

Estabilização Paralela Distribuída de Sistemas Nebulosos de Takagi-Sugeno Utilizando Funções de Lyapunov Polinomiais Homogêneas no Estado^{*}

Yara Q. Marinho, Ricardo C. L. F. Oliveira, Pedro L. D. Peres

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil
(yquillesmarinho@gmail.com, {ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br).*

Abstract: This paper proposes an iterative algorithm based on linear matrix inequalities (LMIs) for the synthesis of state feedback controllers through distributed parallel compensation of Takagi-Sugeno fuzzy systems using homogeneous polynomial on the state Lyapunov functions. The proposed technique explores LMI conditions where the state-feedback gains appear linearly, so they can be treated directly as decision variables of the optimization problem, allowing the imposition of magnitude limitations on the gains in a straightforward way. The use of the decay rate as an objective function for the designed controller is also an immediate extension of the iterative algorithm, since it employs a relaxation directly related to such performance criterion. Numerical examples are used to compare the proposed method with another technique available in the literature based on quadratic Lyapunov functions, demonstrating the advantages of the proposed approach.

Resumo: Este artigo propõe um algoritmo iterativo baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) para a síntese de controladores por realimentação de estados por meio da compensação paralela distribuída de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov polinomiais homogêneas no estado. A técnica proposta explora condições LMIs nas quais os ganhos de realimentação de estado aparecem de forma linear, de modo que estes podem ser tratados diretamente como variáveis de decisão do problema de otimização, possibilitando a imposição de limitações de magnitude dos ganhos de modo imediato. A utilização da taxa de decaimento como função objetivo do controlador projetado também é uma extensão imediata do algoritmo iterativo, visto que este se utiliza de uma relaxação diretamente relacionada a tal critério de desempenho. Exemplos numéricos são empregados para a comparação do método proposto com outra técnica disponível na literatura baseada em funções de Lyapunov quadráticas, demonstrando as vantagens da abordagem proposta.

Keywords: Takagi-Sugeno fuzzy systems; Linear matrix inequalities; Continuous-time systems; Homogeneous polynomial Lyapunov function.

Palavras-chaves: Sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno; Desigualdades matriciais lineares; Sistemas contínuos no tempo; Função de Lyapunov polinomial homogênea.

1. INTRODUÇÃO

De turbinas eólicas (Georg et al., 2012) a sistemas microeletromecânicos (Younis, 2012), na prática o comportamento dinâmico da maioria dos sistemas pode ser considerado não linear. Ainda que o controle linear seja uma área madura e bem consolidada, com uma ampla variedade de métodos e ferramentas com sucesso comprovado, essa técnica pressupõe que o sistema dinâmico opere em torno de uma pequena faixa na qual o comportamento linear pode ser assumido (Slotine and Li, 1991). Assim, quando as fontes de não linearidades que foram desprezadas pas-

sam a influenciar a dinâmica do sistema, sua operação no regime linear não é mais garantida, e uma descrição das dinâmicas não lineares que permita o projeto de sistemas de controle com garantias de estabilidade, desempenho e robustez se faz necessária. Nesse caso, uma opção é o uso de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno, 1985). Usando a estratégia de modelagem por não linearidade de setor (do inglês, *sector nonlinearity*), um modelo T-S representa de maneira exata o sistema não linear em uma região compacta do espaço de estados contendo a origem por meio da combinação difusa de submodelos lineares (Tanaka and Wang, 2001; Tanaka and Sugeno, 1992). Dessa maneira, métodos de análise de estabilidade e de síntese de controladores originalmente desenvolvidos para sistemas lineares podem ser adaptados para tratar essa classe de sistemas não lineares (Guerra

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, Processo 2020/08196-5), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, código de financiamento 001), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

and Vermeiren, 2004; Klug et al., 2015; Quadros et al., 2022).

No projeto de controladores para sistemas nebulosos T-S, a compensação paralela distribuída (do inglês, *Parallel Distributed Compensation* — PDC) permite que, para cada modelo linear local, um controle por realimentação linear seja projetado; o controlador resultante — que em geral é não linear — é uma combinação difusa de cada controlador linear individual (Wang et al., 1996). Se as condições de estabilidade ou síntese são representadas em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), o problema pode ser numericamente resolvido utilizando técnicas de otimização convexa implementadas em pacotes computacionais de eficiência comprovada (Boyd et al., 1994; Gahinet et al., 1995; Sturm, 1999).

