

# Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Politópicos de Tempo-Discreto com Atraso nos Estados<sup>\*</sup>

Elizandra K. Odorico<sup>\*</sup> Marco H. Terra<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SP, (e-mails: elizandra.odorico@usp.br e terra@sc.usp.br).

**Abstract:** This paper deals with recursive robust regulator problem for polytopic discrete-time systems with state delay. We assume all matrices of the system are subject to polytopic uncertainties. Based on the augmented approach, the delay system is converted to an augmented delay-free polytopic linear system. The state-feedback control is then obtained by the convex optimization problem in which the polytope vertices are weighted altogether. The provided solution is given in terms of augmented Riccati equations presented through a symmetric matrix arrangement. With a numerical example, we evaluate the proposed control and compare its performance with other control approaches.

**Resumo:** Este artigo trata o problema de regulador robusto recursivo para sistemas politópicos de tempo discreto com atraso no estado. Assumimos que todas as matrizes do sistema estão sujeitas a incertezas politópicas. Baseado na abordagem aumentada, o sistema com atraso é convertido em um sistema linear sem atraso aumentado. O controle de realimentação de estado é obtido por um problema de otimização convexa na qual os vértices do politopo são ponderados juntos. A solução fornecida é dada em termos de equações de Riccati aumentadas apresentadas através de um arranjo matricial simétrico. Com um exemplo numérico, avaliamos o controle proposto e comparamos seu desempenho com outras abordagens de controle.

**Keywords:** System with state delay; linear discrete-time system; polytopic uncertainties; recursive robust regulator; Riccati equation.

**Palavras-chaves:** Sistema com atraso no estado; sistema linear de tempo discreto; incerteza politópica; regulador robusto recursivo; equação de Riccati.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de controladores de sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas tem despertado interesse de muitos pesquisadores desde a década de 70. Incertezas paramétricas aparecem em protocolos de transmissão de dados (Song et al. (2019)), tecnologia veicular (Nguyen et al. (2018)), sistemas de energia (Cui et al. (2017)), entre outros. Incertezas têm sido modeladas como sendo limitadas em norma (Garcia et al. (1994)) ou pertencentes a um domínio politópico (Oliveira and Peres (2008)).

Adicionalmente, o problema de controladores de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas torna-se teoricamente mais envolvente na presença de atrasos nos estados, o que pode aparecer em boa parte dos sistemas de controle. Por exemplo, em Caballero-Barragán et al. (2018) que apresentou um modelo de reator tubular em escala piloto descrito por um sistema linear variante no tempo com atraso no estado.

Uma abordagem clássica para projetar sistemas de controle com atrasos nos estados é chamada de abordagem aumentada, que permite que essa classe de sistemas seja transformada em um sistema livre de atrasos [Fridman (2014) e Bortolin et al. (2018b)]. Desta forma, o novo sistema com espaço de estado aumentado pode ser analisado de acordo com métodos padrão para sistemas livre da presença de atraso.

Fridman (2014) aplicou a abordagem aumentada em sistema com atraso constante e propôs uma solução para o problema do regulador linear quadrático (RLQ) de horizonte finito. Mais recentemente, Bortolin et al. (2018b) estenderam o problema RLQ para lidar com incertezas limitadas em norma em todas as matrizes do sistema, e em Bortolin et al. (2018a) trataram o atraso desconhecido variante no tempo.

Por outro lado, abordagens de controladores de sistemas sujeitos a incertezas politópicas e atraso nos estados têm sido amplamente investigadas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês, Linear Matrix Inequalities). Em particular, Leite et al. (2004) propuseram condições convexas que asseguram a existência de um ganho de realimentação de estado para sistemas lineares pertencentes a um domínio politópico, garantindo a estabi-

<sup>\*</sup> Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) sob o processo 88882.328949/2019-01.

lidade robusta independentemente do valor do atraso. Em Miranda et al. (2010), os autores estabeleceram, de modo semelhante, uma lei de controle para sistemas sujeitos a atrasos variante e invariante no tempo.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é propor um regulador robusto recursivo (RRR) que garanta estabilidade e desempenho na presença de incertezas politópicas e atraso nos estados. A metodologia consiste em converter o sistema politópico com atraso no estado (SPAÉ) em um sistema linear politópico (SLP) aumentado livre da presença de atraso. Portanto, os resultados obtidos para o sistema politópico sem atraso podem ser aplicados ao sistema original com atraso.

