

CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS MULTIAGENTES EM JOGOS GRÁFICOS VIA EQUILÍBRIO CORRELACIONADO

IAGO ZANUTI BIUNDINI*, PAULO AUGUSTO VALENTE FERREIRA*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP, Brasil*

Emails: `iago.biundini@gmail.com`, `valente@dt.fee.unicamp.br`

Abstract— Com a crescente importância de sistemas dinâmicos conectados por redes de comunicação, surgiu a necessidade de rever-se a estrutura de controle no sentido de contemplar tanto objetivos locais (de sistemas individuais) quanto globais (de grupos de sistemas). Este artigo propõe um algoritmo de controle para sistemas dinâmicos multiagentes conectados por redes de comunicações. Diferentemente das abordagens disponíveis na literatura baseadas em Teoria dos Jogos e no conceito de Equilíbrio de Nash, neste artigo adotamos o conceito de Equilíbrio Correlacionado. O resultado é um algoritmo capaz de induzir o comportamento de consenso em missões de sincronização de agentes para estados determinados por um agente líder. O artigo inclui resultados numéricos que ilustram o funcionamento do algoritmo.

Keywords— Sistemas de Controle; Sistemas Multiagentes; Grafos; Teoria dos Jogos; Equilíbrio de Nash; Equilíbrio Correlacionado

Resumo— With the increasing importance of dynamic systems connected by communication networks, it became necessary to restate the structure of the control system, which in these circumstances needs to contemplate both local (of individual systems) and global (of groups of systems) objectives. This paper proposes a control algorithm for multi-agent dynamic systems connected by communication networks. Differently from the approaches available in the literature based on Game Theory and on the concept of Nash Equilibrium, in this paper we adopt the concept of Correlated Equilibrium. The main result is an algorithm capable of inducing a consensus for agents synchronization to states determined by a leader agent. The paper includes numerical results which illustrate the behaviour of the algorithm.

Palavras-chave— Control Systems; Multi-agent Systems; Game Theory; Graphs; Nash Equilibrium; Correlated Equilibrium

1 Introdução

Este artigo aborda o problema de controle de sistemas dinâmicos multiagentes interconectados por uma rede de comunicação com topologia conhecida. A abordagem adotada é *cooperativa*: cada sistema dinâmico (agente) possui estados e dinâmica própria, e o problema então consiste em sintetizar um algoritmo que assegure a convergência dos estados de todos os agentes para valores de consenso. Por meio do sincronismo dos agentes, o sistema passa a se comportar como uma entidade única, apta a realizar tarefas que os agentes individualmente não conseguiriam realizar (Lewis et al., 2013).

Um número crescente de aplicações industriais, militares e civis vêm demandando a coordenação de múltiplos agentes interconectados por redes de comunicações. O controle cooperativo de sistemas multiagentes desperta grande interesse em razão de suas aplicações nas áreas de veículos aéreos não tripulados (Wang et al., 2007), vigilância multipontos (Cruz et al., 2007) e redes de sensores (Chen et al., 2010), entre outras.

Um aspecto fundamental do controle cooperativo de sistemas dinâmicos em rede é a topologia da rede de comunicação, a qual determina as conexões entre os agentes e o comportamento coletivo do sistema em função do fluxo de informação que a rede permite. A rede de comunicação pode ser modelada como um *grafo*, no qual *nós*

representam agentes e *arcos* estabelecem o fluxo de informação possível entre os agentes. A informação flui diretamente apenas entre nós vizinhos imediatos do grafo. Entretanto, se o grafo for *conectado*, informações locais chegarão a qualquer agente representado no grafo.

Dentre as abordagens que têm sido empregadas em controle cooperativo de sistemas multiagentes, destacamos as baseadas em Teoria dos Jogos (Peters, 2015). De acordo com estas abordagens, cada agente, também chamado de *jogador*, seleciona uma ação dentre um certo número de ações possíveis, e então obtém um *retorno* que é função das ações de todos os agentes. O problema de controle de sistemas multiagentes é então modelado como um *jogo gráfico*, e desde que o grafo seja suficientemente conectado, é possível sintetizar algoritmos que assegurem a sincronização e sejam globalmente ótimos para o conjunto dos agentes.

Para tanto, é geralmente adotada a noção de *equilíbrio de Nash*. Um conjunto de ações - uma ação para cada agente - é um equilíbrio de Nash se nenhum agente for capaz de melhorar o seu retorno alterando unilateralmente a sua ação no equilíbrio. A ação de cada agente é, no caso geral, uma ação *mista*, isto é, cada ação *pura* do agente é adotada com uma probabilidade determinada pelo equilíbrio de Nash.

