CÔMPUTO DE CUSTO GARANTIDO $\mathscr{H}_2$ PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS A TEMPO DISCRETO UTILIZANDO REDUNDÂNCIA

ARIÁDNE L. J. BERTOLIN*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, MAURÍCIO C. DE OLIVEIRA†, PEDRO L. D. PERES*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil

†Department of Mechanical and Aerospace Engineering,
University of California San Diego, La Jolla, CA, 92093-0411, USA.

Emails: {ariberto, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br, mauricio@ucsd.edu

Abstract— This work investigates the computation of $\mathscr{H}_2$ guaranteed costs for discrete-time switched linear systems with arbitrary switching. The use of $\kappa-1$ redundant dynamic equations and parameter dependent Lyapunov functions results in sufficient conditions that are progressively less conservative as κ grows. The conditions are formulated in terms of Linear Matrix Inequalities and, if feasible, provide an upper bound (guaranteed cost) for the $\mathscr{H}_2$ norm of the system. Numerical examples, based on models of switched systems borrowed from the literature, illustrate the benefits of the proposed approach, that can be computationally more efficient when compared to other existing techniques.

Keywords— $\mathscr{H}_2$ guaranteed cost, Discrete-time linear systems, Switching systems, Linear matrix inequalities.

Resumo— Este trabalho investiga o cômputo de custos garantidos $\mathscr{H}_2$ para sistemas lineares chaveados a tempo discreto com chaveamento arbitrário. A utilização de $\kappa-1$ equações dinâmicas redundantes e funções de Lyapunov dependentes de parâmetros resulta em condições suficientes que são progressivamente menos conservadoras à medida que κ cresce. As condições são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares e, se factíveis, fornecem um limitante superior (custo garantido) para a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema. Exemplos numéricos, baseados em modelos de sistemas chaveados retirados da literatura, ilustram os benefícios da abordagem proposta, que pode ser computacionalmente mais eficiente quando comparada a outras técnicas existentes.

Palavras-chave— Custo garantido $\mathscr{H}_2$, Sistemas lineares discretos no tempo, Sistemas chaveados, Desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

O desenvolvimento de métodos mais eficazes e eficientes para certificar estabilidade robusta e critérios de desempenho de sistemas dinâmicos são assuntos atrativos para a área de teoria de controle. Nesse contexto, procedimentos baseados em otimização formulados em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), são ferramentas numéricas bastante utilizadas para resolver estes e outros problemas nas áreas de controle e processamento de sinais. Umas das principais motivações é que essa técnica permite afirmar, em alguns casos, a garantia de convergência dos algoritmos e, além disso, está amparada por pacotes computacionais com eficiência comprovada (Gahinet et al., 1995; Löfberg, 2004; Sturm, 1999).

As primeiras condições LMIs suficientes para a estabilidade robusta de sistemas incertos foram publicadas na década de 1980, empregando o conceito chamado de *estabilidade quadrática*, que consiste na busca de uma mesma matriz de Lyapunov para todo o espaço de incertezas considerado. Surgiram, a seguir, extensões da estabilidade quadrática para o cômputo de custo garantido $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$, assim como para a síntese de controladores por realimentação de estados e para o projeto de filtros (Boyd et al., 1994). Com o tempo, diferentes tipos de funções de Lyapunov foram desenvolvidas no sentido de prover condições menos conservadoras, como por exemplo as estruturas afins ou polinomiais (Trofino and de Souza, 2001; Leite and Peres, 2003; Chesi et al., 2005; Trofino et al., 2005; Geromel and Korogui, 2006).

No caso específico de sistemas discretos incertos, alguns resultados baseados em LMIs e funções de Lyapunov com dependência afim foram desenvolvidos para o projeto de ganhos de realimentação de estados (de Oliveira et al., 1999; de Oliveira et al., 2002; Morais et al., 2013) e de filtros dinâmicos de ordem completa (Geromel et al., 2002). Mais recentemente, funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros foram utilizadas para análise e síntese de controladores e filtros (Gao et al., 2005; Oliveira and Peres, 2006; Oliveira and Peres, 2009; Lacerda et al., 2011).

