condições exigidas nos resultados de (Valentino et al., 2012) e (Bacciotti and Mazzi, 2005). Para isto, explora-se a estrutura dos sistemas chaveados afins de modo que as hipóteses dos resultados, apresentados neste artigo, sejam dadas em termos de desigualdades matricial, as quais podem ser resolvidas com o auxílio de ferramentas computacionais.

A extensão do princípio de invariância proposta neste artigo é explorar o processo de obtenção de “boas” estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins para qualquer chaveamento *dwell-time* considerado. O resultado aqui obtido permite, por meio de um problema de otimização não-linear, que leva em consideração a minimização do volume de uma região elipsoidal, a obtenção de estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário, de modo a sistematiz

Durante o desenvolvimento do trabalho usaremos  $\mathbb{N}$  para denotar o conjunto de números naturais,  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{n \times n}$  o espaço Euclidiano de dimensão  $n$  e o espaço de matrizes reais  $n \times n$ , respectivamente. A notação  $\|\cdot\|$  refere-se a norma Euclidiana,  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  denota a bola aberta  $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \epsilon\}$  de raio  $\epsilon$  centrada em  $x$  e  $\mathcal{B}(\mathcal{M}, \epsilon) = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{B}(x, \epsilon)$ . Além disso, para matrizes e vetores,  $(\cdot)^T$  significa transposição e as notações  $\lambda_{\min}(\cdot)$  e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  são utilizadas para denotar o menor e maior autovalor de uma matriz real.

## 2 Preliminares

No presente artigo, estudamos o comportamento assintótico das soluções de uma classe de sistemas chaveados contínuos no tempo definidas por

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  são vetores de estado,  $\sigma(t) : [0, \infty[ \rightarrow \mathcal{P} = \{1, \dots, \mathcal{N}\}$  é uma função constante por partes, contínua à direita, chamada de lei de chaveamento, dependente do tempo, e  $\mathcal{N}$  é o número de subsistemas. Seja  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de tempos de chaveamento consecutivos associada à lei de chaveamento  $\sigma$  e  $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p, k \in \mathbb{N}\}$  sendo a união dos intervalos em que o subsistema  $p$  é ativo. Uma função contínua, suave por partes,  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução do sistema chaveado afim (1) no intervalo  $I$  se  $x(t)$  satisfaz  $\dot{x}(t) = A_p x(t) + b_p, \forall t \in I_p \cap I$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Supomos que a sequência de chaveamento  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é divergente e que cada subsistema  $p$  estará ativo infinitas vezes. Isto é, assumimos para todo  $T > 0$  e  $p \in \mathcal{P}$  a existência de um índice  $k$  tal que  $\sigma(\tau_k) = p$  e  $\tau_k > T$ . O conjunto de todas as soluções chaveadas é denotado por  $\mathcal{S}$ . Denota-se  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ , ou simplesmente  $\varphi(t, x_0)$ , a solução do sistema chaveado afim (1) com condição inicial  $x_0$  no tempo  $t = 0$  sob a lei de chaveamento  $\sigma(t)$ .

Neste trabalho, consideramos as soluções do sistema chaveado (1) sob a classe de sinais de chaveamento *dwell-time*. Para fácil compreensão dos resultados, algumas definições preliminares, as quais podem ser encontradas em (Liberzon, 2003) e (Bacciotti and Mazzi, 2005), são apresentadas. Estas definições são dadas de forma geral, isto é, para o sistema chaveado contínuo no tempo descrito por

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x), \quad (2)$$

onde  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ .

**Definição 1** Considere a sequência de tempos de chaveamento consecutivos  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  associada com  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ . A solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \mathcal{S}$  tem um *dwell-time* não nulo se existe  $h > 0$  tal que  $\inf_k (\tau_{k-1} - \tau_k) \geq h$ . O número  $h$  é chamado de *dwell-time* para  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ . O conjunto de todas as soluções com chaveamento *dwell-time* é denotado por  $\mathcal{S}_{dwell} \subset \mathcal{S}$ .

**Definição 2** Um ponto  $q \in \mathbb{R}^n$  é um ponto  $\omega$ -limite da solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (2) se existir uma sequência  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $t_k \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{\sigma(t_k)}(t_k, x_0) = q$ . O conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limites da solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$  será denotado por  $\omega_{\sigma}^+(x_0)$ .

Na definição anterior é importante observar que o conjunto  $\omega_{\sigma}^+(x_0)$  da solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$  depende não apenas do ponto inicial  $x_0$  mas também

da seqüência de chaveamento  $\sigma$  que está sendo utilizada.