Neste artigo introduzimos a noção de *equilí-*

brío Correlacionado em controle de sistemas multiagentes. Diferentemente do equilíbrio de Nash, no equilíbrio Correlacionado temos a figura de um *mediador*, responsável por determinar e recomendar distribuições de probabilidades para ações conjuntas dos agentes, as quais não se limitam aos produtos de probabilidades que caracterizam as distribuições dos equilíbrios de Nash. Comparativamente aos equilíbrios de Nash, os equilíbrios Correlacionados introduzem novos (e frequentemente) melhores retornos para todos os agentes e são mais facilmente computados por métodos de *otimização linear*.

Os principais objetivos deste trabalho são introduzir a noção de equilíbrio Correlacionado em controle de sistemas multiagentes via jogos gráficos e demonstrar a viabilidade computacional da proposta.

O artigo está organizado em quatro seções. Na Seção 2 apresentamos noções de Teoria dos Jogos e caracterizamos os equilíbrios de Nash e Correlacionado no contexto de jogos gráficos. Na Seção 3 propomos um algoritmo simples que implementa a noção de equilíbrio Correlacionado acompanhado por simulações numéricas. Na Seção 4 apresentamos conclusões gerais sobre o trabalho e temas para pesquisas futuras.

2 Jogos Gráficos

Um *jogo* é uma situação estratégica envolvendo um certo número de entidades chamadas de *jogadores*. Cada jogador seleciona uma ação dentre um certo número de ações possíveis, e então obtém um *retorno* que é função das ações de todos os jogadores (Peters, 2015). Todas as informações relacionadas ao jogo (ações, retornos, ...) são de conhecimento comum de todos os jogadores.

Como exemplo ilustrativo, considere o *jogo do cruzamento* (Peters, 2015), ilustrado na Figura 1. O jogo envolve dois veículos que disputam a passagem por um cruzamento. As ações disponíveis para cada jogador são *atravessar* ou *parar* no cruzamento.

Caso ambos atravessem, ocorrerá uma colisão e retornos mínimos (digamos, -10) para ambos os jogadores. Caso somente um atravesse, este maximizará o seu retorno (digamos, 5), sem prejudicar o retorno do outro jogador (digamos, 0). Caso ambos parem, os jogadores obterão retornos menores (digamos -1), porém maiores do que quando há a colisão.

Distinguimos então dois tipos de ações: *pura*, como atravessar ou parar no cruzamento, ou *mista*, quando a adoção de uma ação pura é definida em probabilidade. Exemplo: atravessar com probabilidade $0,7$, e parar com probabilidade $0,3$. Uma ação mista é uma distribuição de probabilidades sobre as ações puras do jogador.

Estes conceitos básicos podem ser estendidos

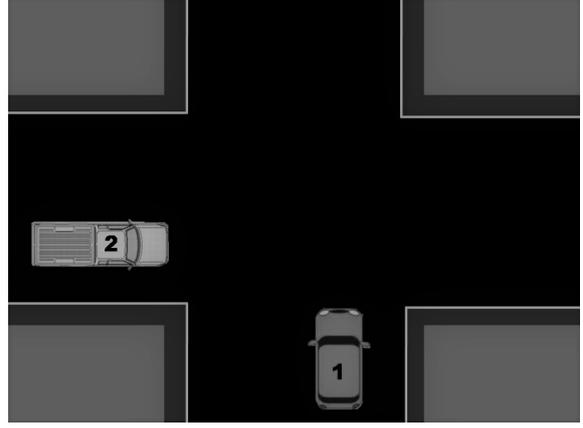


Figura 1: Jogo do Cruzamento.

a qualquer número de jogadores, e como no contexto do presente artigo, as informações diretamente disponíveis para cada jogador podem estar restritas a sua *vizinhança* imediata de jogadores. Identificando-se jogadores com *nós* e a existência de comunicação direta entre jogadores com *arestas*, estabelecemos os chamados *jogos gráficos*

Um *grafo* é um par $\mathcal{G} = (V, E)$, sendo $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de n nós ou vértices e E um conjunto de arestas ou arcos. Cada elemento de E , denotado por (v_i, v_j) , descreve um arco do nó v_i para o nó v_j , e é representado por uma seta com origem em v_i e fim em v_j . A vizinhança do nó i , denotado por N_i , é o subconjunto de nós que se comunicam diretamente com o nó i .