Ainda no contexto de análise de estabilidade, destaca-se uma classe de funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros associada à chamada κ-estabilidade. Apresentada em (de Oliveira et al., 2007; de Oliveira et al., 2010) para o caso discreto invariante no tempo, a κ-estabilidade é baseada em funções de Lyapunov polinomiais construídas a partir da descrição redundante das equações de estado do sistema incerto. Como consequência, a função de Lyapunov envolve a matriz dinâmica do sistema, dependendo polinomialmente do parâmetro incerto com grau proporcional a um inteiro κ associado ao número de equações redundantes. Como demonstrado em (de Oliveira et al., 2010), mesmo para escolhas de matrizes constantes (i.e., independentes do parâmetro) associadas às variáveis de decisão que compõem a função de Lyapunov, há uma redução progressiva do conservadorismo com o aumento de κ, tendendo-se assintoticamente à necessidade.

O problema de análise de estabilidade torna-se mais complexo no caso variante no tempo, como por exemplo em sistemas lineares chaveados a tempo discreto (Athanasopoulos and Lazar, 2014; Deaecto et al., 2015). Sistemas chaveados têm se tornado cada vez mais importantes, pois proporcionam estruturas efetivas na descrição de plantas reais, que apresentam mudanças abruptas na dinâmica, por exemplo, em momentos de falhas, e podem possuir representações puramente discretas ou híbridas (contínuo e discreto coexistindo). Esses modelos podem ser aplicados em diversas áreas da engenharia como mecânica, automotiva e elétrica (por exemplo em conversores de energia) (Liberzon and Morse, 1999; Athanasopoulos and Lazar, 2014; Barbosa and Trofino, 2003; Sun, 2008).

Este trabalho investiga o cômputo de custos garantidos $\mathscr{H}_2$ para sistemas lineares chaveados a tempo discreto com regra de chaveamento arbitrária, baseando-se na descrição redundante das equações de estado do sistema. Os resultados podem ser vistos como uma extensão dos trabalhos de (de Oliveira et al., 2007; de Oliveira et al., 2010) para analisar a estabilidade e o cômputo de custos garantidos $\mathscr{H}_2$ de sistemas chaveados (ou sistemas arbitrariamente variantes no tempo). Condições suficientes na forma de LMIs, parametrizadas em termos de κ (associado ao número de equações redundantes), asseguram a estabilidade robusta e um custo garantido $\mathscr{H}_2$ para essa classe de sistemas. Exemplos numéricos ilustram a eficiência das condições propostas, mostrando que a estratégia pode prover custos garantidos acurados com menor complexidade quando comparada a outras condições da literatura.

Notação

O símbolo $\otimes$ é utilizado para denotar o produto de Kronecker. As matrizes identidade e nula de dimensão n são indicadas por I_n e 0_n, respectivamente. A transposta de uma matriz é indicada por $(\cdot)^T$. O conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^+$, excluindo-se o zero), e o dos números reais por $\mathbb{R}$.

2 Definição do problema

Considere o sistema linear chaveado a tempo discreto

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}w(k), \tag{1}$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}w(k) \tag{2}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas.

O subíndice $\sigma(k)$ identifica em qual modo de operação o sistema está operando no instante k, podendo assumir os valores do conjunto $\{1,\dots,N\}$, que define o número de modos do sistema. Assim, as matrizes do sistema $(A_{\sigma(k)},B_{\sigma(k)},C_{\sigma(k)},D_{\sigma(k)})$ assumem valores conhecidos para cada modo $\sigma(k) = i$, $i \in \{1,\dots,N\}$, no conjunto

$$\{(A_1,B_1,C_1,D_1),\dots,(A_N,B_N,C_N,D_N)\}$$

para todo $k \geq 0$. Assume-se que $\sigma(k+1)$ não depende de $\sigma(k)$, i.e., o sistema chaveado pode variar arbitrariamente de k para $k+1$.