**Definição 3** A solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (2) é atraída para um conjunto compacto  $\mathcal{M}$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe um tempo  $T > 0$  tal que  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{M}, \epsilon)$  para  $t \geq T$ . Evidentemente,  $\varphi(t, x_0)$  é atraída para o conjunto  $\mathcal{M}$ , ou seja,  $\varphi(t, x_0) \rightarrow \mathcal{M}$  se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x_0), \mathcal{M}) = 0$ , onde  $d$  é a distância de um ponto ao conjunto que pode ser definida por  $d(y, \mathcal{M}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} \|y - m\|$ .

**Definição 4** Um conjunto compacto  $\mathcal{M}$  é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado (2), se  $\forall x_0 \in \mathcal{M}$ , existe um índice  $p \in \mathcal{P}$  e um número real  $c > 0$  tal que  $\varphi_p(t, x_0) \in \mathcal{M}$  para qualquer  $t \in [-c, 0]$  ou  $t \in [0, c]$ .

A próxima seção apresenta uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário que explora múltiplas funções auxiliares.

### 3 Extensão do princípio de invariância utilizando múltiplas funções auxiliares

Com o objetivo de obter condições suficientes menos conservadoras para a análise do comportamento assintótico de sistemas afins, neste momento serão consideradas as funções escalares auxiliares  $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  da seguinte forma:

$$V_p(x) = (x - d)' P_p (x - d), \quad (3)$$

em que  $d \in \mathbb{R}^n$  e  $P_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall p \in \mathcal{P}$ . Além disso, suponha que

$$\begin{aligned} \exists P_p = P'_p > 0 \text{ tal que} \\ Q_p = A'_p P_p + P_p A_p < 0, \forall p \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4)$$

Defina  $\mathcal{C}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) \geq 0\}$  o conjunto dos pontos onde a derivada da função  $V_p$  ao longo da trajetória do subsistema  $p$  é positiva ou nula e defina os conjunto  $\mathcal{C} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{C}_p$ .

O lema a seguir, garante que o conjunto  $\mathcal{C}$  será limitado.

**Lema 1** Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares auxiliares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Então o conjunto  $\mathcal{C}$  é limitado.

**Prova:** A derivada da função  $V_p$  ao longo da solução do subsistema  $p$  é dada por:

$$\nabla V_p(x)(A_p x + b_p) =$$

$$\begin{aligned} &= (A_p x + b_p)' P_p (x - d) + (x - d)' P_p (A_p x + b_p) \\ &\leq \lambda_{\max}(Q_p) \|x - d\|^2 + (b_p + A_p d)' P_p (x - d) \cdots \\ &\quad \cdots + [(b_p + A_p d)' P_p (x - d)]' \\ &\leq \lambda_{\max}(Q_p) \|x - d\|^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + 2 \|(b_p + A_p d)' P_p\| \|x - d\|. \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_p(x) &\leq \lambda_{\max}(Q_p) \|x - d\|^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + 2 \|(b_p + A_p d)' P_p\| \|x - d\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Uma vez que (4) é satisfeita  $\forall p \in \mathcal{P}$ , então  $\lambda_{\max}(Q_p) < 0$ , logo de (5) pode-se concluir que a derivada é estritamente negativa quando  $\|x - d\| > -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P_p\|}{\lambda_{\max}(Q_p)}$ . Assim,

$$\mathcal{C}_p \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x - d\| \leq -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P_p\|}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{C}_p \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x - d\| \leq z\}, \quad (6)$$

onde

$$z = \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P_p\|}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}, \quad (7)$$

ou seja, o conjunto  $\mathcal{C}$  é limitado.  $\square$

Dadas as matrizes definidas positivas  $P_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , existem matrizes definidas positivas  $P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfazendo

$$P_m \leq P_p \leq P_M, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (8)$$

Então, definindo as funções  $\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= (x - d)' P_m (x - d) \quad \text{e} \\ \beta(x) &= (x - d)' P_M (x - d), \end{aligned} \quad (9)$$

temos

$$\alpha(x) \leq V_p(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}. \quad (10)$$

Considerando funções contínuas  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  satisfazendo (10), são definidos os conjuntos  $\Omega_{\ell_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq \ell_0\}$ ,  $\Omega_{\ell_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq \ell_j\}$  e  $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) \leq \ell_0\}$  com  $\sup_{x \in \mathcal{C}} \beta(x) \leq \ell_0 < \infty$  e  $\sup_{x \in \Omega_{\ell_{j-1}}} \beta(x) \leq \ell_j < \infty$ ,  $j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$ , os quais satisfazem:

$$\mathcal{C} \subseteq \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1} \subseteq \cdots \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}. \quad (11)$$

O próximo lema permite estimar os valores de  $\ell_0, \dots, \ell_{\mathcal{N}+1}$  e as respectivas regiões  $\mathcal{C}$ ,  $\Theta$  e  $\Omega_{\ell_j}$ ,  $\forall j \in \{0, 1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$  garantindo que a inclusão (11) seja satisfeita.