Aos arcos associam-se *pesos* $a_{ij} \geq 0$, e então o grafo pode ser representado por uma *matriz de adjacência* (ou *conectividade*) $A = \{a_{ij}\}$, sendo $a_{ij} > 0$, se $(v_i, v_j) \in E$, e $a_{ij} = 0$, caso contrário. A estrutura da matriz de adjacência (do grafo) determina o fluxo de informações no grafo (Mohar et al., 1991).

Seja A_i o conjunto de ações puras do jogador i . Uma ação conjunta dos n jogadores é denotada pelo vetor $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se $A_i = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $n = 3$, por exemplo, uma possível ação conjunta seria $\vec{a} = (0, 1, 0)$, pela qual o jogador 1 escolhe 0, o jogador 2 escolhe 1 e o jogador 3 escolhe 0.

Um *jogo gráfico* é um par $(\mathcal{G}, \mathcal{M})$, sendo \mathcal{G} um grafo com n nós e \mathcal{M} um conjunto de n matrizes M_i de retornos dos jogadores. Para cada ação conjunta \vec{a} da vizinhança N_i do jogador i , a matriz M_i fornece o retorno $M_i(\vec{a})$ do jogador i . A notação especial $\vec{a}_k^i = a$ representa uma ação conjunta da vizinhança do jogador i na qual o jogador $k \in N_i$ adota a ação pura a .

Como exemplo ilustrativo de jogo gráfico, considere uma extensão do jogo do cruzamento, aqui chamado de *jogo dos múltiplos cruzamentos*, ilustrado na Figura 2.

Associamos os cinco cruzamentos a cinco nós de um grafo. *Semáforos* (jogadores) nos cruza-

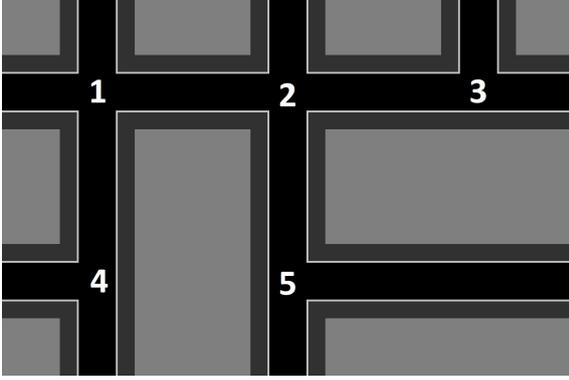


Figura 2: Exemplo de jogo gráfico.

mentos podem permitir fluxos nas direções norte-sul (ação 0) ou nas direções leste-oeste (ação 1). Adotamos as seguintes convenções:

- Ações na vizinhança do nó i que levem a fluxo no nó i no mesmo sentido da ação do nó i adicionam $+1$ ao retorno do jogador i ;
- Ações na vizinhança do nó i que levem a fluxo no nó i no sentido contrário à ação do nó i adicionam -1 ao retorno do jogador i ;
- Ações na vizinhança do nó i que não levem a fluxo no nó i adicionam 0 ao retorno do jogador i .

Na Figura 3, o jogador 2 tem como vizinhança $N_2 = \{1, 2, 3, 5\}$; cada ação conjunta em N_2 é representada por um vetor de quatro componentes. O retorno do jogador 2 para a ação conjunta $(0, 0, 1, 0)$ será $0 - 1 + 1 = 0$. Isto ocorre por que o jogador 1 não leva fluxo ao jogador 2, o jogador 3 leva fluxo no sentido contrário do jogador 2, acumulando veículos na região do jogador 2, o que não é desejado, e o jogador 5 leva fluxo no mesmo sentido do jogador 2.

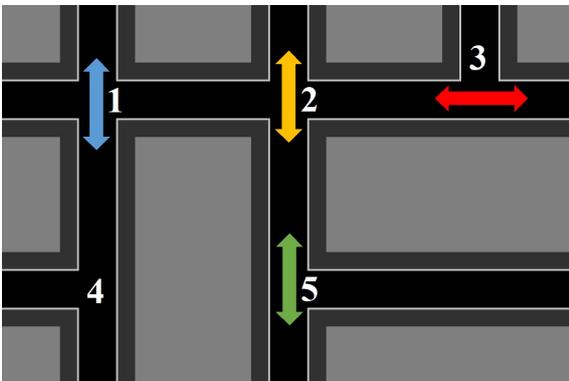


Figura 3: Ação conjunta em N_2 definida por $(0, 0, 1, 0)$.

Embora conveniente para fins de exposição, os conjuntos de ações puras dos jogadores não estão

restritos a $\{0, 1\}$. As ideias expostas neste trabalho podem ser estendidas a conjuntos de ações mais gerais.

