

Controle por Realimentação de Saída Baseado em Observador de Estado para Sistemas Fuzzy T-S Sujeitos a Restrições

Isaac D. Isidório* Carlos E. T. Dórea* Eugênio B. Castelan**

* Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN - CT - DCA, 59078-900 Natal, RN, Brazil (e-mail: isaacdnt@gmail.com, cetdorea@dca.ufrn.br)

** Universidade Federal de Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC-DAS, Florianópolis, SC, Brazil (e-mail: eugenio.castelan@ufsc.br)

Abstract: In this article we propose a numerical method to compute an observer-based output feedback controller for fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) systems subject to state and control constraints, based on the theory of invariant sets. Sufficient conditions are established for a polyhedron defined in the augmented state space (state + estimation error) to be positively invariant in two cases: when the membership function associated with the fuzzy T-S model can be calculated directly from the measured output of the system or when it has to be calculated from the state estimated by the observer. From these conditions, a bilinear optimization problem is formulated for the simultaneous calculation of the gains of the controller and of a positively invariant polyhedron guaranteeing the satisfaction of the constraints. Two examples illustrate the effectiveness of the method.

Resumo: Neste artigo é proposto um método numérico para o cálculo de um controlador por realimentação de saída baseado em observador de estado para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno sujeitos a restrições no estado e no controle, com base na teoria de conjuntos invariantes. Condições suficientes são estabelecidas para que um poliedro definido no espaço de estados aumentado (estado + erro de observação) seja positivamente invariante em dois casos: quando a função de pertinência associada ao modelo fuzzy T-S pode ser calculada diretamente a partir da saída medida do sistema ou quando tem que ser calculada a partir do estado estimado pelo observador. A partir dessas condições, um problema de otimização bilinear é formulado para o cálculo simultâneo dos ganhos do controlador e de um poliedro positivamente invariante garantindo a satisfação das restrições. Dois exemplos ilustram a eficácia do método.

Keywords: Fuzzy T-S Models, Output Feedback Control, Invariant Sets, Bilinear Programming.

Palavras-chaves: Modelos Fuzzy T-S, Controle por Realimentação de Saída, Conjuntos Invariantes, Programação Bilinear.

1. INTRODUÇÃO

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) é comumente utilizado na representação de dinâmicas não lineares complexas, com base em um conjunto de modelos lineares que descrevem localmente o comportamento do sistema. Esta característica permite aplicar técnicas lineares mais simples de análise e projeto de sistemas de controle.

Na literatura de sistemas fuzzy T-S, a maioria dos estudos e projetos de controladores tem como base a solução de problemas de otimização baseados em LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (Feng, 2006; Ueno et al., 2011). Contudo, muitas destas técnicas não consideram o fato de os modelos fuzzy T-S serem válidos apenas localmente (Tanaka and Wang, 2004; Huang and Nguang, 2007). Assim, os objetivos de controle só podem ser garantidos se a trajetória dos estados estiver incluída dentro da região

de validade do modelo fuzzy T-S. Por outro lado, forçar as trajetórias de estado a permanecer dentro de uma dada região é um objetivo que pode ser alcançado por meio dos chamados *conjuntos invariantes*.

Diante disso, trabalhos recentes foram desenvolvidos para sistemas fuzzy T-S de tempo discreto. Ariño et al. (2013) propuseram uma técnica para calcular uma aproximação politópica de conjuntos invariantes com perturbações limitadas. Arino et al. (2014) apresentaram um método para o cálculo do máximo poliedro positivamente invariante (PI) contido no conjunto de restrições de estado e controle. Estas técnicas foram desenvolvidas a partir de um controlador pré-calculado e têm como objetivo geral determinar um conjunto PI. Dórea et al. (2020) estabeleceram uma abordagem baseada em Programação Bilinear que objetiva o cálculo dos ganhos de um controlador, bem como de um conjunto PI associado para sistemas fuzzy T-S com

perturbações limitadas e sujeitos a restrições de estado e controle. Nestes trabalhos, o conjunto PI está associado a um controlador do tipo PDC (*Parallel Distributed Compensator*). O PDC é obtido com base em controladores locais, que, por sua vez, partilham os mesmos conjuntos difusos com o modelo T-S (Tanaka and Wang, 2004).

Outro aspecto importante a ser considerado para sistemas fuzzy T-S reside no controle por realimentação de saída. Em problemas práticos, é comum que apenas as variáveis de saída estejam disponíveis para medição. Portanto, as funções de pertinência podem apresentar dependência apenas da saída ou de estados que não podem ser medidos diretamente. No caso mais simples, embora as funções de pertinência dependam apenas da saída, a realimentação do estado estimado resulta, em geral, em controladores com melhor desempenho e com maiores conjuntos de estados admissíveis associados a eles do que o controle por realimentação estática de saída. Para o caso geral, como as funções de pertinência dependem de estados não acessíveis, é necessário um mecanismo de estimação para o cálculo destas variáveis. Em ambos os casos, este papel é desempenhado pelo observador de estado fuzzy T-S (ver, por exemplo, Tanaka and Wang (2004)).

Neste artigo, são estabelecidas as condições suficientes para um conjunto poliédrico ser PI sob uma lei de controle PDC dinâmica para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo sujeitos a restrições de estado e controle. A abordagem por programação bilinear (Brião et al., 2021; Dórea et al., 2020) é usada para determinar, simultaneamente, os ganhos estabilizantes e o poliedro positivamente invariante. Exemplos numéricos ilustram a abordagem proposta. Salvo engano, este é o primeiro trabalho que trata do cálculo de poliedros invariantes para sistemas fuzzy T-S controlados por realimentação de saída baseada em observadores de estado.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema não linear discreto no tempo dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

em que $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída, com $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sendo a matriz de saída associada.