**Lema 2** Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares auxiliares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Além disto, sejam as funções  $\alpha$  e  $\beta$  definidas em (9) que satisfazem (10),

(i) Se  $\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M)z^2$  então  $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$  em que  $z$  é dado por (7).

(ii) Dado  $\ell_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$ , então  $\Omega_{\ell_{j-1}} \subseteq \Omega_{\ell_j}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$ , se

$$\ell_j \geq \frac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)} \ell_{j-1}. \quad (12)$$

**Prova:** (i) Inicialmente, observamos que devido ao Lema 1 é verdadeira a inclusão (6) para  $z$  dado por (7). Assim, ao analisar os valores numéricos que a função contínua  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\beta(x) = (x - d)' P_M (x - d)$ , assume quando  $x \in \mathcal{C}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \beta(x) &\leq \lambda_{\max}(P_M) \|x - d\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P_M) z^2, \forall x \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Desse modo, escolhendo  $\ell_0 \in \mathbb{R}$ , da forma

$$\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M) z^2,$$

concluimos que  $\mathcal{C} \subset \Theta$ .

Portanto, pela construção do conjunto  $\Omega_{\ell_0}$ , tem-se que  $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$ .

(ii) A demonstração é análoga ao do trabalho (Pinto et al., 2018).  $\square$

O próximo lema garante que a solução chaveada iniciando em  $\Omega_{\ell_{j-1}}$  nunca deixa  $\Omega_j$  enquanto um índice  $p \in \mathcal{P}$  fixo está ativo. Ele é uma versão particularizada do Lema 2, apresentado em (Valentino et al., 2012), para a classe de sistemas afins.

**Lema 3** Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Se a solução  $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{j-1}}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N} + 1\}$  no tempo de chaveamento  $t = \tau_k$  com  $\sigma(\tau_k) = p \in \mathcal{P}$ , então  $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_j}$ ,  $\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ .

**Prova:** Suponha que exista um  $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$  tal que  $\varphi(\tau, x_0) \notin \Omega_{\ell_j}$ . Devido a continuidade das funções  $V_p$  e da solução  $\varphi(t, x_0)$ , pode-se afirmar que existe  $\bar{\tau} \in (\tau_k, \tau)$  tal que  $V_p(\varphi(\bar{\tau}, x_0)) = \ell$  e  $V_p(\varphi(t, x_0)) > \ell$ ,  $\forall t \in (\bar{\tau}, \tau)$  o que é uma contradição pois, de (11) tem-se  $\mathcal{C} \subseteq \Theta$  e assim  $\nabla V_p(x)(A_p x + b_p) < 0$ ,  $\forall x \notin \Theta$  e  $\forall p \in \mathcal{P}$ . Portanto, a solução  $\varphi(t, x_0)$  com  $x_0 \in \Omega_{\ell_{j-1}}$  permanece em  $\Omega_{\ell_j}$  para todo  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ .  $\square$

**Observação 1** No Lema 2 em (Valentino et al., 2012), exige-se que a solução seja limitada. No Lema 3, a limitação é automaticamente garantida pela limitação de  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$ , que vem do fato da matriz  $P_m$  ser definida positiva.

Nesse trabalho vamos considerar, sobre as múltiplas funções auxiliares  $V_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , a seguinte suposição.

**Suposição 1** Para todo par de tempos de chaveamentos consecutivos  $\tau_h < \tau_j$  tal que  $\sigma(\tau_h) = \sigma(\tau_j) = p$ , vale  $V_p(\varphi(\tau_h, x_0)) > V_p(\varphi(\tau_j, x_0))$  se  $\varphi(\tau_h, x_0) \notin \Theta$  e  $\varphi(\tau_j, x_0) \notin \Theta$ .

Explorando o resultado do Lema 3 e considerando a Suposição 1, o próximo lema estabelece um resultado sobre invariância dos conjuntos de nível elipsoidais da função  $\alpha$ .

**Lema 4** Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Se a Suposição 1 é satisfeita tem-se que toda solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ ,  $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$ , permanece em  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ , para todo  $t \geq 0$ .

**Prova:** Como (4) é satisfeita, então pelo Lema 2 existem  $\ell_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\sup_{x \in \mathcal{C}} \beta(x) < \ell_0$  e ainda existe  $\ell_j \in \mathbb{R}$  tais que  $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1} \subseteq \dots \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ , com  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  definidas em (9).