Assim, o regulador robusto recursivo é projetado através de uma abordagem robusta com incertezas politópicas (Bueno et al. (2021)), que combina funções de penalidade e mínimos quadrados regularizados sujeitos a incertezas. A lei de controle recursiva de realimentação de estado proposta é útil para aplicações em tempo real, uma vez que não é necessário utilizar nenhum pacote de otimização numérica para verificar, por exemplo, a viabilidade da solução de controle.

As soluções recursivas são estabelecidas por meio de equações de Riccati aumentadas apresentadas tanto em um arranjo matricial simétrico quanto através de uma expressão algébrica explícita que, no limite do ajuste do parâmetro de penalidade  $\bar{\mu}$ , o resultado ótimo relacionado com o problema de otimização restrito original, é obtido. A solução, então, se assemelha ao padrão do RLQ para sistemas lineares sem incertezas paramétricas (Lancaster and Rodman (1995)).

**Notações:** Seja  $\mathbb{R}^n$  o conjunto de  $n$  vetores dimensionais com elementos em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^{n \times m}$ , para o conjunto de matrizes reais com dimensão  $n \times m$ .  $I$  e  $I_n$  são as matrizes identidade de dimensão apropriada e  $n \times n$ , respectivamente.  $0_n$  é a matriz nula  $n \times n$ . O operador de produto Kronecker é denotado  $\otimes$ , enquanto que  $\mathbf{1}_n := [1 \dots 1]^T \in \mathbb{R}^n$ . O sobrescrito  $T$  denota transposição de matrizes. Seja  $P \succ 0$  ( $P \succeq 0$ ) uma matriz real simétrica positiva (semi)definida. A matriz  $\text{diag}(A_1, \dots, A_s)$  representa um bloco matricial diagonal constituído por  $\{A_1, \dots, A_s\}$ . A norma euclidiana quadrática ponderada de  $x$  é denotada por  $\|x\|_P^2 = x^T P x$ . Adotamos, por simplicidade, a notação  $X^T P X = X^T P(\bullet)$ .

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o sistema politópico de tempo-discreto com atraso no estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{0,k} + \delta A_k)x_k + (A_{d,0,k} + \delta A_{d,k})x_{k-d} + (B_{0,k} + \delta B_k)u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atrasado de  $d$  amostras e  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle. Assume-se que o atraso  $d$  é um inteiro positivo invariante no tempo e  $x_k = \varphi_0(k)$  denota a condição inicial para  $k = -d, -d+1, \dots, 0$ .

As matrizes  $A_{0,k}, A_{d,0,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{0,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e  $\delta A_k, \delta A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são

incertezas paramétricas politópicas descritas da seguinte forma:

$$[\delta A_k \quad \delta A_{d,k} \quad \delta B_k] = \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_{\ell,k} [A_{\ell,k} \quad A_{d,\ell,k} \quad B_{\ell,k}], \quad (2)$$

sendo  $A_{\ell,k}, A_{d,\ell,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\ell,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  os vértices conhecidos e  $\alpha_k := [\alpha_{1,k} \dots \alpha_{\nu,k}]$  os coeficientes desconhecidos pertencentes ao simplex unitário

$$\Lambda_{\nu} := \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^{\nu} : \alpha_{\ell,k} \geq 0 \text{ e } \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_{\ell,k} = 1 \right\}. \quad (3)$$

Consideramos o seguinte controle de realimentação de estado que regula o SPAÉ (1),

$$u_k = \mathcal{K}_k z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (4)$$

onde  $\mathcal{K}_k = [K_{0,k} \quad K_{1,k} \dots K_{d,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ , com  $n_d = dn + n$ , é o ganho a ser determinado e  $z_k$  é o estado aumentado, relacionado à condição inicial  $z_0$ ,

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d+1} \\ x_{k-d} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z_0 := \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d+1) \\ \varphi_0(-d) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Observação 1. O ganho de realimentação de estado  $\mathcal{K}_k$  fornece com o estado aumentado  $z_k$ , a mesma entrada  $u_k$  para regular o sistema politópico com atraso conhecido e invariante no tempo.