Em uma região compacta do espaço de estados, o sistema (1) pode ser expresso localmente como um sistema fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) com r regras na forma (ver, por exemplo, Tanaka and Wang (2004) e Wang et al. (1996)):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\alpha_i(x(k))$ representam as funções de pertinência tais que o vetor $\alpha(x(k))$ pertence ao simplex padrão $\Delta \in \mathbb{R}^r$, definido como:

$$\Delta = \left\{ \alpha(x(k)) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(k)) = 1, \alpha_i(x(k)) \geq 0 \right\}. \quad (3)$$

O Sistema (2) é sujeito a restrições de estado e controle, representadas, respectivamente, pelos conjuntos poliédricos fechados contendo a origem:

$$\mathcal{X} = R[S_x, \mathbf{1}] = \{x(k) \in \mathbb{R}^n : S_x x(k) \leq \mathbf{1}\}, \quad (4)$$

$$\mathcal{U} = R[S_u, \mathbf{1}] = \{u(k) \in \mathbb{R}^m : S_u u(k) \leq \mathbf{1}\}, \quad (5)$$

em que $S_x \in \mathbb{R}^{g_x \times n}$, $S_u \in \mathbb{R}^{g_u \times m}$ e $\mathbf{1}$ é um vetor de dimensões adequadas cujos elementos são todos iguais a 1.

Em problemas práticos, é comum que apenas as variáveis de saída estejam disponíveis para medição. Uma das possíveis soluções, neste caso, é usar um observador de estados. A seguir, consideramos duas situações: na primeira, as funções de pertinência dependem apenas da saída (caso **A**) e, na segunda, elas dependem de estados que não podem ser medidos diretamente (caso **B**) (Tanaka et al., 1997).

2.1 Caso A

Neste caso, considera-se que $\alpha_i(x(k))$ é, por hipótese, dado por $\alpha_i(y(k))$. Um observador fuzzy T-S pode ser expresso com r regras na forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) [A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k))] \\ \hat{y}(k) &= C \hat{x}(k). \end{aligned} \quad (6)$$

em que $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado estimado, $\hat{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída medida, $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $\alpha_i(\cdot)$ são as mesmas funções de pertinência que definem o modelo (2).

Note-se que, neste caso, estamos considerando que as funções de pertinência dependem apenas da saída medida.

O erro de estimação é definido por $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ e sua dinâmica é dada por:

$$e(k+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) (A_i - L_i C) e(k).$$

Como em Tanaka and Wang (2004), definimos o estado aumentado $x_a(k)^T = [x(k) \ e(k)]$, $x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Consideremos agora a seguinte lei de controle por realimentação do estado estimado, segundo o esquema conhecido como PDC (do inglês *Parallel Distributed Compensation*), dada por:

$$u(k) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) K_i \hat{x}(k), \quad (7)$$

com $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que o sistema aumentado em malha fechada correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(y(k)) G_{ii}^a x_a(k) + \\ & 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} \alpha_i(y(k)) \alpha_j(y(k)) \frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} x_a(k), \end{aligned} \quad (8)$$

em que

$$G_{ij}^a = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C \end{bmatrix}, \quad (9)$$

sendo $x_a(k)^T = [x(k) \ e(k)]$, com $x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.

Estabelecemos também um conjunto de restrições para o erro de observação, $e(k)$:

$$\mathcal{E} = R[S_e, \mathbf{1}] = \{e(k) \in \mathbb{R}^n : S_e e(k) \leq \mathbf{1}\}, S_e \in \mathbb{R}^{g_e \times n}, \quad (10)$$

que resulta no seguinte conjunto no espaço aumentado:

$$R[S_a, \mathbf{1}] = \{x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n} : S_a x_a(k) \leq \mathbf{1}\}, S_a = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_e \end{bmatrix}, \quad (11)$$

em que $S_a \in \mathbb{R}^{g_a \times 2n}$.

As restrições lineares de controle relacionadas ao sistema (8)–(9) podem ser expressas a partir de (5) e (7) por:

$$\begin{aligned} S_u u(k) &= -S_u \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) K_i x(k) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) K_i e(k) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(y(k)) S_u K_i [-\mathbf{I} \ \mathbf{I}] x_a(k) \leq \mathbf{1}, \text{ com } S_u \in \mathbb{R}^{g_u \times m}. \end{aligned} \quad (12)$$

Define-se, então, a extensão ao espaço de estado aumentado das restrições na entrada:

$$R[S_u K_i^a, \mathbf{1}] = \{x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n} : S_u K_i^a x_a(k) \leq \mathbf{1}\} \quad (13)$$

com $K_i^a = K_i [-\mathbf{I} \ \mathbf{I}]$, $K_i^a \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$.

Note que, pelo fato de $\alpha_i(y(k)) \in \Delta$ (3), tem-se que se $x_a(k) \in R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$, $i = 1, \dots, r$, então $S_u u(k) \leq \mathbf{1}$, garantindo, assim, o respeito às restrições de controle.

A intersecção dos conjuntos Ω , $R[S_a, \mathbf{1}]$ e $R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$ forma um poliedro compacto contendo a origem, com Ω denotando a região de validade do modelo fuzzy T-S no espaço aumentado. A possibilidade de impor trajetórias de $x_a(k)$ em um determinado conjunto é caracterizada pela seguinte definição:

Definição 1. Dado $0 < \lambda < 1$, um conjunto compacto $R[Y, \mathbf{1}] \subset \Omega$ é dito ser Positivamente Invariante λ -contrativo (ou simplesmente PI λ -contrativo) em relação ao sistema (8)–(9), se $\forall x_a(k) \in R[Y, \mathbf{1}]$, $x_a(k+1) \in \lambda R[Y, \mathbf{1}]$, $\forall k \geq 0$.

Nosso objetivo passa a ser, então, obter matrizes K_i , L_i , $i = 1, \dots, r$ e um conjunto poliédrico

$$R[Y, \mathbf{1}] = \{x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n} : Y x_a(k) \leq \mathbf{1}\}, \quad (14)$$

contido no conjunto de restrições $\Omega \cap R[S_a, \mathbf{1}] \cap R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$, que seja PI λ -contrativo sob a lei de controle (7), tal que qualquer trajetória começando em $R[Y, \mathbf{1}]$ convirja assintoticamente à origem sem violar as restrições.