O objetivo deste trabalho é investigar o uso de uma forma especial de construção da função de Lyapunov aplicada em sistemas chaveados, para o cálculo de um limitante da norma $\mathscr{H}_2$ do sistema (1)-(2).

3 Preliminares

Alguns resultados utilizados no trabalho são reproduzidos nesta seção.

O lema apresentado a seguir, proposto em (Bliman and Ferrari-Trecate, 2003), estabelece condições para a estabilidade exponencial uniforme da dinâmica do sistema (1)-(2) (i.e., quando $w(k) = 0$).

Lema 3.1 *A estabilidade exponencial uniforme de* (1)-(2) *é equivalente à existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados $V(x(k))$, tal que ao longo das trajetórias de* (1) $\forall k \geq 0$ *e* $x(k) \neq 0$,

$$V(x(k)) > 0, \tag{3}$$

$$V(x(k+p)) - V(x(k)) < 0 \tag{4}$$

para algum $p \in \mathbb{N}$.

Uma condição para o cômputo de um limitante da norma $\mathscr{H}_2$ para sistemas lineares discretos variantes no tempo é dada no próximo lema (De Caigny et al., 2010).

Lema 3.2 *O sistema chaveado* (1)-(2) *é exponencialmente assintoticamente estável e γ é um limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ se existir uma matriz de Lyapunov $P_{\sigma(k)} = P_{\sigma(k)}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que*

$$Tr(B_{\sigma(k)}^T P_{\sigma(k+1)} B_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)}) \leq \gamma^2 \tag{5}$$

$$A_{\sigma(k)}^T P_{\sigma(k+1)} A_{\sigma(k)} - P_{\sigma(k)} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0 \tag{6}$$

Note que com a escolha de $p = 1$ no Lema 3.1 e $V(x(k)) = x(k)^T P_{\sigma(k)} x(k)$, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$, a restrição (6) pode ser obtida a partir da condição

$$\Delta V(x(k)) + y(k)^T y(k) < 0 \tag{7}$$

para todo $x(k) \neq 0$, com $w(k) = 0$ em (1)-(2). O resultado, no entanto, depende da escolha da estrutura da matriz de Lyapunov $P_{\sigma(k)}$. Em (Lee and Khargonekar, 2008), foi mostrado que a condição do Lema 3.2 torna-se também necessária para

$$P_{\sigma(k)} = P_{i_1,i_2,\dots,i_M} \tag{8}$$

com $i_1,i_2,\dots,i_M \in \{1,\dots,N\}$ para um $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. A escolha $M = 0$ reproduz o resultado conhecido como cálculo do custo garantido

$\mathscr{H}_2$ baseado na estabilidade quadrada (Peres and Geromel, 1993; Boyd et al., 1994). O principal inconveniente da estrutura proposta por (Lee and Khargonekar, 2008) é o aumento exponencial do número de variáveis à medida que M cresce.

Na próxima seção, propõe-se uma estratégia para a construção de uma matriz de Lyapunov $P_{\sigma(k)}$ baseada em equações de estado redundantes.

4 Custo garantido $\mathscr{H}_2$ com redundância

Considere $(\kappa - 1)$ equações dinâmicas redundantes para o sistema (1)-(2) (com as entradas $w(k)$ zeradas)

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & 0_n & \cdots \\ 0_n & A_{\sigma(k+1)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & A_{\sigma(k+\kappa-1)} \end{bmatrix} \xi(k) \quad (9)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{\sigma(k)} & 0_{(\kappa-1)p\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{C}_{\kappa,\sigma(k)}} \xi(k) \quad (10)$$

com

$$\xi(k)^T = \begin{bmatrix} x(k)^T & \cdots & x(k+\kappa-1)^T \end{bmatrix}$$

sendo que $\{A_{\sigma(k)}, A_{\sigma(k+1)}, \ldots, A_{\sigma(k+\kappa-1)}\}$ representam as matrizes dinâmicas nos instantes de k a $k+\kappa$. O Teorema 4.1 apresenta condições suficientes para o cálculo do custo garantido $\mathscr{H}_2$ do sistema original (1)-(2) a partir da descrição redundante (9)-(10).