### 2.1 ABORDAGEM DE SISTEMA AUMENTADO

O Sistema (1), com o estado aumentado (5), pode ser representado como um sistema linear politópico livre de atraso no estado,

$$z_{k+1} = (F_{0,k} + \delta F_k)z_k + (G_{0,k} + \delta G_k)u_k, \quad (6)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde as matrizes de parâmetros incertos pertencem ao seguinte politopo

$$[\delta F_k \quad \delta G_k] = \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_{\ell,k} [F_{\ell,k} \quad G_{\ell,k}]. \quad (7)$$

As matrizes aumentadas  $F_{\ell,k}, \delta F_k \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $G_{\ell,k}, \delta G_k \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ , para  $\ell = 0, 1, \dots, \nu$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} F_{\ell,k} &:= \begin{bmatrix} A_{\ell,k} & \overbrace{0 \dots 0}^{d-1} & A_{d,\ell,k} \\ \hline I_{dn} & & 0_{dn \times n} \end{bmatrix}, \quad G_{\ell,k} := \begin{bmatrix} B_{\ell,k} \\ \hline 0_{dn \times m} \end{bmatrix}, \\ \delta F_k &:= \begin{bmatrix} \delta A_k & \overbrace{0 \dots 0}^{d-1} & \delta A_{d,k} \\ \hline 0_{dn} & & 0_{dn \times n} \end{bmatrix}, \quad \delta G_k := \begin{bmatrix} \delta B_k \\ \hline 0_{dn \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $d-1$  é o número de matrizes nulas entre  $A_{\ell,k}$  e  $A_{d,\ell,k}$ , com  $\ell = 0, 1, \dots, \nu$ . Quando essa quantidade é igual a  $-1$ , então o primeiro bloco de  $F_{\ell,k}$  é  $A_{\ell,k} + A_{d,\ell,k}$ . Uma observação análoga é válida para a matriz  $\delta F_k$ .

Deve-se notar que o sistema politópico com atraso no estado (1) pode ser transformado em um SLP aumentado

livre da presença de atraso (6), sendo o tempo de atraso  $d$  utilizado para definir a estrutura das matrizes do sistema aumentado. Em Fridman (2014) e Bortolin et al. (2018b), para resolver o problema de controle para o sistema linear com atraso nos estados, o método de elevação foi adotado.

### 2.2 PROBLEMA DE CONTROLE RECURSIVO

O objetivo deste trabalho consiste em determinar as sequências de controle ótimas de realimentação de estado  $\mathcal{U} = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  que regulam o Sistema (1) sujeito a incertezas politópicas e atrasos nos estados. Como o Sistema (1) é equivalente a um SLP (6), o problema de controle pode ser desenvolvido em termos do SLP (6).

Baseado em Bueno et al. (2021), consideramos o seguinte problema de otimização min-max restrito, em que a função custo quadrática ao longo da sequência de trajetória  $z_k$  deve ser minimizada sob a máxima influência das incertezas politópicas  $\{\delta F_k, \delta G_k\}$ :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{\delta F_k, \delta G_k} J_N(z_{k+1}, u_k) \quad (9)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} I_{n_d} \\ \vdots \\ I_{n_d} \end{bmatrix} z_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{0,k} + \nu \delta F_{1,k} \\ \vdots \\ F_{0,k} + \nu \delta F_{\nu,k} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} G_{0,k} + \nu \delta G_{1,k} \\ \vdots \\ G_{0,k} + \nu \delta G_{\nu,k} \end{bmatrix} u_k, \quad (10)$$

onde

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T \mathcal{P}_N z_N + \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T \mathcal{Q}_k z_k + u_k^T \mathcal{R}_k u_k), \quad (11)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde as matrizes de ponderação  $\mathcal{P}_N, \mathcal{Q}_k \succeq 0$  e  $\mathcal{R}_k \succ 0$  e as incertezas paramétricas politópicas  $\delta F_{\ell,k} := \alpha_{\ell,k} F_{\ell,k}$  e  $\delta G_{\ell,k} := \alpha_{\ell,k} G_{\ell,k}$ , para  $\ell = 1, \dots, \nu$ . Além disso, observe que os vértices do politopo  $\{F_{\ell,k}, G_{\ell,k}\}$ ,  $\ell = 1, \dots, \nu$ , estão expressados em uma forma unificada na restrição do problema de otimização (9)-(11). No entanto, pré-multiplicando ambos os lados da restrição por  $\mathbf{1}_\nu^T \otimes I_{n_d}$ , segue que

$$\nu z_{k+1} = \left( \nu F_{0,k} + \nu \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_{\ell,k} F_{\ell,k} \right) z_k + \left( \nu G_{0,k} + \nu \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_{\ell,k} G_{\ell,k} \right) u_k,$$

que corresponde ao SLP (6).

A seguir será apresentado o problema robusto de mínimos quadrados regularizados com incertezas politópicas que auxilia na obtenção da solução do problema de otimização min-max (9)-(11).

