

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE ALGORITMOS PARA DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS ELÉTRICOS COM DISTORÇÕES HARMÔNICAS

TATIANA DE ALMEIDA PRADO*, GIOVANNI ALFREDO GUARNERI*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Via do Conhecimento, Km 1
Pato Branco, PR, Brasil

Emails: tatiana.neske@gmail.com, giovanni@utfpr.edu.br

Abstract— Sparse decomposition has proved to be effective in many signal processing applications. The utilization of this technique needs a proper dictionary and an atomic decomposition algorithm. Several algorithms have been proposed in the literature, but the performance of each them is conditioned to the application. Thus, it is necessary to identify the more suitable for assessment of harmonics in signals of power systems. This paper presents a comparative analysis of the performances of the Greedy Pursuit and Convex Relaxation algorithms for to realize sparse signal decomposition over dictionary constructed from basis function of Discrete Cosine and Sine Transforms. The algorithms OMP, BP-ADMM, LASSO-ADMM, FISTA, and SpaRSA, was tested using a synthetic signal with harmonic distortion added by white Gaussian noise, according to the number of iterations until convergence, sparsity, and reconstruction error. All the algorithms found an approximate solution. The BP-ADMM had better signal reconstruction, and the OMP had performed better in the identification of harmonics components as well as in sparsity of results.

Keywords— Signal processing, Iterative algorithms, Harmonic analysis, Greedy algorithms, Convex optimization, Signal reconstruction.

Resumo— A *decomposição esparsa* tem se mostrado eficaz em muitas aplicações de processamento de sinais. A utilização dessa técnica depende de um dicionário adequado com as características dos sinais processados e um algoritmo para realizar a decomposição atômica. Diversos algoritmos são propostos na literatura, porém o desempenho de cada um está condicionado a aplicação. Portanto, é necessário identificar o algoritmo mais adequado à análise harmônica em sinais de sistemas elétricos. Este trabalho apresenta uma análise comparativa do desempenho de algoritmos baseados em *Greedy Pursuit* e em *Relaxação Convexa* para efetuar a decomposição esparsa de sinais elétricos com distorções harmônicas, utilizando um dicionário formado por funções-base das Transformadas Discretas de Cosseno e de Seno. Os algoritmos OMP, BP-ADMM, LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA foram testados na decomposição de um sinal sintético contendo três componentes harmônicos e adicionado de ruído branco gaussiano. Os critérios de desempenho avaliados foram: o número de iterações até a convergência, a esparsidade da resposta e o erro de reconstrução. Todos os algoritmos encontram uma solução aproximada adequada. O BP-ADMM resulta na melhor reconstrução do sinal e o OMP se destaca pelo desempenho na identificação dos componentes harmônicos e pela esparsidade do resultado.

Palavras-chave— Processamento de sinais, Algoritmos Iterativos, Análise harmônica, Algoritmos Greedy, Otimização convexa, Reconstrução de sinais.

1 Introdução

As distorções harmônicas são comuns nos sistemas elétricos de potência e ocorrem devido a operação normal de dispositivos e cargas não lineares ligadas ao sistema. Essas distorções causam impactos negativos como superaquecimento de equipamentos e condutores, operação prematura ou falhas em dispositivos de proteção, ressonância harmônica, erros de medição e outros (IEEE, 2009). A identificação dos componentes harmônicos permite a implantação de medidas corretivas para controlar os níveis de harmônicos dentro de limites aceitáveis.

A medição dos harmônicos em sistemas elétricos é regulamentada pela *International Electrotechnical Commission* com a norma IEC 61000-4-7 (Commission, 2006), também adotada no Brasil pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Essa norma estabelece que os sinais analógicos de tensão ou corrente devem ser amostrados e são processados pela *Transformada Discreta*

de Fourier (do original *Discrete Fourier Transform* - DFT). Entretanto, a DFT apresenta alguns inconvenientes: (I) resolução de frequência limitada pelo tamanho da janela; (II) o espectro é espelhado em relação a frequência zero; (III) componentes de frequência fora da grade causam fuga espectral (*spectral leakage*) e; (IV) é sensível ao ruído.

Alguns métodos buscam melhorar os resultados obtidos pela DFT. Um método algébrico para estimar a amplitude e frequência correta de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais com *flicker* é proposto em (Lin, 2016). Nesse método, os coeficientes extraídos pela DFT são utilizados para calcular o desvio de frequência em função da distribuição de energia no espectro. Sun et al. (2016) apresentam um algoritmo que identifica os picos no espectro obtidos pela DFT, separando o conteúdo espectral referente a cada pico e calculando a amplitude, frequência e fase de cada componente harmônico identificado. A medição do conteúdo harmônico é adequada, mas é ne-

cessário limitar o número de componentes a serem identificados, devido a carga computacional do algoritmo. Achlerkar et al. (2017) propõem a utilização da técnica *Variational Mode Decomposition* (VMD), que decompõe o sinal de entrada em um número discreto de elementos, analisando cada elemento em torno da sua frequência principal. Esse método pode estimar componentes espectrais variantes no tempo, mas precisa da determinação de parâmetros específicos.

Nos últimos anos, várias aplicações em processamento de sinais têm utilizado a técnica de *Decomposição Esparsa de Sinais* (do original *Sparse Signal Decomposition* - SSD) com *Dicionários Híbridos Sobrecompletos* (do original *Overcomplete Hybrid Dictionary* - OHD). Alguns exemplos de aplicação são a detecção e classificação de sinais modulados (Mohanty et al., 2015); análise de sinais biomédicos como eletrocardiograma (ECG) e eletroencefalograma (EEG) (Satija et al., 2017; Yuan et al., 2014); entre outras aplicações.

Recentemente, essa técnica foi utilizada em dois trabalhos envolvendo sinais com distúrbios de qualidade de energia (QE) em sistemas elétricos de potência: (I) para compressão e filtragem desses sinais (Manikandan, Kamwa and Samantaray, 2015) e; (II) na detecção e análise dos distúrbios de QE (Manikandan, Samantaray, Kamwa and Member, 2015). Ambos utilizam um OHD composto por três matrizes: (I) uma matriz de impulsos; (II) uma matriz composta por sinais básicos da *Transformada Discreta de Cossenos* (do original *Discrete Cossine Transform* - DCT) e; (III) outra pela *Transformada Discreta de Senos* (do original *Discrete Sine Transform* - DST). Essa técnica apresentou resultados melhores quando comparada com os métodos baseados nas *Transformadas Wavelet* (do original *Wavelet Transform* - WT) e na DCT.

O sucesso da aplicação dessa técnica depende, além de um dicionário adequado, de um algoritmo para realizar a decomposição dos sinais de entrada (Tropp et al., 2010). Diversos algoritmos são propostos com o objetivo de resolver esse problema, e podem ser divididos em duas abordagens distintas (Tropp et al., 2010): *Greedy Pursuit* (GP) e *Relaxação Convexa* (RC). Os algoritmos baseados em GP realizam a decomposição iterativamente, buscando sucessivamente o componente do dicionário que tem o maior produto interno com o resíduo do sinal. Os métodos baseados em RC tratam a decomposição esparsa como um problema de otimização convexa utilizando a norma ℓ_1 , que pode ser solucionado por estratégias de programação linear clássica.

Nesse trabalho é apresentada uma análise comparativa do desempenho de alguns algoritmos para a estimação de componentes harmônicos em sinais elétricos, utilizando a técnica SSD com OHD. As características dos algoritmos que

serão comparadas são: (I) quantidade de iterações necessárias até que uma solução seja encontrada; (II) a esparsidade da solução obtida; e (III) erro entre o sinal padrão de teste e a solução estimada. A Seção 2 contém: (I) o método de decomposição esparsa; (II) a metodologia para a construção do OHD e; (III) os algoritmos implementados nesse estudo comparativo. A Seção 3 mostra e discute os resultados obtidos com a aplicação dos algoritmos em um sinal sintético de tensão com distorções harmônicas. Na Seção 4 são apresentadas as conclusões.

2 Método

As técnicas de SSD são baseadas no modelo matemático descrito pela Eq. (1), em que um sinal $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ é composto por uma combinação linear de R colunas de uma matriz $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, chamada de *dicionário*. As colunas do dicionário podem ser formas de onda elementares ou funções-base de transformadas e são chamadas *átomos* (Elad, 2010).

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \sum_{r=1}^R x_r \phi_r. \quad (1)$$

Assim, \mathbf{x} é um vetor de coeficientes que representa o sinal \mathbf{y} , em relação ao dicionário Φ . Essa representação é dita *esparsa* se $R \ll M$ (Elad, 2010). Dependendo da quantidade de colunas no dicionário, ele pode ser *incompleto* ($M < N$), *completo* ($M = N$) e *sobrecompleto* ou *redundante* ($M > N$) (Kathirvel et al., 2011).

2.1 Decomposição Esparsa de Sinais

A decomposição esparsa é a busca dos coeficientes \mathbf{x} a partir do sinal \mathbf{y} e de um dicionário sobrecompleto Φ . Nessa situação, a Eq.(1) é um sistema linear subdeterminado em que existem infinitas soluções. Dessa forma, é necessária a aplicação de alguma restrição para que se tenha uma solução única aproximada (Tropp et al., 2010). Nesse caso, é utilizada a restrição de *esparsidade*, em que se espera uma solução $\hat{\mathbf{x}}$ aproximada com poucos coeficientes diferentes de zeros. Nesse sentido, a decomposição esparsa é definida como o seguinte problema de otimização (Elad, 2010):

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ sujeito a } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (2)$$

em que $\|\mathbf{x}\|_0$ representa a “norma” l_0 do vetor \mathbf{x} . A “norma” l_0 é um funcional que indica a quantidade de elementos não nulos de um vetor. No caso de sinais contaminados com ruído, o problema Eq. (2) pode ser relaxado para

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ sujeito a } \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \epsilon, \quad (3)$$

em que $\epsilon > 0$ representa uma tolerância ao erro (Tropp et al., 2010). A solução dos problemas

(2) ou (3) é *NP-hard*, já que a “norma” ℓ_0 não é convexa (Tropp et al., 2010).

Os sinais de sistemas elétricos de potência com distorções harmônicas podem ser considerados esparsos uma vez que, quando representados no domínio da frequência, apresentam poucos coeficientes não nulos (Manikandan, Samantaray, Kamwa and Member, 2015). Portanto, uma representação esparsa desses sinais pode ser obtida pela seleção de coeficientes ótimos relacionados a átomos de um dicionário composto por formas elementares adequadas.

2.2 Dicionário Harmônico Sobrecompleto

O dicionário deve ser composto por átomos que contenham características do sinal a ser analisado. Na aplicação em questão, os sinais elétricos com distorções harmônicas são formados pela combinação linear de senoides com frequências múltiplas da frequência fundamental do sinal. Para obter uma representação esparsa e adequada desses sinais, o dicionário deve ser composto por formas senoidais elementares com diferentes valores de frequência. Nesse caso, podem ser utilizados tanto os dicionários de Fourier, como os baseados em DCT e DST (Shaobing et al., 2001).

O dicionário utilizado neste trabalho é composto por duas matriz $N \times N$ calculadas pelas Eqs. (4) e (5), que correspondem a DCT e DST do tipo II (Britanak et al., 2007), agrupadas conforme a Eq. 6.

$$[\mathbf{C}_N^{II}]_{i \times j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma_j \cos\left(\frac{(i+0,5)j\pi}{N}\right), \quad (4)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N-1.$$

em que $\varsigma_j = 1/\sqrt{2}$ para $j = 0$ e $\varsigma_j = 1$ para $j \neq 0$.

$$[\mathbf{S}_N^{II}]_{i \times j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \psi_j \sin\left(\frac{(i+0,5)(j+1)\pi}{N}\right),$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

em que $\psi_j = 1/\sqrt{2}$ para $j = N-1$ e $\psi_j = 1$ para $j \neq N-1$.

$$\Phi = [\mathbf{C}_N^{II} \mid \mathbf{S}_N^{II}] \quad (6)$$

O vetor $\mathbf{x} = [\mathbf{c} \mid \mathbf{s}]^T$ resultante da decomposição esparsa é o agrupamento dos coeficientes $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$ e $\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]^T$, relacionados respectivamente aos átomos das matrizes \mathbf{C}_N^{II} e \mathbf{S}_N^{II} . As amplitudes de cada um dos componentes espectrais do sinal decomposto são calculadas por

$$A_n = \sqrt{(c_n)^2 + (s_n)^2} \quad (7)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

em que n indica o índice da componente espectral na grade de frequências definidas pelas Eqs. (4) e (5).

2.3 Algoritmos para SSD baseados em GP

Os algoritmos para SSD baseados em GP resolvem diretamente o problema apresentado na Eq. (3). Nesse caso, o vetor \mathbf{y} e o dicionário Φ são conhecidos. A tolerância ϵ é definida pelo nível de ruído presente no sinal e é utilizada como critério de parada dos algoritmos. Nessa categoria foi implementado e analisado o algoritmo *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) (Bruckstein et al., 2009).

2.3.1 OMP

Os principais passos executados pelo OMP são apresentados no Algoritmo 1. O vetor de coeficientes estimados $\hat{\mathbf{x}}$ é inicializado com o vetor nulo, e o resíduo \mathbf{r}^k é o próprio sinal a ser decomposto (\mathbf{y}). O conjunto \mathcal{S}^k representa o suporte da solução $\hat{\mathbf{x}}$, contendo os índices das colunas de Φ que compõem o sinal \mathbf{y} . Esse conjunto é inicializado vazio. O processo iterativo inicia com a busca do índice do átomo (γ^k) do dicionário ϕ_m que resulta no maior produto interno com o \mathbf{r}^k . A cada iteração, o valor de γ^k é inserido a \mathcal{S}^k , formando um conjunto com os índices dos átomos mais correlacionados com \mathbf{r}^k . Então, são calculados os coeficientes $\hat{\mathbf{x}}$ que resultam no menor erro entre o sinal de teste e a reconstrução do sinal, utilizando um dicionário reduzido com apenas as colunas pertencentes ao suporte ($\Phi_{\mathcal{S}^{k+1}}$).

Algoritmo 1: OMP

Entrada: Φ , \mathbf{y} , ϵ

Saída: $\hat{\mathbf{x}}^k$

1 **início**

2 $k = 1$, $\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}^k = \mathbf{y}$, $\mathcal{S}^k = \emptyset$

3 **enquanto** $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$ **faça**

4 $\gamma^k = \max_m |\langle \mathbf{r}^k, \phi_m \rangle|$

5 $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k \cup \{\gamma^k\}$

6 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi_{\mathcal{S}^{k+1}} \mathbf{x}\|_2$

7 $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{y} - \Phi_{\mathcal{S}^{k+1}} \hat{\mathbf{x}}^{k+1}$

8 $k = k + 1$

9 **fim**

10 **fim**

2.4 Algoritmos para SSD baseados em RC

Os algoritmos de relaxação convexa propõe a troca da “norma” ℓ_0 no problema (3) pela norma ℓ_1 , que é a função convexa que mais se aproxima da “norma” ℓ_0 em relação a esparsidade (Tropp et al., 2010). Essa troca permite que a decomposição esparsa possa ser rescrita como outros dois

problemas de otimização (Boyd et al., 2011): o *Basis Pursuit*

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ sujeito a } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y}; \quad (8)$$

e o *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO)

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1, \quad (9)$$

em que λ é chamado *parâmetro de regularização* e determina o grau de esparsidade. O valor de λ pode ser determinado por diversas abordagens (Karl, 2000). Neste trabalho foi calculado pela razão entre a variância do ruído e a variância do sinal. Posteriormente, foram testados outros valores para comparação entre os resultados obtidos.

O algoritmo *BP via Alternate Direction Multiplier Method* (BP-ADMM) (Boyd et al., 2011) foi implementado para realizar a decomposição esparsa por *Basis Pursuit*. Para resolver o problema (9), foram utilizados os algoritmos *LASSO via Alternate Direction Multiplier Method* (LASSO-ADMM) (Boyd et al., 2011), *Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm* (FISTA) (Beck and Teboulle, 2009) e o *Sparse Reconstruction by Separable Approximation* (SpARSA) (Wright et al., 2009).

2.4.1 ADMM

O ADMM é um algoritmo que resolve problemas de otimização na forma

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \text{ sujeito a } \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} = \mathbf{c}, \quad (10)$$

assumindo que o sinal procurado é dividido em duas partes (\mathbf{x} e \mathbf{z}) e as funções $f(\bullet)$ e $g(\bullet)$ são convexas (Boyd et al., 2011).

O método consiste na minimização alternada de \mathbf{x} e \mathbf{z} na função Lagrangiana aumentada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) + \\ &\quad \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}) + \\ &\quad (\rho/2) \|\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}\|_2^2, \end{aligned} \quad (11)$$

calculando os seguintes passos em cada iteração

$$\mathbf{x}^{k+1} = \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \quad (12)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \min_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_\rho(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}^k) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \rho(\mathbf{Ax}^{k+1} + \mathbf{Bz}^{k+1} - \mathbf{c}), \quad (14)$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro de penalidade.

O problema de BP da Eq. (8) pode ser reescrito na forma do ADMM como

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{z}\|_1 \text{ sujeito a } \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

em que $f(\mathbf{x})$ é a função indicadora para $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \mid \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ (Boyd et al., 2011). Nesse caso, a

Eq. (12) é resolvida por

$$\begin{aligned} \prod(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k) &= (\mathbf{I} - \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi)(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k) \\ &\quad + \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (16)$$

e a Eq. (13) é resolvida pelo operador de *soft thresholding*

$$S_b(x) = \text{sign}(x) \max\{|x| - b, 0\}. \quad (17)$$

Algoritmo 2 mostra o pseudo-código do BP-ADMM. O valor de ρ é passado como parâmetro para o algoritmo.

Algoritmo 2: BP ADMM

Entrada: Φ , \mathbf{y} , ρ , ϵ

Saída: $\hat{\mathbf{x}}^k$

```

1 início
2    $k = 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{y}$ 
3   enquanto  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  faça
4      $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \prod(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k)$ 
5      $\mathbf{z}^{k+1} = S_{1/\rho}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1} + \boldsymbol{\mu}^k)$ 
6      $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}$ 
7      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}^{k+1}$ 
8      $k = k + 1$ 
9   fim
10 fim
```

O ADMM também pode ser utilizado para resolver o problema LASSO (Boyd et al., 2011). Escrevendo a Eq. (9) na forma do ADMM tem-se

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \text{ sujeito a } \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (18)$$

em que $f(\mathbf{x}) = (1/2) \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2$ e $g(\mathbf{z}) = \lambda \|\mathbf{z}\|_1$.

Assim, a Eq.(12) é resolvida por

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\Phi^T \Phi + \rho \mathbf{I})^{-1} (\Phi^T \mathbf{y} + \rho(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k)), \quad (19)$$

e a Eq. (13) também é resolvida pelo operador de *soft thresholding* da Eq. (17). O pseudo-código do algoritmo LASSO-ADMM é apresentado no Algoritmo 3.

2.4.2 FISTA

O algoritmo FISTA é uma variação da classe de algoritmos *Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithms* (ISTA) que apresenta uma taxa de convergência aprimorada (Beck and Teboulle, 2009). Os algoritmos ISTA resolvem problemas LASSO a partir de um procedimento iterativo no qual a solução procurada é calculada por

$$\mathbf{x}^{k+1} = S_{\lambda/L}(\mathbf{x}^k - \frac{1}{L} \Phi^T (\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}^k)), \quad (20)$$

em que $1/L$ é uma constante que define o “tamanho do passo” adequado e $S_{\lambda/L}$ é o operador de *soft thresholding* (Beck and Teboulle, 2009).

Algoritmo 3: LASSO ADMM

Entrada: Φ , \mathbf{y} , ρ , λ , ϵ **Saída:** $\hat{\mathbf{x}}^k$

```
1 início
2    $k = 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{y}$ 
3   enquanto  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  faça
4      $\mathbf{x}^{k+1} = (\Phi^T \Phi + \rho \mathbf{I})^{-1} \times$ 
5        $(\Phi^T \mathbf{y} + \rho(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k))$ 
6      $\mathbf{z}^{k+1} = S_{\lambda/\rho}(\mathbf{x}^{k+1} + \boldsymbol{\mu}^k)$ 
7      $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}$ 
8      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}^{k+1}$ 
9      $k = k + 1$ 
10  fim
11 fim
```

A melhora na taxa de convergência existente no FISTA ocorre devido a uma modificação na Eq.(20). Ao invés de utilizar a estimativa do passo anterior (\mathbf{x}^k), é utilizado um ponto $\boldsymbol{\mu}^k$ obtido pela combinação linear da estimativa atual e anterior (\mathbf{x}^{k+1} e \mathbf{x}^k). As parcelas relevantes dessas estimativas no cálculo de $\boldsymbol{\mu}^k$ são definidas pela constante t^k , atualizada a cada iteração. O pseudo-código do FISTA é apresentado no Algoritmo 4.

Algoritmo 4: FISTA

Entrada: Φ , \mathbf{y} , λ , L , ϵ **Saída:** $\hat{\mathbf{x}}^k$

```
1 início
2    $k = 1$ ,  $t^k = 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$ 
3   enquanto  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  faça
4      $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = S_{\frac{\lambda}{L}}[\boldsymbol{\mu}^k - \frac{1}{L} \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \boldsymbol{\mu}^k)]$ 
5      $t^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^k)^2}}{2}$ 
6      $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^{k+1} + \frac{t^k - 1}{t^{k+1}}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k)$ 
7      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}^{k+1}$ 
8      $k = k + 1$ 
9   fim
10 fim
```

2.4.3 SpaRSA

O SpaRSA é outro algoritmo da classe ISTA para resolução de problemas LASSO. O seu princípio de funcionamento baseia-se em aproximar o termo quadrático da Eq.(9) por uma expansão em série de Taylor de segunda ordem (Wright et al., 2009). Com essa expansão, o problema LASSO passa a ser

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{u}}\|_2^2 + \frac{\lambda}{\alpha} \|\mathbf{x}\|_1, \quad (21)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}$ é o *gradiente descendente* calculado por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\alpha} \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}) \quad (22)$$

Assim como o FISTA, a solução da Eq. (21) é obtida de forma iterativa, aplicando o operador de *soft thresholding*. A diferença aqui é que o parâmetro α precisa ser atualizado a cada iteração. A estratégia adotada para o cálculo de α foi a sugerida por Barzilei e Borwein (Wright et al., 2009)

$$\alpha^{k+1} = \frac{\|\Phi(\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k)\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k\|_2^2}. \quad (23)$$

Algoritmo 5 mostra o pseudo-código utilizado na implementação do SpaRSA.

Algoritmo 5: SPARSA

Entrada: Φ , \mathbf{y} , λ , ϵ **Saída:** $\hat{\mathbf{x}}^k$

```
1 início
2    $k = 1$ ,  $\alpha^k = 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{y}$ 
3   enquanto  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  faça
4      $\hat{\mathbf{u}}^k = \hat{\mathbf{x}}^k - \frac{1}{\alpha^k} \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}^k)$ 
5      $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = S_{\frac{\lambda}{\alpha^k}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$ 
6      $\alpha^{k+1} = \frac{\|\Phi(\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k)\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k\|_2^2}$ 
7      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}^{k+1}$ 
8      $k = k + 1$ 
9   fim
10 fim
```

3 Ensaaios

O objetivo principal deste trabalho é comparar o desempenho dos algoritmos apresentados previamente para realizar a decomposição esparsa de sinais elétricos contendo componentes harmônicos. As características dos algoritmos que serão comparadas são: (I) quantidade de iterações necessárias para que o critério de parada dos algoritmos seja atingido; (II) esparsidade da solução encontrada; e (III) erro entre o sinal de teste e a solução encontrada. Para realizar essa análise de desempenho foi utilizado o sinal de teste

$$y_{tr}(t) = \sin(\omega t) + 0.18 \sin(3\omega t) + 0.11 \sin(5\omega t),$$

em que $\omega = 2\pi f$ com a frequência fundamental $f = 60$ Hz. Esse sinal é característico em sistemas elétricos nos quais o nível de tensão excede o valor nominal da tensão de um transformador. Isso provoca o aumento da corrente de magnetização do transformador, causando o surgimento de componentes de 3ª e 5ª harmônicas (Bollen and Gu, 2006).

Conforme as recomendações da IEC 61000-4-7, $y_{tr}(t)$ foi amostrado em uma janela de 200 ms, completando 12 ciclos da componente de frequência fundamental de 60 Hz. A taxa de amostragem adotada foi 256 pontos por ciclo e a frequência de

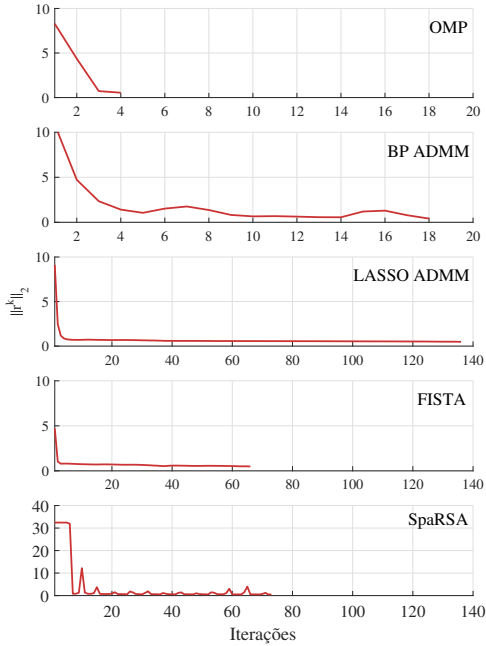


Figura 1: Erro residual ($\|\mathbf{r}^k\|_2$) em função das iterações

amostragem 15360 Hz. Assim, o vetor \mathbf{y}_{tr} contendo o sinal amostrado tem 3072 elementos. Ao vetor \mathbf{y}_{tr} foi adicionado um ruído branco gaussiano com relação sinal-ruído (SNR) de 40 dB. Esse sinal com ruído é o vetor \mathbf{y} que deve ser decomposto por todos os algoritmos. O dicionário Φ foi montado conforme as Eqs. (4), (5) e (6) com $N = 3072$. Assim, os átomos correspondem a componentes senoides abrangendo frequências desde 0 Hz até 7680 Hz, em uma grade com resolução de 2,5 Hz. O parâmetro ρ utilizado pelos algoritmos ADMM foi 0,5. Nos algoritmos LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA, o valor inicial utilizado para o parâmetro λ foi $9,88 \times 10^{-5}$.

O critério de parada em todos os algoritmos é quando $\|\mathbf{r}^k\|_2 \leq \epsilon$. Foi adotado o valor de $\epsilon = 0,3982$, esse valor foi calculado baseado no SNR de 40 dB. Existe um segundo critério de parada nos algoritmos que limita o número de iterações a quantidade de elementos no vetor do sinal de entrada.

3.1 Análise do número de iterações

O número iterações dos algoritmos analisados está relacionado a velocidade em que esses estimam a solução. Todos os algoritmos apresentam complexidade computacional similar. Portanto, o número de iterações necessário para atingir o critério de parada é um indicador de desempenho do algoritmo. A Figura 1 mostra o comportamento do erro residual ($\|\mathbf{r}^k\|_2$) ao longo das iterações.

É possível observar que todos os algoritmos

atingem o critério de parada estabelecido, alguns mais rapidamente (OMP e BP-ADMM) que outros (LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA). Todos os algoritmos, com exceção do SpaRSA, reduzem significativamente o erro nas três primeiras iterações. O OMP atinge o critério de parada com 4 iterações e o BP-ADMM apresenta pequenas oscilações no valor do erro, encontrando a solução com 18 iterações. O LASSO-ADMM reduz a taxa de decaimento do erro residual ao longo das iterações, sendo necessária 136 iterações para atingir o critério de parada. O FISTA possui uma dinâmica similar ao LASSO-ADMM, mas converge em 66 iterações. O SpaRSA, ao contrário dos demais algoritmos, não reduz o erro nas 6 primeiras iterações. Na 7ª iteração, o erro residual diminui para valores próximos de ϵ , mas apresenta vários picos durante as 73 iterações necessárias para reduzir $\|\mathbf{r}^k\|_2$ ao limite desejado.

3.2 Análise da Esparsidade

A esparsidade foi medida pela quantidade de coeficientes diferentes de zeros no vetor $\hat{\mathbf{x}}^k$ quando os algoritmos atingem a condição $\|\mathbf{r}^k\|_2 \leq \epsilon$. A representação pelo dicionário Φ do sinal de teste \mathbf{y}_{tr} tem esparsidade igual a 6, já que cada componente harmônico do sinal (1ª, 3ª e 5ª harmônicas) é representado por um átomo em cada um dos dicionários \mathbf{C}_N^{II} e \mathbf{S}_N^{II} . A esparsidade do vetor $\hat{\mathbf{x}}^k$ encontrado por cada algoritmo é mostrada na Tabela 1.

Tabela 1: Esparsidade de $\hat{\mathbf{x}}^k$

	Esparsidade
OMP	4
BP-ADMM	6
LASSO-ADMM	8
FISTA	10
SpaRSA	11

O OMP obteve o resultado mais esparsos, identificando apenas 4 dos 6 coeficientes existentes no sinal. Isso ocorre devido a existência de coeficientes com amplitude inferior ao nível de ruído adotado. Nesse caso, a tolerância ao erro pode ser mais restritiva com o objetivo de alcançar resultados mais precisos. O BP-ADMM identificou os 6 coeficientes existentes no sinal. O LASSO-ADMM, o FISTA e o SpaRSA identificaram respectivamente 8, 10 e 11 coeficientes, portanto, mais coeficientes que o necessário para representar o sinal. Para esses algoritmos, a esparsidade depende da escolha do parâmetro λ . A influência de λ na esparsidade foi testada repetindo-se os ensaios com alteração em seu valor. Os resultados desses ensaios estão compilados na Tabela 2.

Para valores pequenos de λ , os vetores resultantes apresentaram uma grande quantidade de coeficientes não nulos, além de um grande número

Tabela 2: Influência do λ na esparsidade de $\hat{\mathbf{x}}^k$

$\lambda(\times 10^{-2})$	Coeficientes/N ^o de Iterações		
	LASSO ADMM	FISTA	SpaRSA
0,00988	3120/3072	3100/3072	3169/3072
0,0988	2825/3072	2836/820	5242/3072
0,988	732/1312	738/214	755/678
9,88	8/136	10/66	11/73
19,76	6/3072	6/3072	6/47

de iterações. Com o aumento no valor de λ , foram diminuindo o número de coeficientes. O valor adequado foi encontrado em $\lambda = 9,88 \times 10^{-2}$ para os três algoritmos.

3.3 Erro de reconstrução

A avaliação da reconstrução do sinal foi realizada pela diferença entre o sinal de teste \mathbf{y}_{tr} sem a adição de ruído e o sinal reconstruído com a multiplicação do dicionário pelos coeficientes estimados ($\Phi\hat{\mathbf{x}}$). O critério de avaliação adotado aqui é o *erro médio quadrático* (EMQ) da reconstrução, calculado por

$$\text{EMQ} = \|\mathbf{y}_{tr} - \Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2^2. \quad (24)$$

Todos os algoritmos apresentaram resultados como EMQ na ordem de 10^{-5} , conforme mostra a Tabela 3. O BP-ADMM resultou na melhor reconstrução do sinal, enquanto o OMP teve o maior erro de reconstrução.

Tabela 3: Erro de Reconstrução

	MSE ($\times 10^{-5}$)
OMP	4,48
BP-ADMM	0,44
LASSO-ADMM	2,25
FISTA	2,44
SpaRSA	2,20

A abordagem mais comum para a análise de conteúdo harmônico é a identificação dos componentes de frequência e suas respectivas amplitudes. As frequências foram definidas pelos átomos selecionados do dicionário, e as amplitudes calculadas pela Eq. (7). Os valores obtidos e os erros relativos entre os valores estimados e os valores reais são apresentados na Tabela 4.

O OMP apresentou a melhor estimativa dos componentes de frequência, seguido pelo BP-ADMM. Ambos obtiveram erros relativos menores

que 0,33%. O FISTA, o LASSO e o SpaRSA tiveram resultados similares entre si, com erros de até 2,45%. Esses algoritmos identificaram pequenos componentes de frequência adjacentes a componente de frequência fundamental (60 Hz). Entretanto, esses componentes foram desconsiderados por terem amplitudes muito pequena em relação as amplitudes do sinal. Porém a energia dispersa neles aumenta o erro nos componentes verdadeiros.

4 Conclusões

Nesse artigo comparou o desempenho dos algoritmos de decomposição esparsa OMP, BP-ADMM, LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA. Os critérios avaliados foram o número de iterações, a esparsidade do resultado e a qualidade na reconstrução de sinais elétricos contendo distorções harmônicas. O OMP apresentou a vantagem de não depender de parâmetros adicionais. Nos ensaios realizados, convergiu no menor número de iterações, obteve o resultado mais esparsos e a melhor estimação de componentes de frequência. Portanto, é o método mais adequado para análise de componentes harmônicos em sinais de qualidade de energia. O algoritmo BP-ADMM obteve esparsidade ideal e o menor erro na reconstrução do sinal, porém com mais iterações e erros relativos maiores no cálculo dos componentes de frequência quando comparado ao OMP. Portanto, pode ser útil em outras aplicações como remoção de ruído. Os resultados obtidos por LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA também foram esparsos e com pequeno erro de reconstrução. Entretanto, convergiram com um número maior de iterações quando comparados com o OMP e o BP-ADMM. Esses algoritmos são dependentes do parâmetro de regularização, e a sua escolha mostrou-se fundamental para desempenho adequado desses métodos. Recomenda-se para trabalhos futuros a realização da análise dos algoritmos para decomposição esparsa de sinais elétricos mais complexos, contendo distorções harmônicas e inter-harmônicas, transitórios, *notches* e outros problemas de qualidade de energia.

Agradecimentos

Os autores agradecem a UTFPR, CAPES, Fundação Araucária, FINEP e CNPq pelo apoio financeiro.

Tabela 4: Componentes de Frequência

f (Hz)	\mathbf{y}_{tr}	Amplitude (pu) /Erro (%)				
		OMP	BP ADMM	LASSO ADMM	FISTA	SpaRSA
60	1,00	1,0002/0,02	1,0021/0,21	0,995/0,50	0,9939/0,61	0,9937/0,63
180	0,18	0,1796/0,22	0,1794/0,33	0,1772/1,56	0,1772/1,56	0,1776/1,33
300	0,11	0,1098/0,18	0,1099/0,09	0,1073/2,45	0,1073/2,45	0,1076/2,18

Referências

- Achlerkar, P. D., Samantaray, S. R. and Manikandan, M. S. (2017). Variational Mode Decomposition and Decision Tree Based Detection and Classification of Power Quality Disturbances in Grid-Connected Distributed Generation System, *IEEE Transactions on Smart Grid* **3053**(c): 1–1.
- Beck, A. and Teboulle, M. (2009). A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Imaging Sciences* **2**(1): 183–202.
- Bollen, M. H. J. and Gu, I. Y.-H. (2006). *Signal Processing of Power Quality Disturbances*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2011). *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers*, Now Foundations and Trends.
- Britanak, V., Yip, P. C. and Rao, K. R. (2007). *Discrete Cosine and Sine Transforms*, Elsevier.
- Bruckstein, A. M., Donoho, D. L. and Elad, M. (2009). From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images, *SIAM Review* **51**(1): 34–81.
- Commission, I. E.-t. (2006). IEC 61000-4-7, *Technical report*.
- Elad, M. (2010). *Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing*, Springer, New York, NY, USA.
- IEEE (2009). *IEEE Std 1159 - IEEE recommended practice for monitoring electric power quality*, Vol. 2009.
- Karl, W. C. (2000). Regularization in image restoration and reconstruction, in A. C. Bovik (ed.), *Handbook of Image and Video Processing*, Academic Press, Orlando, FL, USA, chapter 3.6, pp. 141–160.
- Kathirvel, P., Manikandan, M. S., Maya, P. and Soman, K. P. (2011). Detection of power quality disturbances with overcomplete dictionary matrix and l1-norm minimization, *2011 International Conference on Power and Energy Systems*, pp. 1–6.
- Lin, H. C. (2016). Identification of interharmonics using disperse energy distribution algorithm for flicker troubleshooting, *IET Science, Measurement & Technology* **10**(7): 786–794.
- Manikandan, M., Kamwa, I. and Samantaray, S. R. (2015). Simultaneous denoising and compression of power system disturbances using sparse representation on overcomplete hybrid dictionaries, *IET Generation, Transmission & Distribution* **9**(11): 1077–1088.
- Manikandan, M. S., Samantaray, S. R., Kamwa, I. and Member, S. (2015). Detection and Classification of Power Quality Disturbances Using Sparse Signal Decomposition on Hybrid Dictionaries, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **64**(1): 27–38.
- Mohanty, M., Satija, U. and Ramkumar, B. (2015). Sparse decomposition framework for maximum likelihood classification under alpha-stable noise, *2015 IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies (CONECCT)*, IEEE, pp. 1–6.
- Satija, U., Ramkumar, B. and Sabarimalai Manikandan, M. (2017). Noise-aware dictionary-learning-based sparse representation framework for detection and removal of single and combined noises from ECG signal, *Healthcare Technology Letters* **4**(1): 2–12.
- Shaobing, S., Donoho, D. L., Saunders, M. A. and Saunders, M. A. (2001). Atomic Decomposition by Basis Pursuit Linked references are available on JSTOR for this article : Atomic Decomposition by Basis, *Society for Industrial and Applied Mathematics* **43**(1): 129–159.
- Sun, Z., He, Z., Zang, T. and Liu, Y. (2016). Multi-Interharmonic Spectrum Separation and Measurement under Asynchronous Sampling Condition, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **65**(8): 1902–1912.
- Tropp, B. J. a., Wright, S. J. and Tropp, J. a. (2010). Computational Methods for Sparse Solution of Linear Inverse Problems, *Proceedings of the IEEE* **98**(6): 948–958.
- Wright, S. J., Nowak, R. D. and Figueiredo, M. A. (2009). Sparse reconstruction by separable approximation, *IEEE Transactions on Signal Processing* **57**(7): 2479–2493.
- Yuan, X. D., Chen, B., Li, Q. and Wang, Z. (2014). Measurement method of harmonics and inter-harmonics with nonsynchronous sampling in IEC framework, *China International Conference on Electricity Distribution, CIGED 2014-Decem*(Ciced): 123–128.