Teorema 4.1 *O sistema* (9)-(10) *é exponencial assintoticamente estável e γ é um limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ se, para algum $\kappa \in \mathbb{N}^+$, existir uma matriz $P_\kappa = P_\kappa^T \in \mathbb{R}^{\kappa n\times\kappa n}$ tal que*

$$Tr\big(D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}^T \boldsymbol{A}_{\kappa-1,k+1}^T P_\kappa \boldsymbol{A}_{\kappa-1,k+1} B_{\sigma(k)}\big) \le \gamma^2 \quad (11)$$

$$\boldsymbol{A}_{\kappa,k}^T Q_\kappa \boldsymbol{A}_{\kappa,k} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0 \quad (12)$$

$$\boldsymbol{A}_{\kappa-1,k}^T P_\kappa \boldsymbol{A}_{\kappa-1,k} > 0 \quad (13)$$

$$\boldsymbol{A}_{\kappa,k} = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{\sigma(k)} \\ A_{\sigma(k+1)}A_{\sigma(k)} \\ \vdots \\ A_{\sigma(k+\kappa-1)}\cdots A_{\sigma(k)} \end{bmatrix},$$

$$Q_\kappa = -(L_\kappa^T \otimes I_n)P_\kappa(L_\kappa^T\otimes I_n)^T + (R_\kappa^T\otimes I_n)P_\kappa(R_\kappa^T\otimes I_n)^T$$

sendo $L_\kappa = \begin{bmatrix} I_\kappa & 0_{\kappa\times 1}\end{bmatrix}$, $R_\kappa = \begin{bmatrix} 0_{\kappa\times 1} & I_\kappa\end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{A}_{0,k} = I_n$.

Além disso, se as condições forem factíveis para um dado $\bar{\kappa}$ e um custo $\bar{\gamma}$, então sempre existe solução para $\kappa > \bar{\kappa}$ com $\gamma \le \bar{\gamma}$.

Prova: Considere $\kappa \in \mathbb{N}^+$ e $V(\xi(k)) = \xi(k)^T P_\kappa \xi(k)$, $P_\kappa = P_\kappa^T \in \mathbb{R}^{\kappa n\times\kappa n}$ uma função de Lyapunov para o sistema aumentado (9)-(10). Impondo-se a condição (7), tem-se

$$\xi(k+1)^T P_\kappa \xi(k+1) - \xi(k)^T P_\kappa \xi(k) + \xi(k)^T \mathscr{C}_{\kappa,\sigma(k)}^T \mathscr{C}_{\kappa,\sigma(k)} \xi(k) < 0 \quad (14)$$

que pode reescrita, substituindo-se as redundâncias criadas, como

$$x(k)^T(\mathbf{A}_{\kappa,k}^T Q_\kappa \mathbf{A}_{\kappa,k} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)})x(k) < 0$$

Realizando-se as mesmas substituições na função de Lyapunov, tem-se

$$V(\xi(k)) = \xi(k)^T P_\kappa \xi(k) = x(k)^T \underbrace{A_{\kappa-1,k}^T P_\kappa A_{\kappa-1,k}}_{\mathscr{P}_{\kappa,\sigma(k)}} x(k) > 0$$

e portanto a imposição de que a função $V(\cdot)$ seja positiva é dada pela restrição (3). A condição (11) é obtida diretamente da substituição de $\mathscr{P}_{\kappa,\sigma(k+1)}$ na condição do traço do Lema 3.2. Finalmente, note que a condição (12) pode ser reescrita como