Particularmente sobre o problema de estabilização PDC de sistemas T-S contínuos no tempo, inicialmente destacam-se os resultados baseados na função quadrática de Lyapunov, que foram progressivamente aprimorados por meio de técnicas de relaxação (Tanaka et al., 1998; Kim and Lee, 2000; Liu and Zhang, 2003; Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006), culminando com as relaxações convergentes (Sala and Ariño, 2007; Montagner et al., 2009). A principal vantagem dessa técnica é a não necessidade de tratamento da derivada das funções de pertinência, pois a função de Lyapunov é construída com uma matriz constante. Funções de Lyapunov menos conservadoras — que em geral requerem um tratamento das derivadas das funções de pertinência — também emergiram como alternativas à função quadrática, e nesse contexto mencionam-se as funções nebulosas com dependência afim (Tanaka et al., 2003; Mozelli et al., 2009) e polinomial (Tognetti et al., 2011a) nas funções de pertinência, e as funções integrais de linha (Rhee and Won, 2006; Tognetti et al., 2011b; Mozelli et al., 2009). Por sua vez, funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de graus maiores do que dois provaram-se menos conservadoras na análise de estabilidade robusta de sistemas lineares com incertezas variantes no tempo (Zelentsovsky, 1994; Blanchini and Miani, 1999) quando comparadas com funções de Lyapunov quadráticas. Apesar disso, tal classe de funções de Lyapunov ainda foi pouco explorada no contexto de síntese de controladores (Chesi et al., 2009), pois as técnicas conhecidas de linearização — como transformações de congruência e mudanças de variáveis — em geral não são aplicáveis.

Este trabalho aborda o problema de controle PDC por realimentação de estados para sistemas T-S contínuos no tempo cujas taxas de variação das funções de pertinência não estão disponíveis. A técnica proposta consiste em empregar funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário no estado, generalizando os resultados baseados na função quadrática. A técnica de síntese é formulada considerando-se um problema convexo de otimização baseado em LMIs, que são resolvidas iterativamente em um algoritmo com convergência local em que tanto a matriz de Lyapunov quanto a matriz em malha fechada do sistema T-S aparecem de forma afim nas condições. O método é inspirado no algoritmo iterativo para estabilização robusta de sistemas lineares proposto por Felipe and Oliveira (2021). Ademais, sendo o ganho de controle tratado diretamente como uma variável de otimização, é

possível impor facilmente restrições de estrutura ou limitações de magnitude às matrizes do controlador sem conservadorismo adicional. Outra possibilidade imediata é o uso da taxa de decaimento (do inglês, *decay rate*) das trajetórias como um critério de desempenho, uma vez que o algoritmo iterativo utiliza-se de uma relaxação na estabilidade diretamente relacionada a esse critério. Exemplos numéricos são utilizados para a análise comparativa entre o método proposto e outras técnicas da literatura baseadas em funções de Lyapunov quadráticas.

Notação. O conjunto dos números naturais é denotado como \mathbb{N} , enquanto \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais; o conjunto das matrizes reais simétricas de dimensão $n \times n$ é representado por \mathbb{S}^n . O conjunto definido como $\Lambda_r = \{\lambda \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r\}$ é chamado simplex unitário. O símbolo (\top) indica a transposição da matriz ou vetor correspondente e $\text{He}(A) = A + A^\top$. A matriz identidade de ordem n é representada por I_n e a matriz nula de dimensão $m \times n$ por $0_{m \times n}$, embora as dimensões das matrizes sejam suprimidas ao longo do texto quando inferidas facilmente pelo contexto. A notação $A > 0$ ($A < 0$) indica que a matriz A é definida positiva (negativa). A representação \mathcal{A}^\perp indica uma base para o espaço nulo da matriz \mathcal{A} . A notação $\text{diag}(X_1, \dots, X_N)$ representa uma matriz bloco diagonal formada pelos blocos X_i , $i = 1, \dots, N$. A expressão $X \otimes Y$ indica o produto de Kronecker das matrizes X e Y , enquanto $X^{[i]}$ é usado para representar a i -ésima potência de Kronecker, ou seja

$$X^{[i]} = \begin{cases} X \otimes X^{[i-1]}, & i > 1 \\ 1, & i = 0. \end{cases}$$

2. PRELIMINARES

Nesta seção são apresentados conceitos básicos necessários para a apresentação do problema a ser investigado, bem como as notações e definições utilizadas ao longo do artigo.

2.1 Polinômios homogêneos

O conjunto de polinômios homogêneos de grau d em n variáveis escalares é definido como (Chesi et al., 2009)

$$\Xi_{n,d} = \left\{ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_{n,d}} a_q x^q \right\},$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $a_q \in \mathbb{R}$ o coeficiente do monômio x^q e q pertencente ao conjunto $\mathcal{Q}_{n,d} = \{q \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n q_i = d\}$. Ou seja, um polinômio homogêneo é uma soma ponderada de monômios de grau d .