### 3. MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS ROBUSTOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Considere o problema de obter o valor mínimo de um vetor desconhecido  $x \in \mathbb{R}^s$  sob a máxima influência das incertezas politópicas  $\delta \mathcal{A}$  e  $\delta b$ , de acordo com o seguinte problema de mínimos quadrados regularizados com incerteza pertencentes ao domínio politópico:

$$\min_x \max_{\delta \mathcal{A}, \delta b} \mathcal{F}(x) \quad (12)$$

com a função de custo quadrática dada por

$$\mathcal{F}(x) = \|x\|_Q^2 + \|(\mathcal{A}_0 + \delta \mathcal{A})x - (b_0 + \delta b)\|_W^2 \quad (13)$$

onde  $\mathcal{A}_0 \in \mathbb{R}^{r \times s}$  é uma matriz conhecida,  $b_0 \in \mathbb{R}^r$  é um vetor de medição, e  $Q \succ 0$  e  $W \succ 0$  são matrizes de ponderação. As incertezas  $\delta \mathcal{A}$  e  $\delta b$  pertencem a um domínio poliédrico descrito por

$$\Pi_\nu := \left\{ [\delta \mathcal{A} \ \delta b] = H \sum_{\ell=1}^{\nu} \alpha_\ell [\mathcal{A}_\ell \ b_\ell], \alpha \in \Lambda_\nu \right\}, \quad (14)$$

onde  $H$  é uma matriz constante de dimensão adequada (note que  $H$  pode ser diretamente substituível por uma matriz identidade, mas sua presença auxiliará na estrutura descrita nesta seção),  $\mathcal{A}_\ell$  e  $b_\ell$  são os vértices conhecidos do politopo e  $\Lambda_\nu$  é o simplex unitário definido em (3).

Para resolver o problema de otimização (12), aplicamos o método da função de penalidade (Luenberger and Ye (2008)), onde todos os vértices do politopo são inseridos de uma forma unificada na função custo, através do parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ . Assim, qualquer violação desta restrição será penalizada por este parâmetro.

O procedimento para resolver o problema de otimização (12)-(13) consiste em, iterativamente, obter uma solução ótima  $x^*$  para (12)-(13), à medida que a sequência  $\{\mu_k\}$  tende ao infinito, de acordo com Luenberger and Ye (2008). Caso contrário,  $x_\mu^*$  é uma solução subótima para o problema de otimização.

Soluções do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (12)-(13) foram propostas por Sayed (2001) e Cerri and Terra (2017) que trataram de incertezas modeladas limitadas em norma. Por outro lado, Bueno et al. (2021) reescreveu essa solução em um arranjo matricial simétrico para tratar incertezas politópicas, conforme mostrado no próximo resultado.

Lema 2. Considere o problema de otimização (12)-(13) e suponha que  $\widehat{W} \succ 0$ . Então, para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $x^*$ , e o valor mínimo  $\mathcal{F}(x^*)$  para o problema de otimização (12)-(13) são dados por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ \mathcal{F}(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_0 \\ 0 & \hat{b}_\nu \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I_s \\ 0 & \widehat{W}^{-1} & 0 & \mathcal{A}_0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I & \hat{A}_\nu \\ I_s & \mathcal{A}_0^T & \hat{A}_\nu^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ \hat{b}_\nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde  $\hat{A}_\nu := [\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_\nu]^T$ ,  $\hat{b}_\nu := [b_1 \dots b_\nu]^T$ ,  $\widehat{W}^{-1} := \mu^{-1} I - \hat{\lambda}^{-1} H H^T$  e  $\hat{\lambda} = \beta \| \mu H^T H \|$ , para algum  $\beta > 1$ .

**Prova.** Segue da solução apresentada em termos de um arranjo matricial simétrico por Cerri and Terra (2017), a qual é reescrita por Bueno et al. (2021) para tratar as incertezas politópicas. De acordo com Nikoukhah et al. (1992, Lemma 2.1) é garantida a invertibilidade do bloco matricial central em (15).  $\diamond$

Observação 3. Consideramos uma aproximação prática para o multiplicador de Lagrange  $\hat{\lambda}$  em (15), proposto por Sayed (2001), selecionando  $\hat{\lambda} = \beta \| \mu H^T H \|$ , para algum  $\beta > 1$ .

#### 4. REGULADOR ROBUSTO RECURSIVO PARA SISTEMAS POLITÓPICOS COM ATRASO NO ESTADO

Nesta seção, apresentamos o RRR para sistemas politópicos de tempo discreto com atraso nos estados, redefinido como um sistema politópico aumentado. A solução para o SLP é obtida a partir da abordagem robusta de mínimos quadrados regularizados com incertezas politópicas. Desta forma, através da aplicação do princípio de otimalidade de Bellman, o problema de otimização (9) é dividido em problemas de otimização min-max de um passo, de modo que a programação dinâmica fornece uma solução. Assim, para cada passo de tempo  $k = N, \dots, 0$ , considere o seguinte problema de otimização de um passo:

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_k, \delta G_k} J_k(z_{k+1}, u_k) \quad (16)$$

sujeito a (10),

onde  $J_k(z_{k+1}, u_k) = z_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} z_{k+1} + z_k^T \mathcal{Q}_k z_k + u_k^T \mathcal{R}_k u_k$ .