2.1 Equilíbrio de Nash

Considere um jogo com n jogadores, no qual o conjunto de ações puras de cada jogador é $\{0, 1\}$, uma ação pura do jogador i é a_i , uma ação conjunta dos n jogadores é $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e os retornos do jogador i são definidos por uma matriz M_i indexada pela ação conjunta \vec{a} . O valor $M_i(\vec{a})$ é o retorno do jogador i resultante da ação \vec{a} . Jogos assim caracterizados são conhecidos como jogos na *forma normal* ou *estratégica*.

Numa ação mista, o jogador i adota a ação 0 com probabilidade $p_i \in [0, 1]$ e a ação 1 com probabilidade $1 - p_i$. Para qualquer ação conjunta mista definida por uma distribuição produto conjunta \vec{p} , o retorno esperado do jogador i é definido por $M_i(\vec{p}) = \mathcal{E}_{\vec{a} \sim \vec{p}}[M_i(\vec{a})]$, em que $\vec{a} \sim \vec{p}$ indica que, de forma independente, cada a_j é 0 com probabilidade p_j e 1 com probabilidade $1 - p_j$.

Adotamos a convenção de que $M_i(\vec{p})$ é o retorno esperado do jogador i , dada a distribuição \vec{p} .

Denote por $\vec{p}[i : p'_i]$ o vetor idêntico a \vec{p} , exceto que a i -ésima componente de \vec{p} é substituída por p'_i . Um *equilíbrio de Nash* do jogo é uma ação conjunta mista \vec{p} tal que

$$M_i(\vec{p}) \geq M_i(\vec{p}[i : p'_i]) \quad (1)$$

para todo jogador i e todo $p'_i \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Num equilíbrio de Nash, cada p_i é a *melhor resposta* do jogador i ao restante do vetor \vec{p} . Dado um jogo na forma normal, o problema de computar um equilíbrio de Nash é essencialmente combinatório, não existindo algoritmos eficientes (isto é, polinomiais) capazes de resolvê-lo.

2.2 Equilíbrio Correlacionado

O *equilíbrio Correlacionado* (Aumann, 1987) introduz um dispositivo externo ao grafo, na forma de um *mediador* que recomenda uma ação conjunta \vec{a} de acordo com uma distribuição de probabilidades P e comunica a cada jogador i apenas a sua componente privada a_i . Um equilíbrio de Nash é o equilíbrio Correlacionado no qual P é definida pela distribuição produto

$$P(\vec{a}) = \prod_i P_i(a_i), \quad (2)$$

sendo P_i a distribuição de probabilidades do jogador i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Um equilíbrio Correlacionado é uma distribuição de probabilidades P sobre ações conjuntas satisfazendo

$$\mathcal{E}_{\vec{a} \sim P_{a_i=a}}[M_i(\vec{a})] \geq \mathcal{E}_{\vec{a} \sim P_{a_i=a}}[M_i(\vec{a}[i : a'])] \quad (3)$$

para todo jogador i e todo $a' \in \{0, 1\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). A esperança é sobre todas as ações nas quais o valor $a_i = a$ é revelado ao jogador i , que efetivamente adota $a_i = a$; $P_{a_i=a}$ é a distribuição condicionada a $a_i = a$.

2.3 Equilíbrio Correlacionado em Jogos Gráficos

O algoritmo para a determinação de equilíbrios correlacionados em jogos gráficos apresentado na Seção 3 assume que o grafo é uma *árvore*. Grafos que não são árvores podem ser pré-processados por algoritmos que os transformam em árvores geradoras mínimas, como o *algoritmo de Prim* (Prim, 1957) e o *algoritmo de Dijkstra* (Dijkstra, 1959), entre outros.

Qualquer distribuição de probabilidades correspondente a um equilíbrio Correlacionado em grafos deve satisfazer três conjuntos de restrições. Nas restrições a seguir, P_i e \vec{a}^i referem-se a qualquer distribuição de probabilidades e a qualquer ação conjunta restritas à vizinhança do jogador i , respectivamente.

O retorno esperado de cada jogador i relativo à ação conjunta \vec{a}^i (no qual o jogador i usa a ação a) deve ser maior ou igual ao obtido quando o jogador i adota qualquer outra ação a' :

$$\sum_{\vec{a}^i : a_i^i = a} (M_i(\vec{a}^i) - M_i(\vec{a}^i[i : a']))P_i(\vec{a}^i) \geq 0, \quad (4)$$

sendo a soma relativa a todas as ações conjuntas na vizinhança do jogador i na qual o jogador i adota $a_i^i = a$.