$$A_{\sigma(k)}^T \underbrace{\big(\mathbf{A}_{\kappa-1,k+1}^T P_\kappa \mathbf{A}_{\kappa-1,k+1}\big)}_{\mathscr{P}_{\kappa,\sigma(k+1)}} A_{\sigma(k)} - \underbrace{\big(\mathbf{A}_{\kappa-1,k}^T P_\kappa \mathbf{A}_{\kappa-1,k}\big)}_{\mathscr{P}_{\kappa,\sigma(k)}} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0 \quad (15)$$

que recupera a condição (6) usando-se a matriz de Lyapunov $\mathscr{P}_{\kappa,\sigma(k)}$. Para provar o não crescimento monotônico do custo à medida que κ cresce, note que se existe P_κ tal que $\mathbf{A}_{\kappa,k}^T Q_\kappa \mathbf{A}_{\kappa,k} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0$, sempre existe a escolha particular

$$P_{\kappa+1} = \begin{bmatrix} P_\kappa & 0_n \\ 0_n & \varepsilon I_n \end{bmatrix},$$

para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\mathbf{A}_{\kappa+1,k}^T Q_{\kappa+1} \mathbf{A}_{\kappa+1,k} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} = \mathbf{A}_{\kappa,k}^T Q_\kappa \mathbf{A}_{\kappa,k} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} + \mathscr{O}(\varepsilon) I_n < 0$$

e o mesmo ocorre com as demais condições do Teorema 4.1. Portanto, se houver factibilidade das condições para κ haverá também para $\kappa+1$ e o custo garantido γ será no máximo igual ao anterior à medida que κ cresce. □

Analisando o caso $\kappa = 1$ (ou seja, sem equações redundantes), com $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tem-se

$$\mathbf{A}_{1,k} = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{\sigma(k)} \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix},$$

$$\xi(k)^T = \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k+1)^T \end{bmatrix},$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} + \xi(k)^T [C_{\sigma(k)} \quad 0]^T [C_{\sigma(k)} \quad 0] \xi(k)$$
$$= x(k+1)^T P_1 x(k+1) - x(k)^T P_1 x(k) + x(k)^T C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} x(k)$$
$$= x(k)^T \left(A_{\sigma(k)}^T P_1 A_{\sigma(k)} - P_1 + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)}\right) x(k) < 0.$$

Da mesma forma, aplicando a condição (12), tem-se

$$\begin{bmatrix} I_n \\ A_{\sigma(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{\sigma(k)} \end{bmatrix} + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0$$

ou ainda

$$A_{\sigma(k)}^T P_1 A_{\sigma(k)} - P_1 + C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} < 0,$$

que é a condição conhecida como estabilidade quadrática (matriz constante de Lyapunov) aplicada à desigualdade (6) do Lema 3.2.

5 Exemplos

Nesta seção, o Teorema 4.1 é utilizado para computar custos garantidos $\mathscr{H}_2$ para sistemas chaveados retirados de artigos da literatura (arbitrando-se as matrizes da equação de saída e da entrada quando necessário). Os resultados são comparados com as condições baseadas em funções de Lyapunov dependentes de caminho propostas em (Lee and Khargonekar, 2008), com matriz de Lyapunov como em (8), que são suficientes e (assintoticamente) necessárias para um tamanho de caminho (parametrizado em M) grande o bastante.

No intuito de realizar a comparação dos resultados, buscou-se, primeiramente, obter um sistema chaveado que fosse quadraticamente estável e, portanto, que produzisse soluções factíveis para todo M e κ. Para isso, as matrizes $A_{\sigma(k)}$, que descrevem as dinâmicas dos modos do sistema, foram multiplicadas por um escalar $\rho > 0$ e o mesmo foi aumentado até o limite da estabilidade quadrática.