2.2 Caso B

Para o caso geral, como as funções de pertinência dependem de estados não acessíveis, é necessária a utilização de um mecanismo de estimação para que estas variáveis possam ser calculadas.

O observador fuzzy T-S pode ser expresso com r regras na forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) [A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k))] \\ \hat{y}(k) &= C \hat{x}(k). \end{aligned} \quad (15)$$

em que $\alpha_i(\hat{x}(k))$ são funções de pertinência aplicadas ao vetor de variáveis de premissa estimadas $\hat{x}(k)$, que devem pertencer ao simplex:

$$\Delta = \{\alpha(\hat{x}(k)) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) = 1, \alpha_i(\hat{x}(k)) \geq 0\}. \quad (16)$$

A lei de controle PDC agora é dada por:

$$u(k) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) K_i \hat{x}(k), \quad (17)$$

com $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que o sistema aumentado em malha fechada correspondente é:

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(k)) \alpha_j^2(\hat{x}(k)) G_{ij}^a x_a(k) + \\ &2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < c}^r \alpha_i(x(k)) \alpha_j(\hat{x}(k)) \alpha_c(\hat{x}(k)) \frac{G_{ijc}^a + G_{icj}^a}{2} x_a(k), \end{aligned} \quad (18)$$

em que

$$G_{ijc}^a = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_c & B_i K_c \\ S_{ijc}^1 & S_{ijc}^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$S_{ijc}^1 = (A_i - A_j) - (B_i - B_j) K_c, \quad (20)$$

$$S_{ijc}^2 = A_j - L_j C + (B_i - B_j) K_c, \quad (21)$$

sendo $x_a(k)^T = [x(k) \ e(k)]$, com $x_a(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.

Agora, as restrições de controle linear relacionadas ao sistema (18)–(21), podem ser expressas a partir de (5) e (17), por:

$$\begin{aligned} S_u u(k) &= -S_u \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) K_i x(k) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) K_i e(k) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{x}(k)) S_u K_i [-\mathbf{I} \ \mathbf{I}] x_a(k) \leq \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (22)$$

tal que $R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$ pode ser definido pelo conjunto poliédrico dado em (13).

Os objetivos de controle sob restrições são os mesmos definidos para o caso **A**, mas considerando a lei de controle (17).

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

A seguir, apresentamos condições suficientes que garantem que um conjunto poliédrico $R[Y, \mathbf{1}]$ seja PI λ -contrativo em relação ao sistema fuzzy T-S sob uma lei de controle PDC. Para simplificar, deste ponto em diante, descartamos a dependência explícita de x_a em relação à variável k nas funções de pertinência.

3.1 Caso A

Proposição 1. O poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ é PI λ -contrativo em relação ao sistema de malha fechada (8)–(9), se existirem matrizes $H_{ii} \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, r$ e $H_{ij} \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = i+1, \dots, r$, tais que:

$$H_{ii} Y = Y G_{ii}^a, H_{ii} \geq 0,$$

$$H_{ii} \mathbf{1} \leq \lambda \mathbf{1},$$

$$H_{ij} Y = Y \left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right), H_{ij} \geq 0, \quad (23)$$

$$H_{ij} \mathbf{1} \leq \lambda \mathbf{1}.$$

Prova. Considere $Yx_a(k) \leq \mathbf{1}$. Então, de (8):

$$\begin{aligned}
 Yx_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(y) YG_{ii}^a x_a(k) + \\
 &2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) Y \left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right) x_a(k) = \\
 &\left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(y) H_{ii} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) H_{ij} \right] Yx_a(k) \leq \\
 &\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(y) H_{ii} \mathbf{1} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) H_{ij} \mathbf{1} \leq \\
 &\sum_{j=1}^r \alpha_j^2(y) \lambda \mathbf{1} + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) \lambda \mathbf{1} = \\
 &\lambda \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(y) \right)^2 \mathbf{1} = \lambda \mathbf{1} < \mathbf{1}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Isso prova que o poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ é PI e λ -contrativo. \square

3.2 Caso B

Proposição 2. O poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ é PI λ -contrativo em relação ao sistema de malha fechada (18)–(21), se existirem matrizes $H_{ijj} \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, r$ e $H_{ijc} \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, \dots, (r-1)$ e $c = j + 1, \dots, r$, tais que:

$$\begin{aligned}
 H_{ijj} Y &= YG_{ijj}^a, \quad H_{ijj} \geq 0, \\
 H_{ijj} \mathbf{1} &\leq \lambda \mathbf{1}, \\
 H_{ijc} Y &= Y \left(\frac{G_{ijc}^a + G_{icj}^a}{2} \right), \quad H_{ijc} \geq 0, \\
 H_{ijc} \mathbf{1} &\leq \lambda \mathbf{1}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Prova. Considere $Yx_a(k) \leq \mathbf{1}$. Então, de (18):

$$\begin{aligned}
 Yx_a(k+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j^2(\hat{x}) YG_{ijj}^a x_a(k) + \\
 &2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < c}^r \alpha_i(x) \alpha_j(\hat{x}) \alpha_c(\hat{x}) Y \left(\frac{G_{ijc}^a + G_{icj}^a}{2} \right) x_a(k) = \\
 &\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left[\sum_{j=1}^r \alpha_j^2(\hat{x}) H_{ijj} + 2 \sum_{j < c}^r \alpha_j(\hat{x}) \alpha_c(\hat{x}) H_{ijc} \right] Yx_a(k) \leq \\
 &\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left[\sum_{j=1}^r \alpha_j^2(\hat{x}) H_{ijj} \mathbf{1} + 2 \sum_{j < c}^r \alpha_j(\hat{x}) \alpha_c(\hat{x}) H_{ijc} \mathbf{1} \right] \leq \\
 &\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left[\sum_{j=1}^r \alpha_j^2(\hat{x}) \lambda \mathbf{1} + 2 \sum_{j < c}^r \alpha_j(\hat{x}) \alpha_c(\hat{x}) \lambda \mathbf{1} \right] = \\
 &\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left[\lambda \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(\hat{x}) \right)^2 \mathbf{1} \right] = \lambda \mathbf{1} < \mathbf{1}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Isso prova que o poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ é PI e λ -contrativo. \square