Para todos os jogadores i e j e para toda ação conjunta \vec{y}^{ij} de i e j na interseção das suas vizinhanças, $N_i \cap N_j$, devemos impor

$$\sum_{\vec{a}^i : \vec{a}^{ij} = \vec{y}^{ij}} P_i(\vec{a}^i) = \sum_{\vec{a}^j : \vec{a}^{ij} = \vec{y}^{ij}} P_j(\vec{a}^j). \quad (5)$$

Finalmente,

$$P_i(\vec{a}^i) \geq 0, \quad \sum_{\vec{a}^i} P_i(\vec{a}^i) = 1. \quad (6)$$

Qualquer solução que respeite as desigualdades (4), (5) e (6) é um equilíbrio Correlacionado do jogo gráfico. Um objetivo conveniente para o problema de determinar um equilíbrio Correlacionado é maximizar o retorno global esperado, isto é, maximizar a função-objetivo

$$\sum_i \sum_{\vec{a}^i} M_i(\vec{a}^i)P_i(\vec{a}^i) \quad (7)$$

sujeito às restrições (4), (5) e (6). O problema de otimização resultante é linear e pode ser resolvido eficientemente mesmo considerando-se grafos com grandes números de nós e arestas.

Equilíbrios Correlacionados do jogo dos múltiplos cruzamentos (Figura 2) são apresentados na

Tabela 1: Equilíbrios Correlacionados do jogo dos múltiplos cruzamentos.

Jogador	Ação Conjunta	Probabilidade
1	(0, 0, 0)	0,5675
	(1,1,1)	0,4325
2	(0, 0, 0, 0)	0,5675
	(1, 1, 1, 1)	0,4325
3	(0, 0)	0,5675
	(1, 1)	0,4325
4	(0, 0)	0,5675
	(1, 1)	0,4325
5	(0, 0)	0,5675
	(1, 1)	0,4325

Tabela 1. As probabilidades das ações conjuntas nas vizinhanças dos jogadores não indicadas são iguais a zero.

Os retornos globais esperados são iguais a 4, o mesmo fornecido (com maior esforço computacional) pelo equilíbrio de Nash. As ações conjuntas nos equilíbrios são intuitivamente justificáveis: sinalizar todos os fluxos no sentido norte-sul ou todos os fluxos no sentido leste-oeste maximiza os retornos de todos os jogadores.

3 Controle de Sistemas Multiagentes em Grafos

Em controle de sistemas multiagentes em grafos, busca-se coordenar os objetivos individuais e do grupo de agentes a partir de informações locais fornecidas pela vizinhança de cada um dos agentes. Consideramos agentes (jogadores) descritos por dinâmicas lineares e invariantes no tempo, na forma geral:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (8)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas do agente; A , B , C e D são matrizes de dimensões apropriadas (Bonatti et al., 2016). Um subíndice i pode ser acrescentado a variáveis e matrizes para especificar o agente i . O estado do agente i então seria $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, e assim por diante. Nas simulações realizadas, consideramos somente sistemas SISO (Single Input - Single Output), isto é, $m = p = 1$.

O algoritmo proposto baseia-se em medidas de variação dos estados dos agentes para o compto das suas matrizes de retornos e para a solução de um jogo gráfico a cada instante de tempo. O algoritmo, descrito no pseudocódigo da Figura 4, envolve a realização de jogos gráficos e a atualização dos estados dos agentes em instantes discretos de tempo.

Inicialmente obtém-se a matriz de retorno $M_i(\vec{a})$ de cada jogador i a partir de uma ação \vec{a}

prevista, dado o estado atual. De posse das matrizes $M_i(\vec{a})$, resolve-se um jogo estático no tempo atual. A escolha da ação tomada pelo jogador é determinada pelo *algoritmo de Roleta* (Lipowski and Lipowska, 2012), um algoritmo para seleção de ações proporcionais às suas probabilidades. As ações determinadas pelo algoritmo de Roleta são implementadas sempre que o erro entre os estados dos jogadores e os valores de consenso a atingir forem maiores do que uma tolerância $\epsilon > 0$ especificada.

Algorithm 2 Algoritmo do Controle Dinâmico Através de Jogos Diferenciais

Entre com os valores dos Estados Iniciais y_0 , v_0 e u_0 .

Calculo do Erro Inicial

Enquanto $Erro > \epsilon$ **Faça**

 Calcule a Matriz M ▷ Calcule as Matrizes de Payoffs para cada jogador

 Realize o Jogo Estático Cooperativo através da Matriz M .

 Escolha as ações através do Algoritmo de Roleta

 Atualize os valores das Variáveis y_{t+1}, v_{t+1} e u_{t+1} através da ação escolhida anteriormente

 Calcule o Novo Erro.