Um polinômio homogêneo de grau $2m$, $h \in \Xi_{n,2m}$ pode ser representado em termos de $x^{\{m\}} \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m)}$ (chamado *vetor de potências*) utilizando-se uma matriz $H \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)}$ tal que

$$h(x) = x^{\{m\}\top} H x^{\{m\}}, \quad (1)$$

em que

$$\sigma(n,d) = \frac{(n+d-1)!}{(n-1)!d!}.$$

A expressão dada em (1) é conhecida como representação matricial quadrática (do inglês, *Square Matricial Representation* — SMR) do polinômio homogêneo em relação ao

vetor de potências. Mais detalhes sobre essa representação podem ser encontrados em Chesi et al. (2009).

Considerando-se o conjunto

$$\mathcal{L}_{n,m} = \left\{ L \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)} : x^{\{m\}\top} L x^{\{m\}} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad (2)$$

e $L(\beta)$ uma parametrização linear de $\mathcal{L}_{n,m}$, ou seja,

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^{\omega(n,m)} \beta_i L_i \quad (3)$$

com $\omega(n,m) = \sigma(n,m)(1 + \sigma(n,m))/2 - \sigma(n,2m)$, $\beta \in \mathbb{R}^{\omega(n,m)}$, o polinômio $h(x)$ pode ser escrito como

$$h(x) = x^{\{m\}\top} (H + L(\beta)) x^{\{m\}},$$

sendo essa a representação SMR completa de $h(x)$ com relação a $x^{\{m\}}$.

O vetor de potências $x^{\{m\}}$ também permite a definição do conceito de matriz estendida. Considerando-se o sistema

$$\dot{x} = Ax,$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sendo $m \geq 1$ um inteiro, a matriz $A^\# \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ é chamada *matriz estendida* de A se satisfaz a relação

$$\frac{dx^{\{m\}}}{dt} = \frac{dx^{\{m\}}}{dx} \dot{x} = A^\# x^{\{m\}}. \quad (4)$$

A matriz estendida pode ser expressa em termos de produtos de Kronecker por meio de operações lineares com as entradas da matriz A , conforme o Teorema 1.

Teorema 1. Seja a matriz $K_m \in \mathbb{R}^{n^m \times \sigma(n,m)}$ que satisfaz

$$x^{\{m\}} = K_m x^{\{m\}}. \quad (5)$$

Então $A^\#$ é dada por

$$A^\# = (K_m^\top K_m)^{-1} K_m^\top \left(\sum_{i=0}^{m-1} I \otimes A \otimes I \right) K_m. \quad (6)$$

Todos os elementos não nulos da matriz K_m são unitários e podem ser diretamente obtidos comparando-se os monômios dos lados esquerdo e direito da equação (5). A definição detalhada pode ser encontrada em Chesi et al. (2009).

2.2 Estabilidade de sistemas nebulosos T-S

Introduzida por Takagi and Sugeno (1985), a representação de sistemas não lineares usando modelos nebulosos T-S se vale de regras Se-Então, expressando as dinâmicas locais de cada implicação por meio de uma função polinomial (Taniguchi et al., 2001). Essas funções, também denominadas modelos locais, possuem usualmente uma forma afim em seus argumentos — embora sistemas *fuzzy* T-S lineares, sem o termo constante, sejam mais comuns em sistemas de controle, pois adequam-se naturalmente à análise e ao projeto baseados na teoria de Lyapunov (Tanaka and Wang, 2001).

Para o sistema não linear cuja dinâmica pode ser representada no espaço de estados por

$$\dot{x}(t) = f(x(t))x(t) + g(x(t))u(t) \quad (7)$$

a i -ésima regra do modelo *fuzzy* T-S é da forma (Wang et al., 1996; Tanaka and Wang, 2001):

$$\begin{aligned} \text{Se} \quad & z_1(t) \text{ é } M_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_{ip} \\ \text{Então} \quad & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

em que M_{ij} é o conjunto *fuzzy*, r é o número de regras do modelo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de entradas, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ são as matrizes dos modelos locais, e $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]$ são variáveis premissas conhecidas que podem ser função das variáveis de estado, de distúrbios externos ou do tempo. Assim, as regras Se-Então representam relações locais lineares de entrada-saída do sistema não linear.