Pelo método da função de penalidade, a restrição do problema (16) é inserida na função objetivo e ponderada por um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ . Portanto, para cada  $\mu > 0$ , o problema restrito (16) pode ser reescrito como

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_k, \delta G_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (17)$$

com o funcional de custo quadrático dado por

$$\mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} & -(G_{0,k} + \nu \delta G_{1,k}) \\ \vdots & \vdots \\ I_{n_d} & -(G_{0,k} + \nu \delta G_{\nu,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{0,k} + \nu \delta F_{1,k} \\ \vdots \\ F_{0,k} + \nu \delta F_{\nu,k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \times \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_k & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d \nu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Observe que o problema de otimização irrestrito (17)-(18) é uma aproximação do problema de otimização restrito (16) em cada passo  $k$ , obtido pelo método da função de penalidade. Além disso, (17)-(18) é um caso particular do problema robusto de mínimos quadrados regularizados com incertezas politópicas (12)-(13) quando são realizadas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}, \quad Q \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix}, \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_k & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d \nu} \end{bmatrix}, \\ A_0 &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{0,k} \\ \vdots & \vdots \\ I_{n_d} & -G_{0,k} \end{bmatrix}, \quad \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\nu \delta G_{1,k} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -\nu \delta G_{\nu,k} \end{bmatrix}, \quad b_0 \leftarrow \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{0,k} \\ \vdots \\ F_{0,k} \end{bmatrix} z_k, \\ \delta b &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \delta F_{1,k} \\ \vdots \\ \nu \delta F_{\nu,k} \end{bmatrix} z_k, \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_d \nu} \end{bmatrix}, \quad A_\ell \leftarrow [0 \quad -\nu G_{\ell,k}] \\ &\text{e } b_\ell \leftarrow \nu F_{\ell,k} z_k, \quad \ell = 1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

O próximo resultado fornece a solução do problema de otimização (17)-(18) em termos de um arranjo matricial

simétrico para calcular a trajetória de estado ótima, o controle de entrada e a função custo.

Lema 4. Considere o problema de otimização min-max (17) com a função custo (18), para  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$  fixados. Suponha que  $\text{diag}(\Phi_1, \Phi_2) \succeq 0$ ,  $G_{\ell,k}$  tem posto linha completo e  $z_0$  e  $\mathcal{P}_N \succeq 0$  são dados. Assim, o regulador robusto recursivo para SLP (6), que engloba incertezas politópicas e atraso do Sistema (1), é dado por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu, k} \\ \mathcal{K}_{\mu, k} \\ \mathcal{P}_{\mu, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (19)$$

onde, para  $k = N-1, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $\mathcal{L}_{\mu, k}$ , o ganho de realimentação  $\mathcal{K}_{\mu, k}$  e a solução da equação de Riccati  $\mathcal{P}_{\mu, k}$  são obtidos de (20).

Observação 5. O parâmetro  $\hat{\lambda}$  é aproximado por  $\hat{\lambda} = \beta \mu$  para cada  $\mu \in (0, \infty)$  e algum  $\beta > 1$ . Em geral, assumindo  $\beta \in (1, 2]$  levam a resultados apropriados. Desta forma, o parâmetro de penalidade  $\mu$  e a variável  $\hat{\lambda}$  podem ser compreendidos como parâmetros de robustez sob os quais a regulação robusta é obtida.

Observação 6. O método da função de penalidade garante que quando o parâmetro de penalidade  $\mu \rightarrow \infty$ , a solução para o problema irrestrito (17)-(18) aproxima a solução do problema restrito original (16). Neste caso, a solução para (17)-(18) fornece a trajetória de estado ótima  $z_{k+1}^*$  e a entrada de controle  $u_k^*$ , que não dependem mais de  $\mu$ . Consequentemente,  $\Phi_i \rightarrow \infty$ , com  $i = 1, 2$ , em (20). Neste caso, deve-se observar que a matriz  $\hat{G}_{\nu, k}$  deve ser posto linha pleno para satisfazer (20).

O Algoritmo 1 apresenta o regulador robusto recursivo para sistemas com incertezas politópicas e atraso nos estados.