Portanto, pelo Lema 3 em (Valentino et al., 2012), se  $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$  toda solução  $\text{dwell-time}$   $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ , para todo  $t \in [t_0, w+)$ , em que  $w+$  é o tempo máximo de existência da solução. Como por construção  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$  é um conjunto limitado, então a solução é limitada. Portanto  $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ , para todo  $t \geq 0$ .  $\square$

O lema a seguir garante que toda solução do sistemas chaveado afim (1) sob chaveamento  $\text{dwell-time}$  arbitrário é limitada.

**Lema 5** Considere o sistema chaveado afim (1), as funções escalares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Além disto, suponha que a Suposição 1 seja satisfeita. Então, toda solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , é limitada.

**Prova:** Seja  $\ell_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M)z^2$  em que  $z$  é dado por (7). Se  $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$ , então pelo Lema 4, temos que toda solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$  permanece em  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ , para todo  $t \geq 0$ , ou seja, a solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$  é limitada.

Agora, considere que  $x_0 \notin \Omega_{\ell_0}$  e  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ . Seja  $L_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\sup_{x \in \mathcal{C}} \beta(x) < \ell_0 < L_0$  e  $x_0 \in \Omega_{L_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq L_0\}$ . Definindo os conjuntos  $\Omega_{L_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq L_j\}$  onde  $\sup_{x \in \Omega_{L_{j-1}}} \beta(x) \leq L_j < \infty$ ,  $j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$  obtemos as seguintes inclusões  $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{L_0} \subseteq \Omega_{L_1} \subseteq \dots \subseteq \Omega_{L_{\mathcal{N}+1}}$ . Devido as múltiplas funções  $V_p$  dadas por (3) e a Suposição 1, é possível utilizar novamente o Lema 4 para garantir que se  $x_0 \in \Omega_{L_0}$ , então  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$  permanece em  $\Omega_{L_{\mathcal{N}+1}}$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja, a solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$  com  $x_0 \notin \Omega_{\ell_0}$  é limitada.  $\square$

Explorando os resultados anteriores, uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins via múltiplas funções auxiliares é estabelecida.

**Teorema 6** *Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares  $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Ainda, considere que a Suposição 1 seja válida. Então, toda solução de (1),  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de  $\Omega_{\ell_{N+1}}$ .*

**Prova:** Considere que  $x_0 \in \Theta$  e  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ . Como, por hipótese, a Suposição 1 e as desigualdades (3) e (4) são satisfeitas, então pelo Lema 5 e Lema 4, tem-se que a solução  $\varphi(t, x_0)$  é limitada, e ainda  $\varphi(t, x_0)$  permanece dentro de  $\Omega_{\ell_{N+1}}$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto, pela Proposição 2 do artigo (Bacciotti and Mazzi, 2005), a solução será atraída para um conjunto fracamente invariante em  $\Omega_{\ell_{N+1}}$ .

Agora, seja  $x_0 \notin \Theta$  e suponha por absurdo que a solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$  não entra em  $\Theta$ . Considere a sequência de tempos de chaveamento  $\{\tau_{k_p}\}$  a qual o subsistema  $p$  vem a ser ativo, isso é,  $\sigma(\tau_{k_p}) = p$ . Da Suposição 1, temos que a sequência  $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0))$  é uma sequência de números reais limitada inferiormente. Então  $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0)) \rightarrow r_p$  quando  $k \rightarrow +\infty$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Uma vez que  $\varphi(t, x_0)$  é limitado (veja Lema 5), então pela Proposição 2 em (Bacciotti and Mazzi, 2005),  $\omega^+(x_0)$  é não vazio e fracamente invariante. Seja  $c \in \omega^+(x_0)$ , então existe uma sequência  $\{t_j\}$  tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow c$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Como o conjunto  $\mathcal{P}$  é finito, existe ao menos um índice  $\bar{p} \in \mathcal{P}$  e uma subsequência  $\{t_{j_i}\}$  tal que  $t_{j_i} \in I_{\bar{p}}$ . Então,  $V_{\bar{p}}(\varphi(t_{j_i}, x_0)) \rightarrow V_{\bar{p}}(c) = r_{\bar{p}}$  para todo  $c \in \omega^+(x_0)$ . Como na demonstração da Proposição 2 em (Bacciotti and Mazzi, 2005), podemos provar a existência de um intervalo  $[\epsilon, \gamma]$  contendo a origem e funções  $v_j(t) = \varphi(t + t_j)$  definidas sobre  $[\epsilon, \gamma]$ , satisfazendo a seguinte propriedade:  $v_j(t)$  converge uniformemente para  $v(t)$  em  $[\epsilon, \gamma]$ ,  $v(t) \subset \omega^+(x_0)$  para todo  $t \in [\epsilon, \gamma]$ ,  $\dot{v}(t) = f_{\bar{p}}(v(t))$  e  $v(0) = c$ . Então  $V_{\bar{p}}(v(t)) = r_{\bar{p}}$  e  $\nabla V_{\bar{p}}(v(t))f_{\bar{p}}(v(t)) = 0$  para todo  $t \in [\epsilon, \gamma]$ . Particularmente, para  $t = 0$ ,  $\nabla V_{\bar{p}}(v(0))f_{\bar{p}}(v(0)) = \nabla V_{\bar{p}}(c)f_{\bar{p}}(c) = 0$ , então  $c \in \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\}$  e  $\omega^+(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\} \subseteq \Theta$ . O conjunto  $\omega^+(x_0)$  é fracamente invariante, então a solução é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\}$ , o que é uma contradição pois  $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\} \subseteq \Theta$ . Portanto, existe algum  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(T, x_0) \in \Theta$  e então o resultado segue da primeira parte dessa demonstração.