Os números de variáveis escalares para cada método (em termos do número de estados n, número de modos N, e dos parâmetros M e κ) são dados por

$$V_{\text{LK08}} = N^M \left(n \frac{(n+1)}{2} \right) + 1,$$
$$V_{\text{T4.1}} = \left((\kappa n) \frac{(\kappa n+1)}{2} \right) + 1.$$

Os números de linhas de LMI são iguais para os dois métodos (note que M começa em 0 e κ começa em 1, situações que correspondem à estabilidade quadrática), da seguinte forma

$$L_{\text{LK08}} = nN^M(1+N) + N^{(M+1)},$$
$$L_{\text{T4.1}} = nN^{\kappa-1}(N+1) + N^{\kappa}$$

Com as expressões anteriores, percebe-se que o número de LMIs, para ambos os casos, e o de variáveis para o caso LK08, cresce de forma exponencial, enquanto no T4.1 o número de variáveis tem crescimento polinomial, o que pode ser muito vantajoso no tratamento de sistemas com um número grande de modos.

Algo interessante a se notar é que tanto o método LK08 quanto as condições do Teorema 4.1 asseguram que com o aumento de M e κ os limitantes obtidos não podem ser maiores do que os anteriores. Além disso, se houve solução para um certo κ (M), sempre haverá solução para κ (M) maior.

A programação das condições do Teorema 4.1 em termos de LMIs finitas pode ser realizada testando-se as desigualdades para todos os valores de $\{\sigma(k), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+\kappa)\} \in \{1, \ldots, N\}^{\kappa+1}$. A implementação foi realizada no Matlab-2014a usando o parser Yalmip (Löfberg, 2004) e o solver Mosek 8, em um computador com o sistema operacional Ubuntu 16.04.3.

Exemplo 1

As matrizes dinâmicas, retiradas de (Parrilo and Jadbabaie, 2008), são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 9 \\ 4 & -9 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As demais matrizes, construídas aleatoriamente com números inteiros no conjunto $\{0, 1, 2\}$, são dadas por

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os resultados são exibidos na Tabela 1, que mostra os valores de γ, o número de linhas de LMI (L) e de variáveis (V) obtidos com LK08 e T5.1.

Neste exemplo, $\rho = 0.0949$ foi o maior valor encontrado que assegura a factibilidade da estabilidade quadrática (e, portanto, soluções para todos os κ e M). Note que os números de linhas de LMIs são idênticos e os valores de custo garantido γ são muito semelhantes quando $\kappa = M-1$. Por outro lado, para $\kappa \geq 3$, T5.1 utiliza um número menor de variáveis escalares quando comparado ao apresentado por LK08.

Tabela 1: Custos garantidos γ obtidos pelos métodos LK08 e T5.1 para o Exemplo 1, com o número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V).

$(\kappa/M-1)$	T4.1		LK08		
	γ	V	γ	V	L
1	144.5416	11	144.5416	11	19
2	19.6553	37	19.6553	31	57
3	19.5112	79	19.5111	91	171
4	19.4855	137	19.4855	271	513

Exemplo 2

As matrizes dinâmicas, retiradas de (Ahmadi et al., 2014), são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -1 \\ 8 & -1 & -16 \\ -8 & 0 & 17 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 9 & -14 \\ 1 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 16 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 14 & 1 & 0 \\ -15 & -8 & -12 \\ -1 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 16 & 3 \\ 16 & 11 & 14 \end{bmatrix},$$

e as demais foram escolhidas como

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que foi apresentado no exemplo anterior, $\rho = 0.0440$ foi utilizado (multiplicando-se as matrizes dinâmicas) para gerar um sistema quadraticamente estável. Os resultados são apresentados na Tabela 2, sendo que neste exemplo o número de variáveis escalares utilizado em LK08 é maior a partir de $\kappa = 2$.

6 Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas condições LMIs para o cálculo de um limitante superior da norma $\mathscr{H}_2$ para sistemas lineares chaveados no tempo com chaveamento arbitrário. As condições foram obtidas explorando as equações de estado redundantes, parametrizadas em termos de um inteiro κ (associado à redundância), tornando-se mais cada vez mais precisas

Tabela 2: Custos garantidos γ obtidos pelos métodos LK08 e T5.1 para o Exemplo 2, com o número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V).