---

#### Algoritmo 1 Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Politópicos com Atraso no Estado

---

Determinar os parâmetros do SPAE:  $A_{i,k}$ ,  $A_{d,i,k}$  e  $B_{i,k}$ , para  $i = 0, 1, \dots, \nu$ .

**Sistema Linear Politópico Aumentado :** Definir o vetor de estado aumentado  $z_k$  e as matrizes paramétricas  $F_{i,k}$ ,  $G_{i,k}$ , para  $i = 0, 1, \dots, \nu$ , de acordo com (5)-(8).

#### Regulador Robusto Recursivo:

*Condições iniciais:* Seja  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$  e  $\mathcal{P}_N \succeq 0$ .

Calcular para todo  $k = N-1, \dots, 0$ :

$\mathcal{L}_{\mu, k}$ ,  $\mathcal{K}_{\mu, k}$  e  $\mathcal{P}_{\mu, k}$  via (20).

**SPAE:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N-1$ :

$x_{k+1} = (A_{0,k} + \delta A_k)x_k + (A_{d,0,k} + \delta A_{d,k})x_{k-d} + (B_{0,k} + \delta B_k)u_k$ ,  
 com  $u_k = \mathcal{K}_{\mu, k} z_k$ .

---

Observação 7. Observe que o arranjo matricial simétrico (20) no Lema 4 também representa um sistema de equações simultâneas. Portanto, o regulador robusto recursivo pode ser reescrito como uma expressão algébrica de Riccati, conforme descrito no próximo resultado.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F}_{0,k} \\ 0 & 0 & \hat{F}_{\nu,k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ I_{n_d} & -\mathcal{P}_{k+1,\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & -\mathcal{Q}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & \hat{I} & -\hat{G}_{0,k} & \hat{F}_{0,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & -\hat{G}_{\nu,k} & \hat{F}_{\nu,k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & -\hat{G}_{0,k}^T & -\hat{G}_{\nu,k}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ 0 \\ \hat{F}_{0,k} \\ \hat{F}_{\nu,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde  $\Phi_1 := \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d\nu}$ ,  $\Phi_2 := (\beta\mu)^{-1}I_{n_d\nu}$ ,  $\beta > 1$ ,  $\hat{F}_{0,k} := \mathbf{1}_\nu^T \otimes F_{0,k}$ ,  $\hat{G}_{0,k} := \mathbf{1}_\nu^T \otimes G_{0,k}$ ,

$$\hat{I} := \mathbf{1}_\nu^T \otimes I_{n_d}, \hat{F}_{\nu,k} := \begin{bmatrix} \nu F_{1,k} \\ \vdots \\ \nu F_{\nu,k} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{G}_{\nu,k} := \begin{bmatrix} \nu G_{1,k} \\ \vdots \\ \nu G_{\nu,k} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 8.** Considere o problema de otimização (17) com a função custo (18). A solução algébrica recursiva, para cada passo  $k$  e cada  $\bar{\mu} > 0$ , é dada por:

$$\mathcal{P}_k = \bar{F}_k^T \left( \mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1} \bar{G}_k (I_m + \bar{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \bar{G}_k)^{-1} \bar{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \right) \bar{F}_k + \bar{Q}_k$$

com

$$\begin{aligned} \bar{F}_k &= F_{0,k} - G_{0,k} \mathcal{R}_k^{-1} \hat{G}_{\nu,k}^T (\Phi_2 + \hat{G}_{\nu,k} \mathcal{R}_k^{-1} \hat{G}_{\nu,k}^T)^{-1} \hat{F}_{\nu,k}, \\ \bar{R}_k &= \mathcal{R}_k^{-1} - \mathcal{R}_k^{-1} \hat{G}_{\nu,k}^T (\Phi_2 + \hat{G}_{\nu,k} \mathcal{R}_k^{-1} \hat{G}_{\nu,k}^T)^{-1} \hat{G}_{\nu,k} \mathcal{R}_k^{-1}, \\ \bar{Q}_k &= Q_k + \hat{F}_{\nu,k}^T (\Phi_2 + \hat{G}_{\nu,k} \mathcal{R}_k^{-1} \hat{G}_{\nu,k}^T)^{-1} \hat{F}_{\nu,k}, \\ \Phi_2 &= \bar{\mu}^{-1} I_{n_d\nu} \text{ e } \bar{G}_k = G_{0,k} \bar{R}_k^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Prova.** Segue de manipulações algébricas das expressões apresentadas em (20).  $\diamond$

### 5. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, o desempenho do regulador robusto recursivo (Lema 4) é avaliado através de um exemplo numérico. Comparamos o resultado proposto com outras abordagens apresentadas na literatura.