É importante ressaltar que, para o caso **B**, as condições acima só são válidas se $\alpha(\hat{x}(k))$ pertencer ao domínio de validade Ω do modelo fuzzy T-S. Em geral, isto reduz os universos de discursos de $x(k)$ e $e(k)$. Consequentemente, o conjunto $R[S_a, \mathbf{1}]$ necessita ser reduzido ou os modelos locais redefinidos. Na abordagem clássica para sistemas fuzzy T-S, este problema é contornado pois as funções de pertinência são definidas para o intervalo $[0, 1]$, tal que

para valores fora do universo de discurso esperado, estas funções apresentam os valores 0 ou 1.

Contudo, a tradução de dinâmicas não lineares através de sistemas fuzzy T-S apresenta funções de pertinência com forma especificada por tais dinâmicas, como no caso da abordagem setorial (Tanaka and Wang, 2004). Para contornar esse problema, os modelos locais serão definidos com base no universo de discurso das variáveis de estado estimadas. Como $\hat{x}(k) = x(k) - e(k)$, é possível inferir o universo de discurso associado às estimativas a partir dos valores extremos para o vetores de estado e erro de observação. Este artifício, junto com a inclusão de $x(k)$ em Ω serão suficientes para garantir a validade do modelo, ou seja, que $\alpha(x(k)) \in \Delta$ e $\alpha(\hat{x}(k)) \in \Delta$.

As Proposições 1 e 2 estão relacionadas à existência de um poliedro PI, garantindo que se $x_a(0) \in R[Y, \mathbf{1}]$, então $x_a(k) \in R[Y, \mathbf{1}]$, para $k = 1, 2, \dots$. Além disso, $0 < \lambda < 1$ garante a contração de trajetórias no espaço de estado aumentado dentro de $R[Y, \mathbf{1}]$, ou seja, se $x_a(k) \in R[Y, \mathbf{1}]$, então $x_a(k+1) \in \lambda R[Y, \mathbf{1}]$. Considerando o efeito da contração e as condições em (23) e (25), é possível verificar que para $x_a(k) \in R_\lambda[Y, \mathbf{1}]$, com $R_\lambda[Y, \mathbf{1}] \equiv \lambda R[Y, \mathbf{1}]$, $x_a(k+1) \in \lambda R_\lambda[Y, \mathbf{1}]$, $\forall k \geq 0$. Portanto, se $x_a(0) \in R[Y, \mathbf{1}]$, então $x_a(k) \in \lambda^k R[Y, \mathbf{1}]$. Dessa forma, se as condições apresentadas na Proposições 1 e 2 forem satisfeitas, respectivamente, para os casos **A** e **B**, então $x_a(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

3.3 Restrições nos estados e no controle

As condições sob as quais o problema de regulação sob restrições pode ser solucionado têm como base a versão matricial do lema de Farkas (Hennet, 1989; Schrijver, 1998).

As restrições no estado aumentado podem ser satisfeitas se o poliedro PI estiver contido no poliedro de restrições, ou seja, se $R[Y, \mathbf{1}] \subseteq R[S_a, \mathbf{1}]$. Isto é garantido, se e somente se existir uma matriz $M \geq 0$, com $M \in \mathbb{R}^{g_a \times g}$, tal que

$$\begin{aligned}
 MY &= S_a, \\
 M\mathbf{1} &\leq \mathbf{1},
 \end{aligned} \tag{27}$$

A caracterização da inclusão poliédrica $R[Y, \mathbf{1}] \subseteq R[S_a, \mathbf{1}]$ é análoga ao caso linear (Hennet, 1989; Schrijver, 1998).

A partir de (13), as restrições no controle, $S_u u(k) \leq \mathbf{1}$, podem ser satisfeitas se $x_a(k) \in R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$, $i = 1, \dots, r$. Isto pode ser obtido se $R[Y, \mathbf{1}] \subseteq R[S_u K_i^a, \mathbf{1}]$, $i = 1, \dots, r$, o que, usando mais uma vez o Lema de Farkas estendido, é garantido se, e somente se, existem matrizes $Q_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, com $Q_i \in \mathbb{R}^{g_u \times g}$, tais que

$$\begin{aligned}
 Q_i Y &= S_u K_i^a \\
 Q_i \mathbf{1} &\leq \mathbf{1}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Estes resultados são válidos tanto para o caso **A** quanto para o caso **B**.

4. ESTRATÉGIA DE PROJETO USANDO OTIMIZAÇÃO BILINEAR

As condições de invariância positiva e de respeito a restrições propostas anteriormente envolvem relações lineares e bilineares entre matrizes. Para tratar de problemas dessa

natureza em sistemas lineares Brião et al. (2018); Brião et al. (2021) propuseram uma abordagem de otimização bilinear, também usada por Dórea et al. (2020) e Ernesto et al. (2021). Essa abordagem é utilizada aqui para o projeto conjunto de controlador e observador de estado, bem como o cálculo de poliedros positivamente invariantes.

A estratégia de projeto aqui escolhida tem como objetivo principal maximizar o tamanho do conjunto $R[Y, \mathbf{1}]$, a partir de um poliedro interno definido com base em um conjunto de vértices pré-estabelecidos. Dois conjuntos de vértices são comuns a este tipo de estratégia de otimização (ver, por exemplo, Ernesto et al. (2021)). O primeiro define um hiper-cubo $R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$, $\mathbf{I}_*^T = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}]$ para $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, enquanto que o segundo, o conjunto de restrições $R[S_a, \mathbf{1}]$.