Portanto, a solução  $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$  é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em  $\Omega_{\ell_{N+1}}$ .  $\square$

O Teorema 6, garante que o conjunto elipsoidal  $\Omega_{\ell_{N+1}}$ , associado a função  $\alpha$  dada por (9), seja uma estimativa do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento *dwell-time* arbitrário. Porém, pode-se notar que o tamanho de  $\Omega_{\ell_{N+1}}$  está relacionado com as matrizes definidas positivas  $P_1, \dots, P_p, P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e o vetor  $d \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, a estimativa do conjunto atrator depende do valor escolhido para os números reais  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{N+1}$  que satisfazem a inclusão (11). Por isso, na próxima seção, é apresentado o resultado principal deste artigo, o qual permite sistematizar a obtenção de “boas” estimativas dos conjuntos atratores de sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário através de um problema de otimização não linear.

#### 4 Estimando o conjunto atrator por meio de otimização

Como estamos interessados em determinar uma estimativa de  $\Omega_{\ell_{N+1}}$  tão pequena quanto possível, a ideia é pesquisar entre todas  $(N + 3)$ -uplas  $(P_1, \dots, P_N, P_m, P_M, d)$  satisfazendo as desigualdades (3), (4) e (8), aquela combinação que minimiza o tamanho do conjunto  $\Omega_{\ell_{N+1}}$ , considerando algum critério de tamanho. Visto que  $\Omega_{\ell_{N+1}}$  é um conjunto elipsoidal, um dos seguintes critérios clássicos de tamanho que pode ser usado: minimização do volume, minimização do eixo secundário, minimização do traço e também a minimização em determinadas direções (Boyd et al., 1994). Optamos, neste trabalho, pelo critério de tamanho dado pela minimização do volume.

O próximo teorema permite encontrar uma estimativa de volume mínimo do conjunto atrator do sistemas chaveado afim (1) sob chaveamento arbitrário explorando a extensão do princípio de invariância via múltiplas funções auxiliares dada pelo Teorema 6. Neste teorema a estimação do conjunto atrator é formulada como um problema de otimização não linear.

Considere o seguinte problema de otimização,

##### Otimização 1

$$\text{minimize} \quad -\ln(\det(P_m)) \quad (13)$$

$$\text{sujeito a} \quad P_p > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (14)$$

$$Q_p < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (15)$$

$$P_m - P_p < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (16)$$

$$P_p - P_M < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (17)$$

$$\lambda_{\max}(P_M)z_p^2 - 1 < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (18)$$

$$P_m > 0, \quad (19)$$

$$P_M > 0, \quad (20)$$

em que

$$z_p = \left\{ -\frac{2\|(b_p + A_p d)'P_p\|}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

$$P_p \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall p \in \mathcal{P}, P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Q_p = A_p' P_p + P_p A_p, \forall p \in \mathcal{P}, d \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 7** *Suponha que a  $(\mathcal{N} + 3)$ -upla  $(P_1, \dots, P_{\mathcal{N}}, P_m, P_M, d)$  seja solução do Problema de Otimização 1. Ainda, considere que a Suposição 1 seja válida e  $\ell_j \geq \frac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)} \ell_{j-1}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$ . Então,  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$  é uma estimativa de volume mínimo do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento *dwell-time* arbitrário, ou mais precisamente, toda solução  $\varphi(t, x_0) \in S_{dwell}$  tende para o maior conjunto fracamente invariante contido em  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ .*