**Exemplo 9.** Considere o SPAE (1)-(2) com as incertezas pertencentes ao politopo de dois vértices (estudado em Leite et al. (2004)),

$$\begin{aligned} A_{0,k} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,6 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}, A_{d,0,k} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, B_{0,k} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \\ A_{1,k} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A_{d,1,k} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B_{1,k} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 \end{bmatrix}, \\ A_{2,k} &= -A_{1,k}, A_{d,1,k} = -A_{d,2,k} \text{ e } B_{1,k} = -B_{1,k}, \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

e a condição inicial  $\varphi_0(k) = [1 \ -0.5]^T$ , para todo  $k \leq 0$ . Assume-se as seguintes matrizes de ponderação, definidas em (11),  $\mathcal{P}_N = Q_k = R_k = I_{n_d}$ .

Avaliamos o regulador robusto recursivo proposto (Lema 4) para SPAE, comparando seu desempenho com duas abordagens baseadas em LMI: um ganho de realimentação sem memória com estabilização quadrática proposto por Leite et al. (2004, Corolário 2) e um controlador independentes de atraso desenvolvido em Miranda et al. (2010, Teorema 2).

Todas as rotinas foram executadas no software MATLAB, versão 9.8 (R2020a), utilizando a plataforma Yalmip (Löfberg (2004)), com o solver SeDuMi (Sturm (1999)), para

a resolução das LMIs. Para a etapa de inicialização do Algoritmo 1, assumimos

$$\mu = 10^{12}, \beta = 1,5 \text{ e } \mathcal{P}_N = I_{n_d}.$$

Para realizar esta comparação, consideramos dois cenários para o atraso nos estados:  $d = 1$  e  $d = 10$ . Os resultados obtidos estão ilustrados nas Figuras 1 e 2. Em todos os gráficos foram realizados  $T = 1000$  experimentos Monte Carlo. Em cada experimento  $j$ , os coeficientes  $\alpha_{\ell,k}$  que pertencem ao simplex unitário  $\Lambda_\nu$ , são selecionados aleatoriamente para cada instante de tempo  $k$ .

Os ganhos de realimentação derivados de Leite et al. (2004, Corolário 2) e Miranda et al. (2010, Teorema 2) foram calculados considerando os vértices do politopo da seguinte forma:  $A_{1,k} = A_{0,k} + A_{1,k}$  e  $A_{2,k} = A_{0,k} + A_{2,k}$ . Analogamente, podemos reescrever os vértices  $A_{d,1,k}$ ,  $A_{d,2,k}$ ,  $B_{1,k}$  e  $B_{2,k}$ . Uma vez que o sistema politópico considerado por Leite et al. (2004) e Miranda et al. (2010),  $A_{0,k}$  é uma matriz nula no Sistema (1).

Nas Figuras 1 e 2 é possível observar que, para os dois cenários de atraso, o RRR proposto apresentou rápida convergência quando comparado com as abordagens baseadas em LMIs. Além disso, no segundo caso de atraso, os desempenhos de ambos os reguladores são afetados com o aumento do atraso, porém, as abordagens de Leite et al. (2004) e Miranda et al. (2010) apresentam sobressinais mais acentuados em comparação com o RRR proposto.

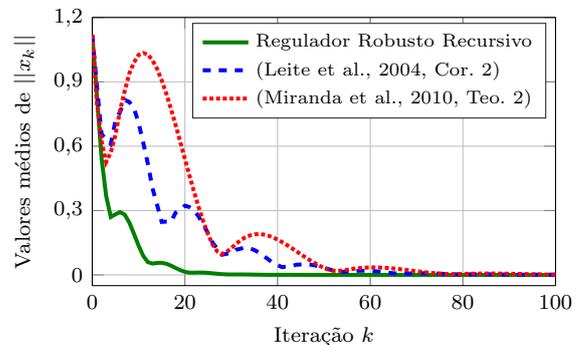


Figura 1. Comparação dos valores médios da norma do estado regulado quando  $d = 1$ .

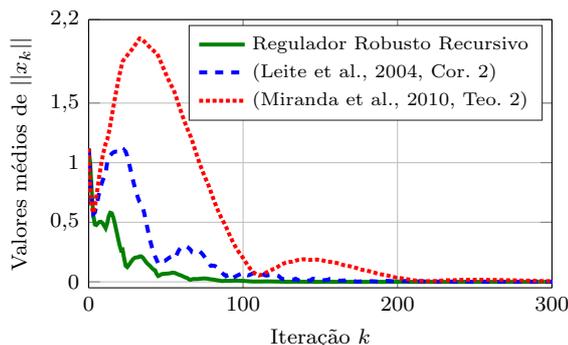


Figura 2. Comparação dos valores médios da norma do estado regulado quando  $d = 10$ .