Fim Enquanto

Figura 4: Algoritmo de controle de sistemas multiagentes.

Um equilíbrio de Nash em controle de sistemas multiagentes via jogos gráficos corresponde à melhor ação de cada agente tendo em vista as melhores ações dos agentes na sua vizinhança. Esse comportamento parece ser mais compatível com objetivos individuais de cada agente, não com objetivos globais. De fato, (Lewis et al., 2013) observa que a definição de equilíbrio de Nash pode não conduzir à cooperação dos agentes – o grafo precisa ser *suficientemente* conectado – e introduz a definição de *equilíbrio de Nash iterativo*.

Por outro lado, a definição de equilíbrio Correlacionado estabelece um certo grau de cooperação entre os agentes de cada vizinhança do grafo por meio de um mediador. Como as vizinhanças geralmente possuem interseções, as mediações das vizinhanças tendem a favorecer a obtenção de valores de consenso mais naturalmente.

A seguir aplicaremos o algoritmo ao problema que consiste em evoluir os estados dos agentes para estados de consenso. Detalhes sobre como calcular as matrizes $M_i(\vec{a})$ e atualizar os estados dos agentes são apresentados.

3.1 Consensos de Estados

Considere o grafo formado por cinco agentes ilustrado na Figura 5 (Lewis et al., 2013). A equação

de estado de cada agente é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (9)$$

Observe que embora as dinâmicas dos agentes sejam iguais, cada agente tem acesso apenas aos estados dos seus vizinhos, gerados por diferentes condições iniciais.

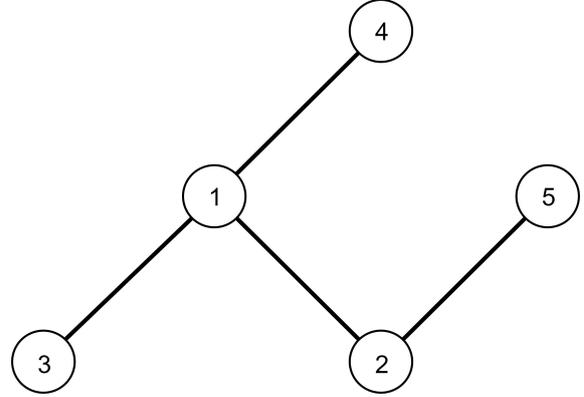


Figura 5: Grafo para controle dinâmico.

O algoritmo é alimentado com os valores iniciais das variáveis de estados (x_{1i}^0 e x_{2i}^0), e da entrada de controle (u_i^0) de cada agente i . Por simplicidade, consideramos duas ações para cada agente: aumentar ou diminuir a entrada de controle u_i .

Dado o objetivo de conduzir todos os agentes para os mesmos estados, determina-se uma distância dos estados atuais do jogador i para os de seus vizinhos (o argumento t é omitido por conveniência de notação):

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^2 \sum_{j \in N_i} |x_{si} - x_{sj}|. \quad (10)$$

Para cada jogador e para cada ação conjunta \vec{a} possível – no exemplo são $2^5 = 32$ ações possíveis – determina-se os estados futuros do sistema $x_{1i}^{\vec{a}}$ e $x_{2i}^{\vec{a}}$. Exemplo: o agente 2 tem como vizinhos $N_2 = \{1, 2, 5\}$. Com a ação $(0, 1, 1)$, o agente 1 diminui u_1 , o agente 2 aumenta u_2 e o agente 5 aumenta u_5 , obtendo-se $x_{12}^{(0,1,1)}$ e $x_{22}^{(0,1,1)}$. A distância entre os estados será

$$\Delta_i^{\vec{a}} = \sum_{s=1}^2 \sum_{j \in N_i} |x_{si}^{\vec{a}} - x_{sj}^{\vec{a}}|. \quad (11)$$

Como o objetivo é diminuir a distância entre os estados, ações que produzem aumento da distância fornecem retornos ruins, enquanto que ações que diminuem a distância fornecem retornos bons. Dessa forma, definimos o retorno da ação \vec{a} para o agente i como

$$M_i(\vec{a}) = \Delta_i - \Delta_i^{\vec{a}} \quad (12)$$

Se $\Delta_i^{\bar{a}} > \Delta_i$, a ação aumenta a distância e tem retorno negativo proporcional ao aumento da diferença. Caso contrário, a ação terá retorno proporcional à diminuição da diferença produzida.

A partir dos cálculos dos retornos, realiza-se um jogo gráfico estático como na seção anterior. Esse jogo retorna um equilíbrio Correlacionado, isto é, uma distribuição de probabilidades para ações conjuntas. Utiliza-se então o algoritmo da Roleta para a determinação das ações puras a serem implementadas.