**Prova:** Para provar esse resultado, considere que a  $(\mathcal{N} + 3)$ -upla  $(P_1, \dots, P_{\mathcal{N}}, P_m, P_M, d)$  é uma solução do Problema 1. Observamos que das restrições (14) - (15) e das  $\mathcal{N}$  primeiras coordenadas da solução do Problema de Otimização 1 é possível escrever as funções escalares  $V_p$  dadas por (3) tal que (4) seja satisfeita. Utilizando (16) e (17), temos que a desigualdade (8) é verificada. Assim, podemos definir as funções  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  como em (9) tal que (10) seja satisfeita. Reescrevendo (18) temos  $\lambda_{\max}(P_M)z_p < 1$ ,  $\forall p \in \mathcal{P}$ , ou seja, pelo Lema 2 é possível garantir a inclusão (11), onde  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_j \geq \frac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)} \ell_{j-1}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$  e  $z$  é dado por (7). Ainda, temos por hipótese que a Suposição 1 é satisfeita. Portanto, como todas as hipóteses do Teorema 6 são satisfeita, tem-se que toda solução do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento *dwell-time* arbitrário,  $\varphi(t, x_0) \in S_{dwell}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ . A demonstração é finalizada levando em conta que o volume de  $\Omega_{\ell_0}$ , onde  $\ell_0 = 1$ , é proporcional a  $(\det(P_m))^{1/2}$  e minimizar este determinante é o mesmo que minimizar  $-\ln(\det(P_m))$ .  $\square$

Obtemos as matrizes definidas positivas  $P_1, \dots, P_p, P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e os vetores  $d \in \mathbb{R}^n$ , que satisfazem o Teorema 7, resolvendo o Problema de Otimização 1 por meio de algoritmos numéricos. Assim, o cálculo da  $(\mathcal{N} + 3)$ -upla  $(P_1, \dots, P_{\mathcal{N}}, P_m, P_M, d)$  feito dessa forma, é sistematizado e ao mesmo tempo tende a melhorar a estimativa do conjunto atrator.

O procedimento abaixo tem o intuito de explorar o Teorema 7 de modo a sistematizar a obtenção de uma estimativa do conjunto atrator sendo válida a inclusão (11), onde, pelo Teorema 6, o conjunto elipsoidal  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$  será uma estimativa de volume mínimo do conjunto atrator do sistema chaveado afim sob chaveamento *dwell-time* arbitrário.

## Procedimento 1

- **Entrada:**  $A_p, b_p, p \in \mathcal{P}$ .
- **Saída:**  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$  (estimativa do conjunto atrator do sistema chaveado sob chaveamento *dwell-time* arbitrário (1))
  1. Obtenha as matrizes definidas positivas  $P_1, \dots, P_{\ell_{\mathcal{N}+1}}, P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e o vetor  $d \in \mathbb{R}^n$ , resolvendo o Problema de Otimização 1.
  2. Sendo  $\ell_0 = 1$ . Para  $j \in \{1, \dots, \mathcal{N} + 1\}$ ,
    - \* calcule  $\ell_j \geq \frac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)} \ell_{j-1}$ ,
  3. Calcule o volume do conjunto  $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ .

A seguir, o Teorema 7, através do Procedimento 1 descrito acima, é aplicado para estimar o conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento *dwell-time* arbitrário de dois exemplos numéricos. As simulações numéricas foram realizadas com o auxílio do software Matlab. Além disso, na resolução dos exemplos foi utilizado a função *ga*, pertencente ao software Matlab e presente na *Global Optimization Toolbox*, que é um Algoritmo Genético que explora a técnica de otimização heurística, inspirada pela evolução biológica, para a resolução do problema de otimização.

**Exemplo 1** *Considere o sistema chaveado afim*

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (21)$$

em que,  $\sigma(t) \in \mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$  e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conforme descrito no Procedimento 1, ao resolver o Problema de Otimização 1, obtemos a solução ótima local:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,6963 & 0,1545 \\ 0,1545 & 1,4947 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1,5944 & 0,1184 \\ 0,1184 & 1,5533 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1,6873 & 0,1662 \\ 0,1662 & 1,5016 \end{bmatrix}, P_m = \begin{bmatrix} 1,5907 & 0,1333 \\ 0,1333 & 1,4902 \end{bmatrix},$$

$$P_M = \begin{bmatrix} 1,6999 & 0,1397 \\ 0,1397 & 1,5580 \end{bmatrix} \quad e \quad d = \begin{bmatrix} -0,4230 \\ -0,1154 \end{bmatrix}.$$