Os ganhos de realimentação  $\mathcal{K}_{RRR}^*$ ,  $\mathcal{K}_L^*$  e  $\mathcal{K}_M^*$ , considerando  $d = 1$ , obtidos pelo regulador robusto recursivo e as abordagens baseadas em LMI [Leite et al. (2004, Cor. 2) e Miranda et al. (2010, Thm. 2)], respectivamente, são dadas por:

$$\mathcal{K}_{RRR}^* = \begin{bmatrix} 3,9707 & 0,1695 & 1,8311 & 0,9379 \\ -5,3076 & -0,2460 & -2,4547 & -1,2572 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_L^* = \begin{bmatrix} 4,6907 & -0,4151 \\ -6,2837 & 0,6122 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{K}_M^* = \begin{bmatrix} 4,8870 & -1,3413 \\ -6,5019 & 1,7582 \end{bmatrix}.$$

## 6. CONCLUSÕES

Propusemos um regulador robusto recursivo para sistemas politópicos com atraso constante conhecido no estado. Baseado na abordagem aumentada, o SPAE foi reformulado como um SLP aumentado sem atraso. Em seguida, o problema de síntese do controlador é resolvido e o algoritmo é apresentado em termos de um arranjo matricial simétrico, que é adequado para aplicações em tempo real. Os resultados dos experimentos computacionais mostraram a eficácia do RRR em comparação com abordagens desenvolvidas com base em desigualdades matriciais lineares, destacando sua vantagem em aplicações onde o atraso é relativamente grande. Em trabalhos futuros, planejamos estender esse regulador robusto recursivo para lidar com atraso variante no tempo.

## REFERÊNCIAS

Bortolin, D.C., Gagliardi, G.M., and Terra, M.H. (2018a). Recursive robust regulator for uncertain linear systems with random state delay based on markovian jump model. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 6228–6233.

Bortolin, D.C., Odorico, E.K., and Terra, M.H. (2018b). Robust linear quadratic regulator for uncertain linear discrete-time systems with delay in the states: an augmented system approach. In *2018 European Control Conference (ECC)*, 1578–1583.

Bueno, J.N.A.D., Rocha, K.D.T., and Terra, M.H. (2021). Robust recursive regulator for systems subject to polytopic uncertainties. *IEEE Access*, 9, 139352–139360.

Caballero-Barragán, H., Osuna-Ibarra, L., Sanchez, A., and Loukianov, A. (2018). Semi-empirical modelling of the mass flow in a pilot-scale tubular reactor and tracking control. *Journal of Process Control*, 69, 79–85.

Cerri, J.P. and Terra, M.H. (2017). Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 6004 – 6011.

Cui, Y., Xu, L., Fei, M., and Shen, Y. (2017). Observer based robust integral sliding mode load frequency control for wind power systems. *Control Engineering Practice*, 65, 1–10.

Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: analysis and control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Basel, 1 edition.

Garcia, G., Bernussou, J., and Arzelier, D. (1994). Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 22(5), 327–339.

Lancaster, P. and Rodman, L. (1995). *Algebraic Riccati Equations*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford.

Leite, V.J.S., Tarbouriech, S., and Peres, P.L.D. (2004). A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, 2870–2875. IEEE, Boston.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan. URL [yalmip.github.io](http://yalmip.github.io).

Luenberger, D.G. and Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, New York, 3rd edition. Chap. 13.

Miranda, M.F., Leite, V.J.S., and Caldeira, A.F. (2010). Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 152–157.

Nguyen, A.T., Zhang, H., Sentouh, C., and Popieul, J.C. (2018). Input-constrained lpv output feedback control for path following of autonomous ground vehicles. In *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, 3233–3238.

Nikoukhah, R., Willsky, A.S., and Levy, B.C. (1992). Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1325–1342.

Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D. (2008). Robust stability analysis and control design for time-varying discrete-time polytopic systems with bounded parameter variation. In *2008 American Control Conference*, 3094–3099.

Sayed, A.H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7), 998–1013.

Song, Y., Wang, Z., Ding, D., and Wei, G. (2019). Robust  $H_2/H_\infty$  model predictive control for linear systems with polytopic uncertainties under weighted mef-tod protocol. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49, 1470–1481.

Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12, 625–653. URL [sedumi.ie.lehigh.edu/](http://sedumi.ie.lehigh.edu/).