Com base na abordagem proposta por Ernesto et al. (2021), a função objetivo é escolhida de modo a permitir a maximização do conjunto $R[Y, \mathbf{1}]$ através de fatores de ponderação ϕ_j associados ao conjunto de direções, que correspondem aos vértices do poliedro $R[S_a, \mathbf{1}]$ definidos por

$$\mathcal{V} = \{\phi_j v_j, j = 1, \dots, \bar{j}\}, \quad (29)$$

em que $v_j \in \mathbb{R}^{2n}$ são conhecidos e $0 < \phi_j \in \mathbb{R}$ são fatores de ponderação a serem otimizados, sendo a inclusão $\mathcal{V} \subseteq R[Y, \mathbf{1}]$ caracterizada por:

$$Y\phi_j v_j \leq \mathbf{1}, j = 1, \dots, \bar{j}. \quad (30)$$

Para o caso **A**, o problema básico de otimização bilinear que permite encontrar os ganhos do controlador e do observador pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma} \Phi(\phi_j) &= \sum_{j=1}^{\bar{j}} \phi_j \\ \text{subject to} & \text{ (23), (27), (28), (30),} \\ & \psi'_l \leq f_l \leq \psi''_l, l = 1, \dots, \bar{l}, \end{aligned} \quad (31)$$

com $\Gamma = (G_{ij}^a, M, Y, H_{ijc}, Q_i, K_i, L_i, P, \lambda, \phi_j)$. Para algum inteiro $\bar{l} \geq 0$, $\psi'_l \leq f_l \leq \psi''_l$ representam restrições adicionais que devem ser impostas sobre os elementos das matrizes em Γ com o objetivo de limitar o espaço de busca do otimizador (Brião et al., 2021). No caso **B**, o problema de otimização pode ser descrito de maneira análoga, bastando substituir G_{ij}^a e (23), respectivamente, por G_{ijc}^a e (25).

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste trabalho, como em (Brião et al., 2018), o software de otimização não linear KNITRO (Byrd et al., 2000, 2003; Nocedal, 2006) foi usado para resolver o problema de otimização (31), devido a sua eficiência em tratar problemas envolvendo bilinearidades. O KNITRO apenas garante a convergência para uma solução ótima local. É possível determinar a região de busca com base em limites definidos, a priori, para as variáveis do problema de otimização. Nos exemplos a seguir, todos os algoritmos disponíveis no KNITRO foram testados simultaneamente. Em geral, se não houver certeza sobre qual algoritmo funciona melhor para a aplicação, é recomendada definir as opções KNITRO: $alg = 5$, $ma_terminate = 1$ (Waltz and Nocedal, 2004). Os elementos das matrizes M , H_{ijc} , Q_i estão contidos no intervalo $[0, 1]$ e Y , K_i , L_i , P em

$[-10^3, 10^3]$, $\lambda \in [0; 0,99999]$ e $\phi_j > 0$. Os exemplos 1 e 2 referem-se, respectivamente, aos casos **A** e **B**.

Como apresentado na Seção 4, utilizamos os conjuntos de vértices que definem $R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$ e $R[S_a, \mathbf{1}]$. Adicionalmente, para garantir a existência da solução é necessário que o número de linhas da matriz Y seja $g \geq 4n - 1$ (número mínimo de Y que define um conjunto compacto no espaço de estado aumentado).

As projeções nos espaços de estado e do erro de observação, do poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$, são aqui denotadas por $p_x(R[Y, \mathbf{1}])$ e $p_e(R[Y, \mathbf{1}])$, respectivamente. Esta notação é utilizada apenas com a finalidade de ilustrar as soluções apresentadas nesta seção.

5.1 Exemplo 1 (Sistema Massa-Mola-Amortecedor)

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \sigma x_1(k) + \beta x_2(k) + Tu(k) \\ x_2(k+1) &= Tx_1(k) + x_2(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{aligned} \quad (32)$$

em que $\sigma = 1 - 0.1125T$, $\beta = -T(0.02 + 0.67x_2(k)^2)$ e $T = 0.01s$ é o período de amostragem. O sistema (32) consiste na representação de um sistema mecânico não linear (Huang and Nguang, 2007) discretizado com base no método de Euler e que pode ser representado como um modelo fuzzy T-S, com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma & -0.02T \\ T & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \sigma & -1.53T \\ T & 1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1],$$

sujeito às seguintes restrições de estado, erro e controle, respectivamente: $x_1(k) \in [-3, 3]$, $x_2(k) \in [-1, 1.5]$, $e_1(k) \in [-3, 3]$, $e_2(k) \in [-1, 1.5]$ e $u(k) \in [-100, 100]$.

O modelo fuzzy T-S descrito acima é obtido por meio da chamada abordagem setorial (Tanaka and Wang, 2004), tal que as funções de pertinência podem ser expressas por:

$$\alpha_1(k) = 1 - \frac{x_2(k)^2}{2.25}, \alpha_2(k) = \frac{x_2(k)^2}{2.25}. \quad (34)$$

Trata-se claramente do caso **A**, já que $\alpha_i(x(k)) = \alpha_i(x_2(k)) = \alpha_i(y(k))$

Pela aplicação da estratégia de otimização (31), é possível encontrar um poliedro PI λ -contrativo cujo tamanho está associado ao poliedro interno definido por um conjunto de vértices previamente determinados. Como pode ser visto na Tabela 1, o hiper-volume do poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ com base nos vértices de $R[S_a, \mathbf{1}]$ é maior em comparação com o obtido por meio dos vértices de $R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$.

Poliedro Interno	$\sum_{j=1}^{\bar{j}} \phi_j$	λ	Volume
$R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$	11.3857	0.999990	17.7657
$R[S_a, \mathbf{1}]$	8.17918	0.999990	30.5480

Tabela 1. Soluções Ótimas - Caso **A**.

Em geral, como as restrições sobre as variáveis no espaço de estado aumentado são distintas, a utilização dos vértices associados ao conjunto de restrições $R[S_a, \mathbf{1}]$ tende a

apresentar soluções com poliedros maiores em comparação com a utilização dos vértices que definem o hiper-cubo. Neste último caso, é mais comum ocorrer uma saturação no crescimento do poliedro em uma das direções tendo em vista a natureza simétrica do poliedro interno. Por sua vez, ponderar os vértices que definem $R[S_a, \mathbf{1}]$ significa maximizar o poliedro nas direções do conjunto de vértices das restrições preteridas, a princípio, condicionando o poliedro obtido a se expandir de forma específica. Embora comum, não há uma garantia para tal, tendo em vista que os escalares ϕ_j podem ser todos distintos.

Na Tabela 2, mostramos as matrizes de ganho K_i , $i = 1, 2$ e L_i , $i = 1, 2$ obtidas para este exemplo com os vértices que definem $R[S_a, \mathbf{1}]$. Os resultados são associados à matriz correspondente Y , que pode ser observada na Tabela 5, para um poliedro definido por $n_y = 9$ linhas.

Case	K_i	L_i^T
A	$\begin{bmatrix} 14.385 & 11.976 \\ 14.385 & 10.467 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} 2.940 & 1.280 \\ 2.827 & 1.234 \end{bmatrix}_1$
	$\begin{bmatrix} 14.385 & 11.976 \\ 14.385 & 10.467 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} 2.940 & 1.280 \\ 2.827 & 1.234 \end{bmatrix}_2$

Tabela 2. Resultados Numéricos - Caso A.

Nas Figuras 1 e 2 são apresentadas as trajetórias dos vetores de estado e erro em relação às projeções $p_{x_1, x_2}(R[Y, \mathbf{1}])$ e $p_{e_1, e_2}(R[Y, \mathbf{1}])$, respectivamente. As condições iniciais das simulações representam alguns dos vértices do poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$. Aqui, $x(0)$, $e(0)$, $e(\infty)$ e $x(\infty)$, em preto, representam as condições iniciais e os estados em regime estacionário.

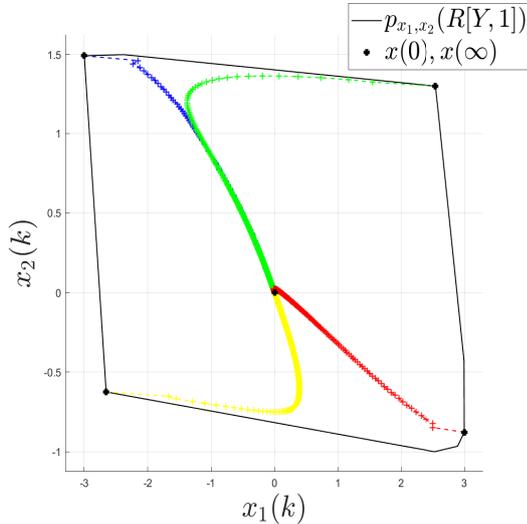


Figura 1. Trajetórias de Estado - Caso A.

Das Figuras 1 e 2 é possível observar que as trajetórias das variáveis de estado e de erro convergem assintoticamente à origem sem violar as restrições, uma vez garantido que o conjunto poliédrico $R[Y, \mathbf{1}]$ é PI λ -contrativo, tal que $R[Y, \mathbf{1}] \subseteq R[S_a, \mathbf{1}]$.

A Figura 3 representa os respectivos sinais de controle $u(k)$, cujos limites são representados por linhas pretas tracejadas. Aqui, podemos notar que $u(k)$ não satura e respeita as restrições de controle em todo instante de tempo discreto k .

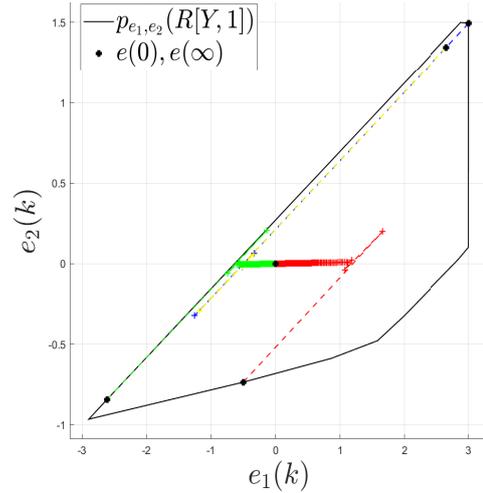


Figura 2. Trajetórias de Erro - Caso A.

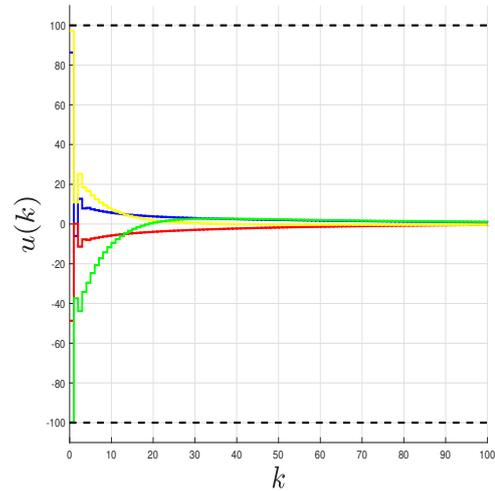


Figura 3. Trajetórias de Controle - Caso A.

5.2 Exemplo 2

Considere o seguinte sistema fuzzy T-S (Ueno et al., 2011):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}, C = [10 \quad -2],$$

sujeito às seguintes restrições de estado, erro e controle, respectivamente: $x_1(k) \in [-10, 10]$, $x_2(k) \in [-20, 20]$, $e_1(k) \in [-10, 10]$, $e_2(k) \in [-20, 20]$ e $u(k) \in [-5, 5]$, cujas funções de pertinência e suas estimativas, são dadas por:

$$\alpha_1(x(k)) = \frac{1}{1+e^{-x_1(k)}}, \alpha_2(k) = \frac{e^{-x_1(k)}}{1+e^{-x_1(k)}}, \quad (36)$$

$$\alpha_1(\hat{x}(k)) = \frac{1}{1+e^{-\hat{x}_1(k)}}, \alpha_2(\hat{x}(k)) = \frac{e^{-\hat{x}_1(k)}}{1+e^{-\hat{x}_1(k)}}.$$

Quando respeitadas, as condições em (27) garantem a inclusão poliédrica $R[Y, \mathbf{1}] \subseteq R[S_a, \mathbf{1}]$, conseqüentemente,

o vetor de estado $x_1(k) \in [-10, 10]$. Como $\hat{x}_1(k) = x_1(k) - e_1(k)$, o universo de discurso para as variáveis de estado estimadas é $\hat{x}_1(k) \in [-20, 20]$. Neste exemplo, como as funções de pertinência e suas estimativas em (36) são naturalmente limitadas no intervalo $[0, 1]$, não é necessário fazer o arranjo entre o modelo e o universo de discurso definido por $\hat{x}(k)$.

Os comentários apresentados para o Exemplo 1 podem ser estendidos ao Exemplo 2 no que diz respeito à estratégia de otimização utilizada. Como pode ser visto na Tabela 3, o hiper-volume do poliedro $R[Y, \mathbf{1}]$ com base nos vértices de $R[S_a, \mathbf{1}]$ é maior em comparação com o obtido por meio dos vértices de $R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$.

Poliedro Interno	$\sum_{j=1}^j \phi_j$	λ	Volume
$R[\mathbf{I}_*, \mathbf{1}]$	136.230	0.999990	1.26×10^5
$R[S_a, \mathbf{1}]$	12.2685	0.999990	3.27×10^5

Tabela 3. Soluções Ótimas - Caso B.

Na Tabela 4, mostramos as matrizes de ganho $K_i, i = 1, 2$ e $L_i, i = 1, 2$ obtidas para este exemplo com os vértices que definem $R[S_a, \mathbf{1}]$. Os resultados são associados à matriz correspondente Y , que pode ser observada na Tabela 5, para um poliedro definido por $n_y = 9$ linhas.

Caso	K_i	L_i^T
B	$\begin{bmatrix} 0.213 & -0.018 \\ 0.213 & -0.018 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} 0.153 & 0.084 \\ 0.151 & 0.084 \end{bmatrix}_2$

Tabela 4. Resultados Numéricos - Caso B.

Caso	n_y	Y		
A	9	$\begin{bmatrix} 0.3765 & 0.0539 & -0.0311 & 0.1331 \\ 0.0251 & -0.5272 & 0.2610 & -0.8064 \\ 0.0052 & -0.0580 & 0.3236 & 0.0878 \\ 0.0387 & -0.2287 & 0.3160 & -0.0741 \\ -0.0948 & -1.3329 & 0.0728 & -0.2058 \\ 0.0529 & 0.9489 & 0.5610 & -1.2990 \\ -0.4425 & -0.0633 & 0.0988 & -0.3544 \\ -0.0154 & 0.0649 & 0.1522 & -1.6036 \\ -0.0464 & -0.0094 & -1.7651 & 4.1298 \end{bmatrix}$		
		B	9	$\begin{bmatrix} 0.0150 & 0.0000 & 0.0150 & 0.0000 \\ 0.1337 & -0.0181 & 0.0325 & 0.0000 \\ 0.0187 & -0.0593 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0128 & 0.0011 & 0.0000 & 0.0575 \\ -0.0947 & 0.0179 & -0.0287 & 0.0014 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0500 \\ 0.0150 & 0.0716 & -0.0282 & 0.0000 \\ -0.1000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0187 & 0.0123 & -0.1432 & 0.0000 \end{bmatrix}$

Tabela 5. Resultados Numéricos - Caso A, Caso B.

Nas Figuras 4 e 5 são apresentadas as trajetórias das variáveis de estado e erro em relação às projeções $p_{x_1, x_2}(R[Y, \mathbf{1}])$ e $p_{e_1, e_2}(R[Y, \mathbf{1}])$, respectivamente. Aqui, $x(0), e(0)$ e $x(\infty), e(\infty)$, em preto, representam as condições iniciais e os estados em regime estacionário. A Figura 6 representa os respectivos sinais de controle $u(k)$, cujos limites são representados por linhas pretas tracejadas.

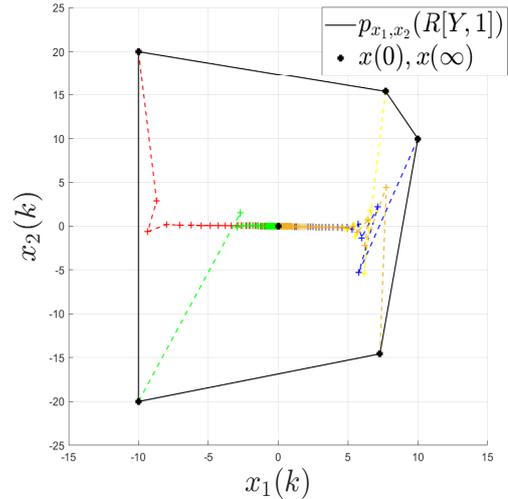


Figura 4. Trajetórias de Estado - Caso B.