Com a ação escolhida, cada agente atualiza seus estados a partir do aumento ou diminuição da entrada de controle. Essa atualização é feita proporcionalmente à distância entre os jogadores, de acordo com (reintroduzindo t)

$$u_i(t+1) = u_i(t) \pm G(|\Delta_i(t) - \Delta_i^{\bar{a}}(t)|). \quad (13)$$

O sinal é negativo se a ação escolhida for 0 e positivo se for 1. O ganho proporcional G ajusta a taxa de atualização da entrada de controle. Valores altos de G tendem a produzir consensos mais rápidos, porém também tendem a produzir maiores oscilações nas trajetórias dos sistemas. Nas simulações utilizamos $G = 0,2$. Após a atualização dos estados, retorna-se ao cálculo da matrizes de retornos caso os estados não tenham atingido valores de consenso. Caso contrário, o algoritmo é finalizado.

Na análise anterior, busca-se reduzir a distância dos estados dos agentes para zero, sendo os estados de consenso dependentes somente da estrutura do grafo, dos valores iniciais das variáveis de estado e da entrada de controle. Apesar deste ser um objetivo válido (Lewis et al., 2013) (Nisan et al., 2007), uma especificação mais geral dos estados de consenso pode refletir melhor os objetivos globais do sistema multiagentes.

A introdução de um *nó líder* ou *nó zero*, que pode ser um dos próprios nós do grafo, cumpre esta função. O nó líder pode estar conectado a todos os jogadores ou somente a um subconjunto de jogadores, como ilustrado na Figura 6.

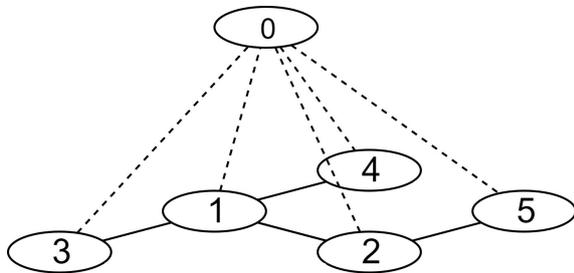


Figura 6: Introdução de um nó líder.

Nos nós pertencentes à vizinhança do nó líder ($i \in N_0$), os cálculos da distância atual e da distância na ação conjunta têm a adição de mais um

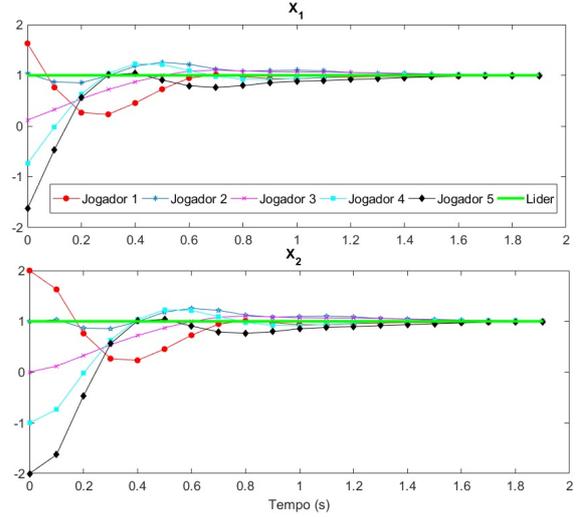


Figura 7: Consenso para trajetória fixa de um nó líder.

termo:

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^2 \sum_{j \in N_i} G_V |x_{si} - x_{sj}| + \sum_{s=1}^2 G_L |x_{si} - x_{s0}|,$$

$$\Delta_i^{\bar{a}} = \sum_{s=1}^2 \sum_{j \in N_i} G_V |x_{si}^{\bar{a}} - x_{sj}^{\bar{a}}| + \sum_{s=1}^2 G_L |x_{si}^{\bar{a}} - x_{s0}|.$$

Os ganhos proporcionais G_V e G_L atuam independentemente no sentido de reduzir a distância entre os agentes e dos agentes ao líder, respectivamente. Quanto maior a relação G_L/G_V , maior a tendência de os agentes na vizinhança do líder adotarem ações que os aproximem da trajetória do líder.

Considerando os sistemas descritos em (9) conectados pelo grafo da Figura 5, e assumindo que apenas o nó 3 está conectado ao líder, que comanda a obtenção de consenso quando ambos os estados são iguais a 1, obtivemos os resultados da Figura 7. Consideramos $G_L/G_V = 1$ e consensos quando as distâncias entre todos os estados de todos os agentes se tornaram menores do que $\epsilon = 0,1$.