Também obtemos os escalares  $\ell_0 = 1,0000$ ,  $\ell_1 = 1,2771$ ,  $\ell_2 = 1,6312$ ,  $\ell_3 = 2,0836$  e  $\ell_4 = 2,6613$ . Desse modo, temos definido a região elipsoidal  $\Omega_{\ell_4}$  centrada em  $d$  com volume mínimo  $\text{vol}(\Omega_{\ell_4}) = 5,4508$  u.v. Portanto, pelo Teorema

7, toda solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$  é atraída para um conjunto fracamente invariante em  $\Omega_{\ell_4}$ , isto é, o conjunto atrator do sistema (21) sob chaveamento dwell-time arbitrário está contido no elipsoide  $\Omega_{\ell_4}$ . As Figuras (1)-(2) ilustram a simulação no domínio do tempo para a condição inicial  $x_0 = [4 \ \frac{7}{2}]'$  e chaveamento com dwell-time  $h = 0,2$  segundos.

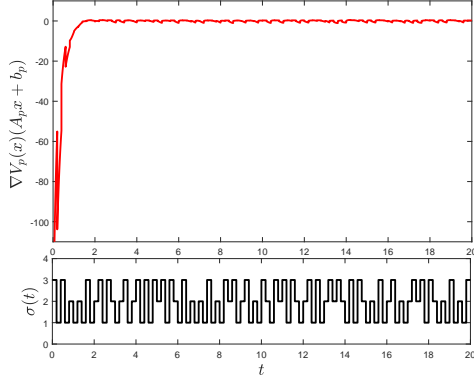


Figura 1: Gráfico da derivada das múltiplas funções auxiliares ao longo da solução do sistema chaveado afim (21) com condição inicial  $x_0 = [4 \ \frac{7}{2}]'$  e do sinal de chaveamento  $\sigma(t)$  com dwell-time  $h = 0,2$  s.

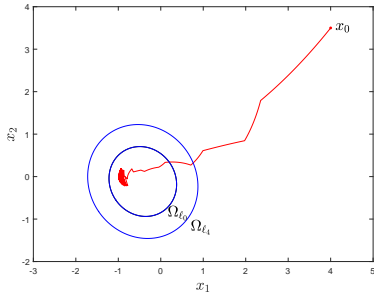


Figura 2: Plano de fase e solução  $\varphi(t, x_0)$  com  $x_0 = [4 \ \frac{7}{2}]'$  e dwell-time  $h = 0,2$  s.

**Exemplo 2** Considere o sistema chaveado afim

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (22)$$

onde,  $\sigma(t) \in \mathcal{P} = \{1,2,3\}$  e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por meio do Problema de Otimização 1 do Teorema (7), obtemos a solução ótima local:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,2532 & 0,3711 & 0,1662 \\ 0,3711 & 1,3136 & 0,2880 \\ 0,1662 & 0,2880 & 1,3113 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,3676 & 0,2708 & 0,2135 \\ 0,2708 & 1,3973 & 0,2551 \\ 0,2135 & 0,2551 & 1,3320 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1,2615 & 0,3620 & 0,1854 \\ 0,3620 & 1,2929 & 0,2880 \\ 0,1854 & 0,2880 & 1,3483 \end{bmatrix},$$

$$P_m = \begin{bmatrix} 1,2474 & 0,3601 & 0,1645 \\ 0,3601 & 1,2925 & 0,2848 \\ 0,1645 & 0,2848 & 1,3107 \end{bmatrix},$$

$$P_M = \begin{bmatrix} 1,3731 & 0,2714 & 0,2000 \\ 0,2714 & 1,3975 & 0,2535 \\ 0,2000 & 0,2535 & 1,3669 \end{bmatrix},$$

$$e d = [ -0,0572 \quad 0,7658 \quad 0,0164 ]'.$$

Também obtemos os escalares  $\ell_0 = 1,0000$ ,  $\ell_1 = 2,0968$ ,  $\ell_2 = 4,3977$ ,  $\ell_3 = 9,2234$ ,  $\ell_4 = 19,3447$ . Desse modo, tem-se definido a região elipsoidal  $\Omega_{\ell_4}$  centrada em  $d$  com volume mínimo  $\text{vol}(\Omega_{\ell_4}) = 19,3447$  u.v.. Portanto, ainda pelo Teorema 7, toda solução  $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$  é atraída para um conjunto fracamente invariante em  $\Omega_{\ell_4}$ , isto é, o conjunto atrator do sistema (22) sob chaveamento dwell-time arbitrário está contido no elipsoide  $\Omega_{\ell_4}$ . As Figuras (3)-(4) ilustram a simulação no domínio do tempo para a condição inicial  $x_0 = [9 \ 4 \ 5]'$  e chaveamento com dwell-time  $h = 0,2$  segundos.