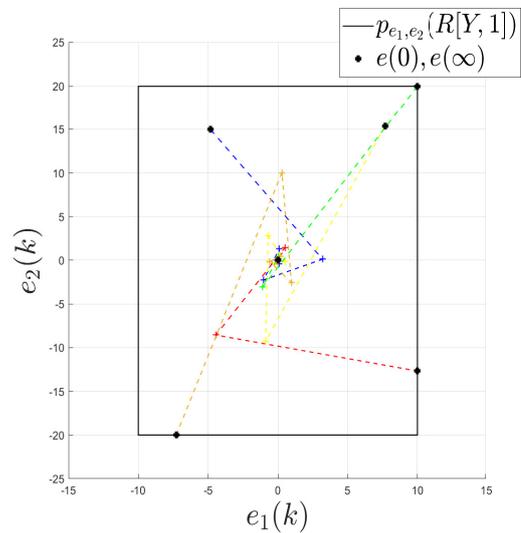


Figura 5. Trajetórias de Erro - Caso B.

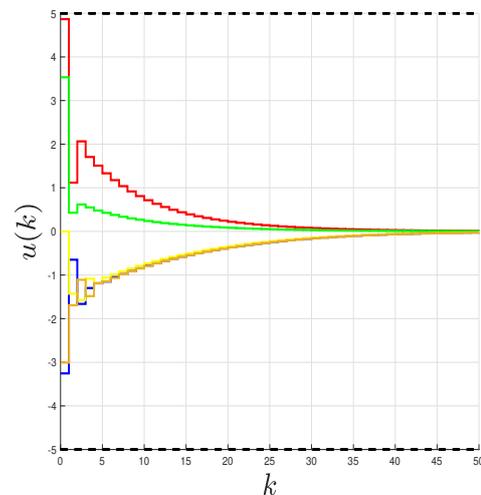


Figura 6. Trajetórias de Controle - Caso B.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo foram propostas condições suficientes para um conjunto polidédrico ser Positivamente Invariante (PI) para sistemas fuzzy T-S sujeitos a restrições de estado e controle, sob uma lei de controle por realimentação de saída baseada em observador de estado. As condições foram traduzidas na forma de um problema de programação bilinear, que tem como solução um poliedro PI e os ganhos que garantem a convergência assintótica do estado à origem do sistema aumentado.

Foram discutidos dois tipos de observador encontrados na literatura: o primeiro considera as funções de pertinência dependentes apenas da saída do sistema; o segundo, por sua vez, refere-se ao caso geral, onde estas funções podem estar associadas a quaisquer variáveis de estado. No caso geral, para que sejam válidas as condições de invariância, é necessário reduzir o universo de discurso associado às variáveis de estado e/ou associar os modelos locais ao universo de discurso das variáveis de estado estimadas.

A estratégia de otimização escolhida tem como objetivo maximizar o conjunto PI, a partir da expansão de um poliedro interno definido com base em um conjunto de vértices pré-estabelecidos. A exemplo de Ernesto et al. (2021), dois conjuntos de vértices foram aqui utilizados: o primeiro define um hiper-cubo no espaço aumentado; o segundo, o conjunto de restrições $R[S_a, 1]$. Os resultados demonstram que, em geral, o segundo conjunto de vértices leva a soluções com poliedros PI maiores.

Alguns objetivos de trabalhos futuros são a extensão da abordagem aqui apresentada a problemas de rastreamento de referências e rejeição de perturbações.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (Processos no. 309862/2019-1 e 311567/2021-5).

REFERÊNCIAS

- Ariño, C., Pérez, E., Bedate, F., and Sala, A. (2013). Robust polytopic invariant sets for discrete fuzzy control systems. In *2013 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, 1–7. IEEE.
- Arino, C., Perez, E., Sala, A., and Bedate, F. (2014). Polytopic invariant and contractive sets for closed-loop discrete fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(7), 3559–3576.
- Brião, S.L., Pedrosa, M.V., Castelan, E.B., Camponogara, E., and de Assis, L.S. (2018). Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions. In *2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 1–6. IEEE.
- Brião, S.L., Castelan, E.B., Camponogara, E., and Ernesto, J.G. (2021). Output feedback design for discrete-time constrained systems subject to persistent disturbances via bilinear programming. *Journal of the Fran-*

- klin Institute*, 358(18), 9741–9770. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.10.024>.
- Byrd, R.H., Gilbert, J.C., and Nocedal, J. (2000). A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical programming*, 89(1), 149–185.
- Byrd, R.H., Gould, N.I., Nocedal, J., and Waltz, R.A. (2003). An algorithm for nonlinear optimization using linear programming and equality constrained subproblems. *Mathematical Programming*, 100(1), 27–48.
- Dórea, C.E., Castelan, E.B., and Ernesto, J.G. (2020). Robust positively invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy ts models: a bilinear optimization design strategy. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 8013–8018.
- Ernesto, J.G., Castelan, E.B., dos Santos, G.A.F., and Camponogara, E. (2021). Incremental output feedback design approach for discrete-time parameter-varying systems with amplitude and rate control constraints. In *2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 1–7. IEEE.
- Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 14(5), 676–697.
- Hennet, J.C. (1989). Une extension du lemme de farkas et son application au probleme de régulation linéaire sous contraintes. *CR Acad. Sci. Paris*, 308(I), 415–419.
- Huang, D. and Nguang, S.K. (2007). Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ilmi approach. *Information Sciences*, 177(14), 3005–3015.
- Nocedal, J. (2006). Knitro: an integrated package for nonlinear optimization. In *Large-Scale Nonlinear Optimization*, 35–60. Springer.
- Schrijver, A. (1998). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons.
- Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H.O. (1997). Controlling chaos via model-based fuzzy control system design. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, 1488–1493. IEEE.
- Tanaka, K. and Wang, H.O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- Ueno, N., Uchida, Y., and Yoneyama, J. (2011). Output feedback control for discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems. In *2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011)*, 315–321. IEEE.
- Waltz, R.A. and Nocedal, J. (2004). Knitro 2.0 user's manual. *Ziena Optimization, Inc.[en ligne] disponible sur <http://www.ziena.com> (September, 2010)*, 7, 33–34.
- Wang, H.O., Tanaka, K., and Griffin, M.F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(1), 14–23.