Para 50 valores aleatórios de condições iniciais entre -2 e 2 , obtivemos média de $4,53$ [s] para consenso. O algoritmo não foi capaz de gerar consensos quando a noção de equilíbrio Correlacionado foi substituída pela noção de equilíbrio de Nash.

Para testar a robustez do algoritmo na presença de ruído, adicionou-se uma variável aleatória de média zero e desvio padrão $0,01$ às variáveis de estado de cada uma dos agentes. Obtivemos os resultados da Figura 8. As trajetórias dos agentes convergiram com boa precisão para os valores de consenso mesmo na presença de ruído nos estados.

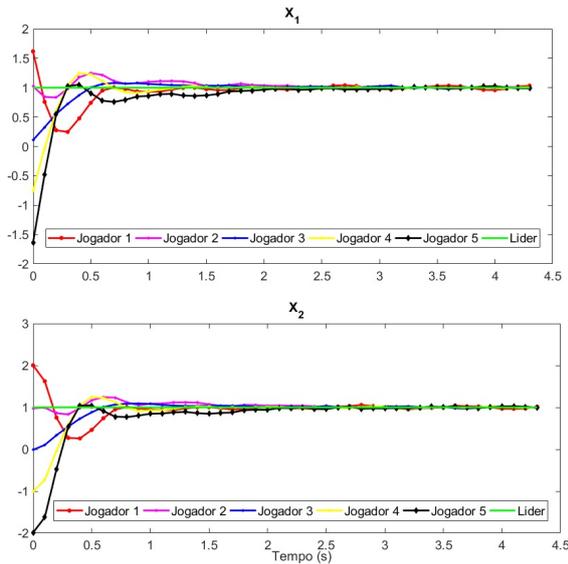


Figura 8: Consenso para valores constantes na presença de ruído nos estados dos agentes.

4 Conclusões

Neste artigo apresentamos uma proposta para controle de sistemas multiagentes fundamentada na Teoria dos Jogos. A principal contribuição do trabalho foi a introdução do conceito de equilíbrio Correlacionado como forma de gerar cooperação entre os agentes.

O equilíbrio Correlacionado é muito mais fácil de ser obtido e apresenta propriedades que o torna mais adequado à ideia de cooperação visando consensos do que o equilíbrio de Nash. Os resultados de simulação apresentados demonstram que a proposta é computacionalmente viável, porém estudos aprofundados envolvendo, entre outros aspectos, caracterizações mais gerais (funcionais) para os retornos dos agentes e análises comparativas entre os equilíbrios para diferentes topologias de redes de comunicações ainda são necessários, e serão temas de nossas pesquisas na linha de controle de sistemas multiagentes.

Agradecimentos

Os autores agradem o apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

Referências

- Aumann, R. J. (1987). Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 1–18.
- Bonatti, I. S., Lopes, A., Peres, P. L. and Aguilhari, C. M. (2016). *Linearidade em sinais e sistemas*, Editora Blucher.

- Chen, J., Cao, X., Cheng, P., Xiao, Y. and Sun, Y. (2010). Distributed collaborative control for industrial automation with wireless sensor and actuator networks, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **57**(12): 4219–4230.
- Cruz, D., McClintock, J., Perteet, B., Orqueda, O. A., Cao, Y. and Fierro, R. (2007). Decentralized cooperative control—a multivehicle platform for research in networked embedded systems, *IEEE control systems* **27**(3): 58–78.
- Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische mathematik* **1**(1): 269–271.
- Lewis, F. L., Zhang, H., Hengster-Movric, K. and Das, A. (2013). *Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches*, Springer Science & Business Media.
- Lipowski, A. and Lipowska, D. (2012). Roulette-wheel selection via stochastic acceptance, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **391**(6): 2193–2196.
- Mohar, B., Alavi, Y., Chartrand, G. and Oellermann, O. (1991). The laplacian spectrum of graphs, *Graph theory, combinatorics, and applications* **2**(871-898): 12.
- Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E. and Vazirani, V. V. (2007). *Algorithmic game theory*, Vol. 1, Cambridge University Press Cambridge.
- Peters, H. (2015). *Game theory: A Multi-leveled approach*, Springer.
- Prim, R. C. (1957). Shortest connection networks and some generalizations, *Bell Labs Technical Journal* **36**(6): 1389–1401.
- Wang, X., Yadav, V. and Balakrishnan, S. (2007). Cooperative uav formation flying with obstacle/collision avoidance, *IEEE Transactions on control systems technology* **15**(4): 672–679.