$(\kappa/M-1)$	T4.1		LK08		
	γ	V	γ	V	L
1	44.4658	7	44.4658	7	19
2	14.8331	22	14.7631	25	76
3	14.5952	46	14.5948	97	304
4	14.5947	79	14.5946	385	1216

com o aumento de κ. Os resultados equiparam-se em termos de acurácia aos fornecidos por condições (assintoticamente) necessárias e suficientes da literatura, demandando, muitas vezes, um número menor de variáveis escalares para prover o mesmo custo garantido (dentro de uma certa precisão). A prova da necessidade das condições encontra-se em investigação.

Agradecimentos

Apoiado pelas agências brasileiras: CNPq, CAPES e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (processos 2016/22020-1 e 2017/18785-5).

Referências

Ahmadi, A. A., Jungers, R. M., Parrilo, P. A. and Roozbehani, M. (2014). Joint spectral radius and path-complete graph Lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization* **52**(1): 687–717.

Athanasopoulos, N. and Lazar, M. (2014). Alternative stability conditions for switched discrete time linear systems, *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, pp. 6007–6012.

Barbosa, K. A. and Trofino, A. (2003). Síntese $\mathscr{H}_\infty$ para sistemas com restrições algébricas no estado, *SBA: Controle & Automação* **14**(3): 254–261.

Bliman, P.-A. and Ferrari-Trecate, G. (2003). Stability analysis of discrete-time switched systems through Lyapunov functions with nonminimal state, *Proceedings of the IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'03)*, Saint-Malo, Brittany, France, pp. 325–329.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. and Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3): 365–370.

De Caigny, J., Camino, J. F., Oliveira, R. C. L. F., Peres, P. L. D. and Swevers, J. (2010). Gain-scheduled $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ control of discrete-time polytopic time-varying systems, *IET Control Theory & Applications* **4**(3): 362–380.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002). Extended $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.

de Oliveira, M. C., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2007). Schur stability of polytopic systems through positivity analysis of matrix-valued polynomials, *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 6322–6327.

de Oliveira, M. C., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2010). A new method for robust Schur stability analysis, *International Journal of Control* **83**(10): 2181–2192.

Deaecto, G. S., Souza, M. and Geromel, J. C. (2015). Discrete-time switched linear systems state feedback design with application to networked control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **60**(3): 877–881.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Math Works, Natick, MA.

Gao, H., Lam, J., Xie, L. and Wang, C. (2005). New approach to mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ filtering for polytopic discrete-time systems, *IEEE Transactions on Signal Processing* **53**(8): 3183–3192.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. and Bernussou, J. (2002). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(3): 700–711.

Geromel, J. C. and Korogui, R. H. (2006). Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(12): 1984–1989.

Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2011). Robust $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Processing* **91**(5): 1115–1122.

Lee, J.-W. and Khargonekar, P. P. (2008). Optimal output regulation for discrete-time switched and Markovian jump linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **47**(1): 40–72.

Leite, V. J. S. and Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust $\mathscr{D}$-stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(3): 500–504.

Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine* **19**(5): 59–70.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.

Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2013). Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter, *Proceedings of the 2013 American Control Conference*, Washington, DC, USA, pp. 3876–3881.

Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2006). LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, *Systems & Control Letters* **55**(1): 52–61.

Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2009). Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design, *Automatica* **45**(11): 2620–2626.

Parrilo, P. A. and Jadbabaie, A. (2008). Approximation of the joint spectral radius using sum of squares, *Linear Algebra and Its Applications* **428**(10): 2385–2402. Special Issue on the Joint Spectral Radius: Theory, Methods and Applications.

Peres, P. L. D. and Geromel, J. C. (1993). $\mathscr{H}_2$ control for discrete-time systems: optimality and robustness, *Automatica* **29**(1): 225–228.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11**(1–4): 625–653. `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`.

Sun, Z. (2008). A note on marginal stability of switched systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(2): 625–31.

Trofino, A., Coutinho, D. F. and Barbosa, K. A. (2005). Improved $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems, *SBA: Controle & Automação* **16**(4): 427–434.

Trofino, A. and de Souza, C. E. (2001). Biquadratic stability of uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(8): 1303–1307.