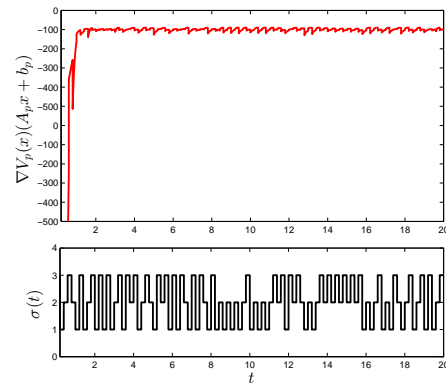


Figura 3: Gráfico da derivada das múltiplas funções auxiliares ao longo da solução do sistema chaveado afim (21) com condição inicial  $x_0 = [9 \ 4 \ 5]'$  e do sinal de chaveamento  $\sigma(t)$  com dwell-time  $h = 0,2$  s.

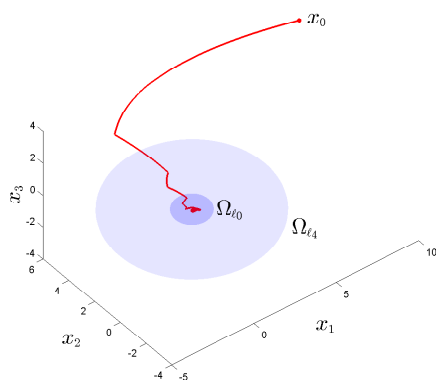


Figura 4: Plano de fase e solução  $\varphi(t, x_0)$  com  $x_0 = [9 \ 4 \ 5]'$  e *dwell-time*  $h = 0,2 \text{ s}$ .

## 5 Conclusão

Este artigo, explora múltiplas funções escalares para estudar comportamento assintótico das soluções dos sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrários. Obtivemos estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins para qualquer chaveamento *dwell-time* adotado em termos de um conjunto de nível elipsoidal. No intuito de ampliar a abrangência dos resultados obtidos neste trabalho, pretende-se, no futuro, abordar uma lei de chaveamento dependente do estado com a finalidade de obter estimativas de atratores mesmo na presença de subsistemas instáveis. Uma abordagem baseada em otimização não linear foi proposta para calcular, garantindo o volume mínimo, estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário. Os resultados numéricos revelaram a efetividade dos resultados teóricos obtidos neste trabalho.

## 6 Agradecimentos

Este trabalho teve apoio parcial da FAPESP - Processo 2014/50851-0 e do CNPq.

## Referências

- Alberto, L., Calliero, T. and Martins, A. (2007). An invariance principle for nonlinear discrete autonomous dynamical systems, Automatic Control, IEEE Transactions on **52**(4): 692–697.
- Bacciotti, A. and Mazzi, L. (2005). An invariance principle for nonlinear switched systems, Systems & Control Letters **54**(11): 1109 – 1119.
- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in

System and Control Theory, Studies in Applied Mathematics, SIAM.

- Branicky, M. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, Automatic Control, IEEE Transactions on **43**(4): 475–482.
- Liberzon, D. (2003). Switching in Systems and Control, Birkhäuser Basel.
- Liberzon, D. and Morse, A. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, Control Systems, IEEE **19**(5): 59–70.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, IEEE Transactions on Automatic Control **54**(2): 308–322.
- Pinto, T., Alberto, L. and Valentino, M. (2018). Uma extensão do princípio de invariancia para sistemas chaveados afins via múltiplas funções auxiliares, Anais do XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (submetido) .
- Rabelo, M. and Alberto, L. (2010). An extension of the invariance principle for a class of differential equations with finite delay, Advances in Difference Equations **2010**(1): 496936.
- Rodrigues, H., Alberto, L. and Bretas, N. (2000). On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization, Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on **47**(5): 730–739.
- Sun, Z. (2005). Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag London.
- Sun, Z. and Ge, S. (2011). Stability Theory of Switched Dynamical Systems, Communications and Control Engineering, Springer London.
- Valentino, M., Faria, F. and V.A., O. (2015). Estimativa de atrator de sistemas chaveados obtida através de múltiplas funções auxiliares, Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, **3**(1).
- Valentino, M., Oliveira, V., Alberto, L. and Azevedo, D. (2012). An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems, Systems & Control Letters **61**(4): 580 – 586.
- Yang, H., Bin, J. and Cocquempot, V. (2014). Stabilization of Switched Nonlinear Systems with Unstable Modes, Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing.