

Consenso Robusto de Sistemas Multiagentes Lineares em Redes de Comunicação de Topologia Incerta

Natalia O. Borges * Bruno M. C. Silva * Eduardo S. Tognetti *
João Y. Ishihara *

* Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, DF,
(e-mail: 210011815@aluno.unb.br, bcalazans@aluno.unb.br,
estognetti@ene.unb.br, ishihara@ene.unb.br).

Abstract: This work proposes linear matrix inequalities (LMI) conditions for the consensus of homogeneous multi-agent systems subject to disturbances and uncertainties in the topology of communication between agents. The consensus problem is rewritten as a stabilization problem, and a full-order dynamic output feedback controller is designed to guarantee the stability with \mathcal{H}_∞ performance criterion. The results are illustrated by numerical simulations that show the effectiveness of the proposed method.

Resumo: Este trabalho propõe condições baseadas em desigualdades matriciais lineares para consenso de sistemas multiagentes homogêneos sujeitos a distúrbios e incertezas na topologia de comunicação entre agentes. O problema de consenso é tratado como um problema de estabilização e um controlador com realimentação dinâmica de saída e ordem completa é projetado para garantir estabilidade com desempenho \mathcal{H}_∞ . Os resultados são ilustrados por meio de simulação numérica e mostram a efetividade do método proposto.

Keywords: Multi-Agent Systems; Consensus; Linear Matrix Inequalities; Uncertainties; \mathcal{H}_∞ cost

Palavras-chaves: Sistemas Multiagentes; Consenso; Desigualdades de Matrizes Lineares; Incertezas; Custo \mathcal{H}_∞

1. INTRODUÇÃO

Sistemas Multiagentes têm sido estudados amplamente na literatura (Lewis et al. (2013)), tendo várias aplicações em diversas áreas, como por exemplo no controle de veículos aéreos não tripulados (VANT), de satélites e sistemas de potência (Wang et al., 2020b; Sujil et al., 2018; Li et al., 2019a). Para a operação adequada de um sistema multiagente é necessário um comum acordo em relação a uma certa variável de interesse. Esse problema, conhecido como consenso, é em geral resolvido por meio do projeto de protocolos de comunicação distribuída em que os agentes trocam informações com seus vizinhos (Olfati-Saber et al., 2007).

Muitos trabalhos envolvendo consenso multiagente são voltados ao projeto de controladores com realimentação de estados (como em Zhao and Zhang (2017), Lv et al. (2017) e Yang and Yingmin (2012)). Nos últimos anos a atenção tem sido voltada ao problema de consenso relacionado à realimentação dinâmica de saída (veja por exemplo, Li et al. (2011), Li et al. (2017a), Li et al. (2018), Li et al. (2017b), Li et al. (2019b), Liu and Hou (2019)), tendo em vista que protocolos baseados em realimentação de estados podem não ser aplicáveis a algumas situações, pois nem sempre é possível obter informações sobre os estados de um sistema Li et al. (2017b).

Um fator importante que afeta na complexidade da resolução do problema de consenso e na sua implementação é como os agentes se comunicam: através de uma rede de comunicação direcionada ou não direcionada. Em termos de implementação prática, sistemas multiagentes com redes de comunicação não direcionadas são mais custosos do que os sistemas com redes direcionadas, por requerer que todo agente que possua canal para enviar suas informações aos seus vizinhos obrigatoriamente também deva ter um canal de comunicação para receber informações destes mesmos vizinhos. Apesar do conservadorismo de arquitetura de comunicação, do ponto de vista teórico há menos dificuldades em se tratar problemas que envolvem agentes conectados em redes não direcionadas, pois a matriz Laplaciana do grafo será simétrica, o que facilita na sua decomposição e derivação de condições (Liu and Jia (2010), Xue et al. (2019b), Liu and Hou (2019)).

Ao se permitir trabalhar com redes direcionadas, abre-se um maior leque de opções na escolha de topologias, pois os agentes podem apenas enviar ou receber informações dos seus vizinhos sem a obrigatoriedade de permitir comunicação de mão dupla. No entanto, do ponto de vista teórico, redes direcionadas trazem maior dificuldade na obtenção de condições de consenso, pois neste caso, a matriz Laplaciana tem menos estrutura (não apresenta padrões de simetria, por exemplo) e pode apresentar autovalores complexos (Li et al. (2019b) Li et al. (2018)).

Uma outra questão importante no projeto de controladores dinâmicos em problemas de consenso é referente às informações compartilhadas através dos canais de comunicação.

Os primeiros trabalhos na área (veja, por exemplo, Olfati-Saber et al. (2007)) consideraram o problema de obter consenso por meio de acesso aos estados dos agentes vizinhos. No entanto, como a dimensão dos estados pode ser grande e normalmente os estados não são acessíveis, soluções baseadas no acesso às saídas dos agentes vizinhos foram propostas. Entretanto, devido à dificuldade de se resolver o problema de consenso com apenas a saída, alguns trabalhos na literatura consideram redes que compartilham além das saídas dos agentes vizinhos, os estados dos seus controladores dinâmicos (Xue et al., 2019b,a; Li et al., 2018)). Protocolos que compartilham estados dos controladores vizinhos são menos realísticos e mais difíceis de serem implementados (Li et al., 2017b). Por outro lado, projetar protocolos baseados em controladores dinâmicos, que não compartilham a informação dos estados dos controladores dos vizinhos é mais difícil pois requerem menos informação sobre os agentes vizinhos (Li et al., 2019b).

Normalmente, agentes estão sujeitos a distúrbios externos tanto em suas dinâmicas quanto nas saídas, e protocolos projetados sem considerar tais distúrbios, não garantem um bom consenso na prática. Em termos de soluções para consenso em sistemas sujeitos a distúrbios e conectados por redes não direcionadas, podemos listar alguns trabalhos como Liu and Jia (2010), Liu and Hou (2019), Xue et al. (2019b), Xue et al. (2019a), e Liu et al. (2019). Para sistemas sujeitos a distúrbios e conectados por redes direcionadas, nós podemos listar poucos trabalhos: Chen et al. (2020) que lida com protocolos estáticos; Li et al. (2017a) que projeta protocolos de ordem completa; e Silva et al. (2022) que projeta protocolos de realimentação de saída de ordem arbitrária (estático, de ordem reduzida e completa).

A maioria dos trabalhos da literatura de sistemas multiagentes assume uma topologia estática e conhecida. Contudo, essa hipótese nem sempre é válida em prática. Em algumas situações, a topologia de comunicação entre os agentes pode ser sofrer interferências devido à limitações na comunicação ou interferência de distúrbios, e assim, o desempenho do canal pode se deteriorar e até mesmo ser perdido. Alguns trabalhos mais recentes abordam o problema de incerteza na topologia de forma determinística (Han et al., 2013; Huang et al., 2015, 2018) ou estocástica (Wang et al., 2020a), o último por meio de cadeias de Markov chaveadas. Na abordagem determinística, os trabalhos Han et al. (2013) e Huang et al. (2018) se restringem a sistemas multiagentes de segunda ordem. Em Huang et al. (2015) e Huang et al. (2018), as incertezas que afetam a rede são descritas na forma polinomial resultando em condições de projeto na forma de soma de quadrados (SOS, do inglês *sum of squares*) e assumindo que os estados estão disponíveis para comunicação em rede.

Neste trabalho, estendemos as condições de Silva et al. (2022) de forma a considerar o problema de projeto de protocolos de consenso robustos para sistemas multiagentes lineares sujeitos a distúrbios que se comunicam por uma rede direcionada de topologia incerta. Consideraremos a incerteza de comunicação modelada com os ganhos dos

canais de comunicação pertencentes a uma faixa conhecida de valores. Como tal, a incerteza pode ser caracterizada por matrizes Laplacianas incertas, mas pertencentes a um politopo e assim, o problema de consenso pode ser traduzido em um problema convexo e soluções baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) podem ser obtidas. O consenso por realimentação de saída é tratado a partir do método dos dois estágios, inspirado em Agulhari et al. (2011), que primeiramente calcula um ganho de realimentação de estados dependente dos parâmetros dos agentes, para em seguida calcular as condições LMI que garantem o consenso por realimentação de saída.

Notação. A notação \mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^{n \times m}$ denotam os conjuntos de vetores reais de dimensão n e matrizes reais de dimensão $n \times m$, respectivamente. A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n e a matriz nula $m \times n$ por $0_{m,n}$ (ou simplesmente I e 0 na falta de confusão); $\mathbf{1}_m$ denota o vetor de 1 de dimensão m ; \otimes é o operador produto de Kronecker. Para uma matriz $X = [x_{ij}]$, x_{ij} representam seus elementos, X^T denota sua transposta, $\text{He}\{X\}$ é uma notação curta de $X + X^T$, e \mathbf{X}_\perp o complemento ortogonal de X , ou seja, a matriz de posto coluna pleno cujas colunas pertencem ao espaço nulo de X ($X\mathbf{X}_\perp = 0$). O conjunto $\mathcal{L}_2^2[0, \infty)$ representa os sinais de dimensão n quadraticamente integráveis (energia finita); $\text{co}\{\Theta\}$ representa a combinação convexa dos elementos do conjunto $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. O símbolo \star denota blocos simétricos em matrizes particionadas.

2. PRELIMINARES E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Teoria de Grafos

A comunicação de sistemas multiagentes pode ser representada pela notação $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$ em que $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ são os nós do grafo e representam os agentes do sistema, $\mathcal{E} \subseteq \{(v_j, v_i) : i, j = 1, \dots, m\}$ são os arcos do grafo e representam o canal de comunicação entre dois agentes e $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ é a matriz de adjacência em que $a_{ij} > 0$ se $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ e $a_{ij} = 0$ se $(v_i, v_j) \notin \mathcal{E}$. A matriz Laplaciana associada ao grafo direcionado $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$ é definida como $L = [l_{ij}]$ em que $l_{ii} := \sum_{j=1}^m a_{ij}$ e $l_{ij} := -a_{ij}$ para $i \neq j$. A vizinhança de um nó v_i é dada por todos os nós v_j em que $a_{ij} > 0$ e pode ser descrita como o conjunto $\mathcal{N}_i := \{v_j \in \mathcal{V} : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$.

Em muitos casos, a topologia de comunicação entre os agentes pode variar no tempo devido a distúrbios ou perda de comunicação, por isso, neste trabalho a matriz de adjacência e , conseqüentemente, a matriz Laplaciana serão consideradas incertas e variantes no tempo.

A incerteza da rede recai sobre os pesos $a_{ij}(t)$ que podem variar dentro do intervalo limitado $[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ em que $0 \leq \underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$. Dessa forma, a família de matrizes de adjacência possíveis é dada pelo conjunto

$$\Omega_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{A} = [a_{ij}] : a_{ij} \in \text{co}\{\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\}, i = 1, \dots, m\}.$$

Cada vértice do conjunto $\Omega_{\mathbf{A}}$ possui uma matriz Laplaciana L_k associada. Neste trabalho, as incertezas na rede de comunicação serão modeladas pela representação polinomial

$$\mathcal{L} = \left\{ L(\alpha) = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i L_i : \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad (1)$$

em que $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_{\kappa}(t))$ é o vetor de parâmetros que representam as incertezas na topologia.

Hipótese 1. O grafo direto $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$ tem árvore de extensão ou árvore de dispersão (em inglês, *spanning tree*) para toda incerteza admissível na topologia da rede.

2.2 Definição do Problema

Um sistema multiagente, com m agentes de dinâmicas lineares idênticas, pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A x_i(t) + B_u u_i(t) + B_w w_i(t), \\ y_i(t) &= C_y x_i(t) + D_y w_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado local do agente, $u_i(t) \in \mathbb{R}^s$ é a entrada de controle, $w_i(t) \in \mathcal{L}_2^{n_w}[0, \infty)$ é o distúrbio exógeno ao sistema e $y_i(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida do agente.

Cada agente possui um controlador de ordem completa do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c v_i, \\ u_i(t) &= C_c x_{c,i}(t) + D_c v_i(t), \end{aligned} \quad (3)$$

em que $x_{c,i}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do controlador e $v_i(t)$ é o erro de consenso, dado por

$$v_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t) (y_i(t) - y_j(t)),$$

em que $a_{ij}(t)$ são os pesos da comunicação entre os agentes em sua vizinhança. A saída balanceada de consenso entre os estados dos agentes é dada por

$$z_i(t) = C_z (x_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j(t)),$$

tal que o consenso é alcançado quando $z_i(t) = 0$ para $i = 1, \dots, m$, e a matriz C_z pondera a importância relativa de cada componente dos estados dos agentes na análise de desempenho.

Devido à presença de distúrbios, consenso exato das saídas ponderadas não é possível. Para a análise da qualidade de desempenho, o consenso é avaliado em relação à norma \mathcal{H}_{∞} , que compara a energia dos sinais de distúrbios exógenos $w(t)$ com a saída de consenso $z(t)$, de acordo com a seguinte relação

$$\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} \|w(t)\|^2 dt, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty), \quad (4)$$

em que o escalar $\gamma > 0$ é o desempenho \mathcal{H}_{∞} do sistema (2)-(3).

O objetivo deste trabalho é projetar um controlador de ordem completa que

- (1) alcance o estado de consenso assintótico robusto na situação em que não há distúrbios $w_i(t)$, para qualquer condição inicial.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{c,i}(t) - x_{c,j}(t)\| &= 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

- (2) satisfaça o desempenho \mathcal{H}_{∞} dado em (4) com custo garantido $\gamma > 0$ na presença de distúrbios $w_i(t)$ e condições iniciais nulas.

O seguinte lema será importante para os resultados principais do trabalho.

Lema 1. (Lema da Eliminação (Boyd et al., 1994)) Seja $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, então existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, tal que

$$\mathcal{Q} + \mathbf{U}^T \mathcal{X} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathcal{X}^T \mathbf{U} \prec 0, \quad (5)$$

se e somente se as condições

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_{\perp}^T \mathcal{Q} \mathbf{U}_{\perp} \prec 0 \text{ ou } \mathbf{U}^T \mathbf{U} \succ 0) \text{ e} \\ (\mathbf{V}_{\perp}^T \mathcal{Q} \mathbf{V}_{\perp} \prec 0 \text{ ou } \mathbf{V}^T \mathbf{V} \succ 0) \end{aligned}$$

são satisfeitas.

3. RESULTADOS

Nesta seção serão apresentadas as condições LMI que satisfazem os objetivos de projeto de controle de consenso.

3.1 Sistema em Malha Fechada

Definindo o estado do sistema aumentado

$$\phi = [x^T(t) \ x_c^T(t)]^T,$$

em que $x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \dots \ x_m^T(t)]^T$ e $x_c(t) = [x_{c,1}^T(t) \ x_{c,2}^T(t) \ \dots \ x_{c,m}^T(t)]^T$, a equação do sistema aumentado em malha fechada é¹

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha) \phi(t) + \mathbb{B}(\alpha) w(t), \\ z(t) &= \mathbb{C} \phi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix}, \\ \mathbb{C} &= [C_g \otimes C_z \ 0], \quad C_g = I_m - \frac{1}{m} \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T. \end{aligned}$$

Este problema de consenso pode ser resolvido como um problema de estabilização introduzindo as variáveis $\delta_{1,i} = x_1(t) - x_{i+1}(t)$, $\delta_{2,i} = x_{c,1}(t) - x_{c,i+1}(t)$ e $\eta_i = w_1(t) - w_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, m-1$, que representam a diferença entre os estados dos agentes, estados do controlador e distúrbios, respectivamente.

Assim, é possível escrever

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} = \bar{U} \phi(t), \quad \eta(t) = (U \otimes I_{n_w}) w(t) \quad (7)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes x_1(t) \\ \mathbf{1}_m \otimes x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \bar{W} \delta(t), \\ w(t) &= \mathbf{1}_m \otimes w_1(t) + (W \otimes I_{n_w}) \eta(t), \end{aligned} \quad (8)$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \begin{bmatrix} U \otimes I_n & 0 \\ 0 & U \otimes I_n \end{bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} W \otimes I_n & 0 \\ 0 & W \otimes I_n \end{bmatrix}, \\ U &= [\mathbf{1}_{m-1} \ -I_{m-1}], \quad W = [0_{m-1} \ -I_{m-1}]^T. \end{aligned}$$

¹ Daqui para frente, o argumento t é omitido de $\alpha(t)$ por questões de espaço e simplicidade de notação.

O problema de controle de consenso do sistema (6) pode, então, ser resolvido como o problema de estabilização do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{BK}_y\mathcal{C}(\alpha))\delta(t) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{BK}_y\mathcal{D}(\alpha))\eta(t), \quad (9) \\ z(t) &= \mathcal{C}_z\delta(t), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m-1} \otimes B_u \\ I_{(m-1)n} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_1 &= \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_y = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A_c & I_{m-1} \otimes B_c \\ I_{m-1} \otimes C_c & I_{m-1} \otimes D_c \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{(m-1)n} \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes C_y & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes D_y \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_z &= [C_g W \otimes C_z \ 0], \bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)} \end{aligned}$$

Por conta da estrutura de \mathcal{K}_y os ganhos do controlador (A_c , B_c , C_c e D_c) não podem ser recuperados diretamente. Para contornar esse problema é possível reescrever \mathcal{K}_y utilizando algumas propriedades do produto de Kronecker, como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_y &= \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{11}K_y\mathfrak{J}_{21}^T) & I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{11}K_y\mathfrak{J}_{22}^T) \\ I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{12}K_y\mathfrak{J}_{21}^T) & I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{12}K_y\mathfrak{J}_{22}^T) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{11} \\ I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_1} (I_{m-1} \otimes K_y) \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{21}^T & I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{22}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_2} \end{aligned}$$

em que $\mathfrak{J}_{11} = [I_n \ 0_{n \times s}]$, $\mathfrak{J}_{12} = [0_{s \times n} \ I_s]$, $\mathfrak{J}_{21} = [I_n \ 0_{n \times q}]$, $\mathfrak{J}_{22} = [0_{q \times s} \ I_q]$ e $K_y = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$.

Assim, o sistema (9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= A_{cl}(\alpha)\delta(t) + B_{cl}(\alpha)\eta(t), \quad (10) \\ z(t) &= C_z\delta(t) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_{cl}(\alpha) &= \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}}(I_{m-1} \otimes K_y)\bar{\mathcal{C}}(\alpha), \\ B_{cl}(\alpha) &= \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}}(I_{m-1} \otimes K_y)\bar{\mathcal{D}}(\alpha), \\ \bar{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}\mathcal{T}_1, \quad \bar{\mathcal{C}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{C}(\alpha), \quad \bar{\mathcal{D}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{D}(\alpha). \end{aligned}$$

Nesta configuração é possível estabelecer condições LMI para o projeto de K_y .

3.2 Projeto de protocolo de consenso \mathcal{H}_∞

O seguinte teorema estabelece condições LMI suficientes para o projeto de controle de consenso multiagente com desempenho \mathcal{H}_∞ .

Teorema 2. Dada uma matriz K_x tal que $\mathcal{A}_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}}K_x$ é uma matriz Hurwitz, se existirem um escalar μ e matrizes $P = P^T \succ 0$, Z , G , X_{1i} , X_{2i} , H_i , F_{1i} , F_{2i} , F_{3i} , $i = 1, \dots, m$, que satisfazem (11), então os m agentes do sistema (2) alcançam o estado de consenso com custo \mathcal{H}_∞ $\gamma = \sqrt{\mu m} > 0$ com ganho $K_y = G^{-1}Z$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \text{He} \{X_{1i}\mathcal{A}_{clx}\} & P - F_{1i} + \mathcal{A}_{clx}^T X_{2i} & F_{1i}\mathcal{B}_1 \\ * & -F_{2i}^T - F_{2i} & F_{2i}\mathcal{B}_1 \\ * & * & -\mu I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ X_{1i} - F_{1i} & \mathcal{C}_z^T H_i \\ X_{2i} - F_{2i} - F_{3i}^T & 0 \\ \mathcal{B}_1^T F_{3i}^T & 0 \\ -F_{3i}^T - F_{3i} & 0 \\ * & I - H_i^T - H_i \\ * & * \\ F_{1i}\bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{C}}i^T(I \otimes Z)^T - K_x^T(I \otimes G)^T & \\ F_{2i}\bar{\mathcal{B}} & \\ \bar{\mathcal{D}}i(I \otimes Z)^T & \\ F_{3i}\bar{\mathcal{B}} & \\ 0 & \\ -\text{He} \{I \otimes G\} & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (11)$$

$i = 1, \dots, \kappa$.

Prova. Primeiramente observe que

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \Psi_i = \\ & \begin{bmatrix} \text{He} \{X_1(\alpha)\mathcal{A}_{clx}\} & P - F_1(\alpha) + \mathcal{A}_{clx}^T X_2(\alpha)^T & F_1(\alpha)\mathcal{B}_1 \\ * & -F_2(\alpha)^T - F_2(\alpha) & F_2(\alpha)\mathcal{B}_1 \\ * & * & -\mu I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ X_1(\alpha) - F_1(\alpha) & \mathcal{C}_z^T H(\alpha) \\ X_2(\alpha) - F_2(\alpha) - F_3(\alpha)^T & 0 \\ \mathcal{B}_1^T F_3(\alpha)^T & 0 \\ -F_3(\alpha)^T - F_3(\alpha) & 0 \\ * & I - H(\alpha)^T - H(\alpha) \\ * & * \\ F_1(\alpha)\bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{C}}(\alpha)^T(I \otimes Z)^T - K_x^T(I \otimes G)^T & \\ F_2(\alpha)\bar{\mathcal{B}} & \\ \bar{\mathcal{D}}(\alpha)(I \otimes Z)^T & \\ F_3(\alpha)\bar{\mathcal{B}} & \\ 0 & \\ -\text{He} \{I \otimes G\} & \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

Multiplicando $\Psi(\alpha)$ à esquerda por

$$\mathcal{T}^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_z^T H(\alpha)^{-T} & \bar{\mathcal{C}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T - K_x^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\mathbb{K}_y := I \otimes (G^{-1}Z)$, e à direita por \mathcal{T} e substituindo o termo $I - H^T - H$ por $-H^T H$, visto que $-H^T H \preceq I - H^T - H$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \Omega_1(\alpha) & * & * & * \\ \Omega_2(\alpha) & -F_2(\alpha) - F_2(\alpha)^T & * & * \\ \Omega_3(\alpha) & \Omega_5(\alpha) & -\frac{\gamma^2}{m}I & * \\ \Omega_4(\alpha) & \Omega_6(\alpha) & \Omega_7(\alpha) & -F_3(\alpha) - F_3(\alpha)^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (12)$$

em que

$$\mu = \frac{\gamma^2}{m},$$

$$\begin{aligned}\Omega_1(\alpha) &= \text{He} \{ X_1(\alpha) \mathcal{A}_{clx} + F_1(\alpha) \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x \} + \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z, \\ \Omega_2(\alpha) &= P - F_1(\alpha)^T + X_2(\alpha) \mathcal{A}_{clx} + F_2(\alpha) \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \mathcal{C}(\alpha) - K_x, \\ \Omega_3(\alpha) &= \bar{\mathcal{B}}^T F_1(\alpha)^T + \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T \bar{\mathcal{B}}^T F_1(\alpha)^T, \\ \Omega_4(\alpha) &= X_1(\alpha)^T - F_1(\alpha)^T + F_3(\alpha) \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x, \\ \Omega_5(\alpha) &= \mathcal{B}_1^T F_2(\alpha)^T + \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T \bar{\mathcal{B}}^T F_2(\alpha)^T, \\ \Omega_6(\alpha) &= X_2(\alpha)^T - F_2(\alpha)^T - F_3(\alpha), \\ \Omega_7(\alpha) &= F_3(\alpha) \mathcal{B}_1 + F_3(\alpha) \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha).\end{aligned}$$

A inequação (12) pode ser reescrita como,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{He} \{ X_1(\alpha) \mathcal{A}_{clx} \} + \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z & P - \mathcal{A}_{clx}^T X_2(\alpha)^T & 0 & X_1(\alpha) \\ P - X_2(\alpha) \mathcal{A}_{clx} & 0 & 0 & X_2(\alpha) \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma^2}{m} I & 0 \\ X_1(\alpha)^T & X_2(\alpha)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x \\ -I \\ \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha) \\ I \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(\alpha)^T & F_2(\alpha)^T & 0 & F_3(\alpha)^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1^T} < 0, \quad (13)$$

que está na forma de (5) do Lema 1. Definindo $\mathbf{U} := I$ e o complemento ortogonal de \mathbf{V}_1 como

$$\mathbf{V}_{1\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x & -I & \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha) \end{bmatrix},$$

a expressão (13) é equivalente a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma^2}{m} I \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_2} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha))^T \\ -I \\ \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_2^T} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1(\alpha)^T & X_2(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2^T} \right\} < 0 \quad (14)$$

Usando novamente o Lema 1 com o complemento ortogonal de \mathbf{V}_2 como

$$\mathbf{V}_{2\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha) & \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha) \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

e definindo as matrizes $A_{cl}(\alpha) := \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{C}}(\alpha)$, $B_{cl}(\alpha) := \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}} \mathbb{K}_y \bar{\mathcal{D}}(\alpha)$ e $\mathbf{U} := I$, a expressão (14) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)^T P + P A_{cl}(\alpha) + \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z & P B_{cl}(\alpha) \\ B_{cl}(\alpha)^T P & -\frac{\gamma^2}{m} I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

Usando o *Bounded Real Lemma* (Boyd et al., 1994), tem-se que

$$\|z(t)\|^2 < \frac{\gamma^2}{m} \|\eta(t)\|$$

para o sistema (10).

Usando a transformação de variáveis (7) e (8) e $\lambda_{\max}(U^T U \otimes I_{n_w})$, a inequação pode ser reescrita como

$$\|z(t)\|^2 < \frac{\gamma^2}{m} w(t)^T (U^T U \otimes I_{n_w}) w(t) \leq \gamma^2 \|w(t)\|, \quad (16)$$

e γ é o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema multiagente. ■

O Teorema 2 parte do princípio que a matriz K_x é tal que $A_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} K_x$ é uma matriz *Hurwitz*. O procedimento para encontrar essa matriz é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3. ((Silva et al., 2022)). Se existem matrizes $X \in \mathbb{R}^{(m-1)(2n) \times (m-1)(2n)}$, $J_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $J_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J_4 \in \mathbb{R}^{s \times n}$ e $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(m-1)(2n) \times (m-1)(2n)}$ e os parâmetros conhecidos $\xi > 0$ e $\beta > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}X + X^T \mathcal{A}^T + \bar{\mathcal{B}}R + R^T \bar{\mathcal{B}}^T & \star \\ P - X - \xi(\mathcal{A}X + \bar{\mathcal{B}}R)^T & -\xi(X + X^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

em que

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \begin{bmatrix} J_1 \\ Y J_1 + J_2 \end{bmatrix} & I_{m-1} \otimes \begin{bmatrix} J_3 \\ Y J_3 + J_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ Y &= [0_{s \times (n-s)} \quad \beta I_s] \end{aligned}$$

então $K_x = R X^{-1}$ é um ganho de realimentação de estados que assegura que $A_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} K_x$ é uma matriz *Hurwitz*.

4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

As condições LMI apresentadas neste trabalho foram testadas em simulações para mostrar o desempenho dos controladores projetados. Os algoritmos foram implementados no Matlab 7.10 (R2010a) usando as bibliotecas Yalmip (Löfberg, 2004) e Mosek (Andersen and Andersen, 2000).

O cenário simulado considerou um sistema com cinco agentes de dois estados que seguem a topologia mostrada na Figura 1. Neste caso as setas em cinza (linhas sólidas) representam uma comunicação de peso $a_{ij} = 1$ e as setas em verde e vermelho (linhas tracejadas) representam uma comunicação incerta entre os agentes com pesos possivelmente variando entre $a_{ij} \in [0, 1]$.

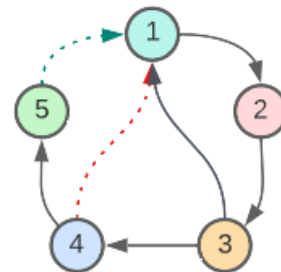


Figura 1. Grafo de topologia da rede multiagente.

Essas incertezas geram uma representação politópica da matriz Laplaciana com quatro vértices dados por

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os agentes representam o modelo dinâmico translacional de um quadricóptero adaptado de Schwager et al. (2011):

$$\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_i(t), \quad (18)$$

$$y_i(t) = [1 \ 0] x_i(t) + [0.5] w_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Os Teoremas 2 e 3 foram utilizados e projetaram os seguintes ganhos de controlador

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.1022 & -0.5517 \\ -0.5515 & -1.5618 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0.0043 \\ -0.0029 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -39.5072 & 25.9377 \\ 14.4145 & -9.4294 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} -0.3410 \\ 0.3710 \end{bmatrix}.$$

Para simular o comportamento do sistema em um cenário de comunicação incerta, a matriz $L(\alpha)$ foi projetada de forma a variar aleatoriamente tal que $L(\alpha) \in \mathcal{L}$. As seguintes condições iniciais foram consideradas na simulação: $x_1(0) = [7.6 \ -0.5]^T$, $x_2(0) = [1 \ 0.2]^T$, $x_3(0) = [3 \ -1]^T$, $x_4(0) = [4.7 \ -3]^T$ e $x_5(0) = [5.5 \ 2.5]^T$.

O sistema foi simulado com distúrbios atuando entre $t = 15s$ e $t = 30s$. Os gráficos das trajetórias dos estados dos agentes são ilustrados na Figura 2. O sistema também foi simulado para um caso em que os distúrbios atuam durante todo o período, gerando as trajetórias da Figura 3. Em ambos os casos os sinais de distúrbio $w_i(t)$ foram modelados como sinais senoidais $w_i(t) = \text{sen}(\omega_i t)$, com $\omega_i \neq \omega_j$ para $i, j = 1, \dots, 5 | i \neq j$. A Figura 4 mostra o comportamento no tempo dos parâmetros $\alpha_i(t)$ em $L(\alpha) \in \mathcal{L}$.

Os resultados da simulação mostram como, partindo de condições iniciais diferentes, os agentes alcançam o consenso e como a presença de distúrbios afeta de forma limitada a convergência dos estados, validando a metodologia proposta.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou condições em termos de LMIs que permitem projetar protocolos de consenso dinâmicos usando apenas como informação as saídas dos agentes vizinhos com garantia de consenso em sentido H_∞ . Os sistemas multiagentes analisados estão sujeitos a condições desafiadoras como distúrbios na dinâmica e na saída dos agentes e incertezas variantes no tempo na topologia de comunicação. As condições propostas para síntese de protocolos foram testadas em simulação e o consenso se mostrou robusto a todos os distúrbios e incertezas impostas. Como trabalho futuro, seria interessante estudar o pro-

blema de consenso para casos em que existem incertezas nos parâmetros dos agentes.

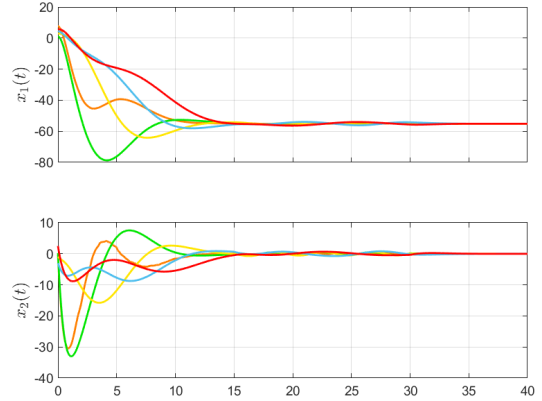


Figura 2. Trajetórias dos estados dos agentes para $w(t) \neq 0$ com $t \in [15, 30]s$, e $w(t) = 0$ caso contrário

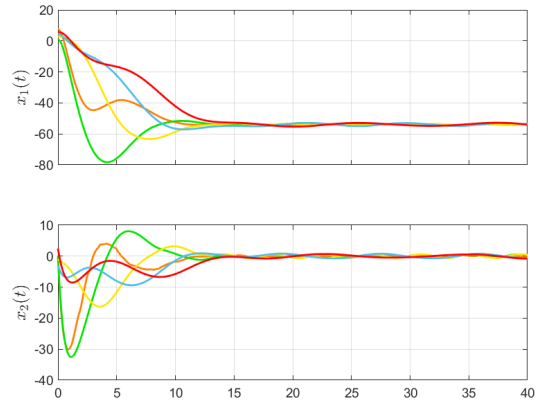


Figura 3. Trajetórias dos estados dos agentes para $w(t) \neq 0$ para todo $t > 0$

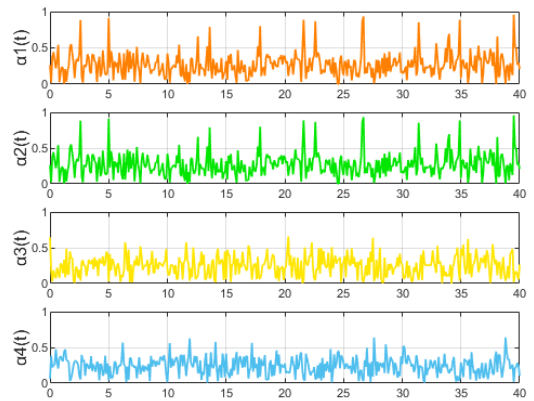


Figura 4. Variação de $\alpha_i(t)$ em $L(\alpha) \in \mathcal{L}$.

REFERÊNCIAS

- Agulhari, C.M., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2011). LMI relaxations for reduced-order robust H_∞ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6), 1532–1537.
- Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In *High performance optimization*, 197–232.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam.
- Chen, J., Shi, Z., and Zhong, Y. (2020). Robust output formation control for uncertain multi-agent systems. *International Journal of Systems Science*, 51(13), 2456–2470.
- Han, D., Chesi, G., and Hung, Y.S. (2013). Robust consensus for a class of uncertain multi-agent dynamical systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(1), 306–312.
- Huang, W., Huang, Y., and Chen, S. (2018). Robust consensus control for a class of second-order multi-agent systems with uncertain topology and disturbances. *Neurocomputing*, 313, 426–435.
- Huang, W., Zeng, J., and Sun, H. (2015). Robust consensus for linear multi-agent systems with mixed uncertainties. *Systems & Control Letters*, 76, 56–65.
- Lewis, F., Zhang, H., Hengster-Movric, K., and Das, A. (2013). *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. Communications and Control Engineering. Springer London. URL <https://books.google.com.br/books?id=-jW3BAAAQBAJ>.
- Li, D., Ge, S.S., He, W., Ma, G., and Xie, L. (2019a). Multilayer formation control of multi-agent systems. *Automatica*, 109, 108558.
- Li, X., Soh, Y.C., and Xie, L. (2017a). Output-feedback H_∞ consensus of linear multi-agent systems over general directed graphs. In *2017 13th IEEE International Conference on Control Automation (ICCA)*, 689–694.
- Li, X., Soh, Y.C., and Xie, L. (2017b). Output-feedback protocols without controller interaction for consensus of homogeneous multi-agent systems: A unified robust control view. *Automatica*, 81, 37–45.
- Li, X., Soh, Y.C., and Xie, L. (2018). Robust consensus of uncertain linear multi-agent systems via dynamic output feedback. *Automatica*, 98, 114–123.
- Li, X., Soh, Y.C., and Xie, L. (2019b). A novel reduced-order protocol for consensus control of linear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(7), 3005–3012.
- Li, Z., Liu, X., Lin, P., and Ren, W. (2011). Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols. *Systems & Control Letters*, 60(7), 510–516.
- Liu, X., Xie, Y., Li, F., Huang, T., Gui, W., and Li, W. (2019). Admissible H_∞ control of linear descriptor multi-agent systems with external disturbances. *Neurocomputing*, 359, 241–248.
- Liu, Y. and Hou, X. (2019). Event-triggered consensus control of disturbed multi-agent systems using output feedback. *ISA transactions*, 91, 166–173.
- Liu, Y. and Jia, Y. (2010). H_∞ Consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol. *International Journal of Control*, 83(3), 527–537.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, volume 3. Taipei, Taiwan.
- Lv, Y., Li, Z., Duan, Z., and Feng, G. (2017). Novel distributed robust adaptive consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs and external disturbances. *International Journal of Control*, 90(2), 137–147.
- Olfati-Saber, R., Fax, J.A., and Murray, R.M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 215–233.
- Schwager, M., Michael, N., Kumar, V., and Rus, D. (2011). Time scales and stability in networked multi-robot systems. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3855–3862.
- Silva, B.M., Ishihara, J.Y., and Tognetti, E.S. (2022). LMI-based consensus of linear multi-agent systems by reduced-order dynamic output feedback. *ISA transactions*. doi:<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.02.044>.
- Sujil, A., Verma, J., and Kumar, R. (2018). Multi agent system: concepts, platforms and applications in power systems. *Artificial Intelligence Review*, 49(2), 153–182.
- Wang, X., Wang, H., Li, C., Huang, T., and Kurths, J. (2020a). Improved consensus conditions for multi-agent systems with uncertain topology: The generalized transition rates case. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7(3), 1158–1169.
- Wang, Y., Cheng, Z., and Xiao, M. (2020b). UAVs' formation keeping control based on multi-agent system consensus. *IEEE Access*, 8, 49000–49012.
- Xue, X., Wu, F., and Yuan, C. (2019a). Robust consensus for linear multi-agent systems with structured uncertainties. *International Journal of Control*, 1–12.
- Xue, X., Yuan, C., and Wu, F. (2019b). Convexified H_∞ output-feedback consensus synthesis for linear multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 13(11), 1619–1628.
- Yang, L. and Yingmin, J. (2012). h_∞ consensus control for multi-agent systems with linear coupling dynamics and communication delays. *International Journal of Systems Science*, 43(1), 50–62.
- Zhao, Y. and Zhang, W. (2017). Guaranteed cost consensus protocol design for linear multi-agent systems with sampled-data information: An input delay approach. *ISA transactions*, 67, 87–97.