Dado um par $(x(t), u(t))$, a representação final do sistema não linear por meio do sistema nebuloso é inferida usando o método do centro de gravidade (Wang et al., 1996; Tanaka and Wang, 2001):

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(z(t)))x(t) + B(\alpha(z(t)))u(t) \quad (8)$$

sendo

$$(A, B)(\alpha(z(t))) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A, B)_i$$

e, para todo t , as funções de pertinência $\alpha_i(z(t))$ são membros do conjunto simplex, ou seja,

$$\alpha(z(t)) = [\alpha_1(z(t)) \dots \alpha_r(z(t))]^\top \in \Lambda_r.$$

Dessa forma, o sistema não linear (7) pode ser aproximado, com precisão arbitrária (Tanaka and Wang, 2001), pelo modelo nebuloso T-S (8). Por simplicidade de notação, a dependência de α com relação às variáveis premissas z e ao tempo t é utilizada apenas se necessário.

A estabilidade assintótica global da origem do sistema (8) pode ser provada usando os conceitos apresentados, conforme o Teorema 2.

Teorema 2. Seja $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = x^{\{m\}\top} V x^{\{m\}}$, com $V \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)}$, uma função tal que

$$\begin{cases} v \in \Xi_{n,2m} \\ v(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \\ \dot{v}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \forall \alpha \in \Lambda_r. \end{cases}$$

Então $v(x)$ é uma função de Lyapunov polinomial homogênea (do inglês, *Homogeneous Polynomial Lyapunov Function* — HPLF) de grau $2m$ para o sistema T-S (8) que prova a estabilidade assintótica global da origem do sistema (Chesi et al., 2009).

No caso em que $m = 1$, a HPLF fornece as condições de estabilidade quadrática, amplamente conhecidas e abordadas na literatura.

Para o sistema *fuzzy* T-S (8), utilizando-se a compensação paralela distribuída para o projeto do controlador por realimentação de estados, cada regra de controle é projetada para a regra do modelo T-S correspondente, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Se} \quad & z_1(t) \text{ é } M_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_{ip} \\ \text{Então} \quad & u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Com isso, obtém-se a lei de controle $u(t) = K(\alpha)x(t)$, com

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i, \quad \alpha \in \Lambda_r.$$

O sistema T-S pode, então, ser representado em malha fechada como

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha)x(t), \quad A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha). \quad (9)$$

Utilizando-se uma função de Lyapunov polinomial homogênea, como definido no Teorema 2, é necessário que $v(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^n$. Pela representação SMR, $v(x) = x^{\{m\}\top} V x^{\{m\}}$, ou seja, $V > 0$. Além disso, impõe-se $\dot{v}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^n, \forall \alpha \in \Lambda_r$, ou seja,

$$\dot{v}(x) = \dot{x}^{\{m\}\top} V x^{\{m\}} + x^{\{m\}\top} V \dot{x}^{\{m\}} \quad (10)$$

e, conforme a definição de matriz estendida (4):

$$\dot{v}(x) = x^{\{m\}\top} \left(A_{cl}^{\#\top}(\alpha)V + VA_{cl}^{\#}(\alpha) \right) x^{\{m\}}, \quad (11)$$

ou seja, $\text{He} \left(VA_{cl}^{\#}(\alpha) \right) < 0$. Portanto, para que $v(x)$ seja uma HPLF para o sistema nebuloso T-S é suficiente que as condições do Teorema 3, apresentado a seguir, sejam satisfeitas.

Teorema 3. Seja um inteiro $m \geq 1$ e $L(\beta)$ dado em (3) uma parametrização linear do conjunto $\mathcal{L}_{n,m}$ (2). Dado $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, se existirem $0 < V \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)}$ e $\beta \in \mathbb{R}^{\omega(n,m)}$ tais que

$$\text{He} \left(VA_{cl}^{\#}(\alpha) \right) + L(\beta) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_r, \quad (12)$$

então $v(x) = x^{\{m\}\top} V x^{\{m\}}$ é uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau $2m$ para o sistema T-S (9) que prova a estabilidade assintótica global da origem desse sistema.

De (12), é possível notar a presença do produto da matriz de Lyapunov V pelo controlador $K(\alpha)$, resultando em desigualdade matricial bilinear (do inglês, *Bilinear Matrix Inequality* — BMI). Exclusivamente para o caso $m = 1$, é possível contornar esse problema empregando transformações de congruência e mudanças de variáveis, conforme métodos disponíveis na literatura (Montagner et al., 2009). Contudo, para $m \geq 2$, essas técnicas não mais podem ser aplicadas. No presente trabalho, por outro lado, propõe-se desacoplar esse produto, obtendo-se condições LMIs que podem resolvidas iterativamente, seguindo a metodologia proposta por Felipe and Oliveira (2021). Para tanto, as condições do lema de Finsler, que podem ser encontradas em (de Oliveira and Skelton, 2001), são fundamentais.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Para desacoplar o produto entre a matriz de Lyapunov e a matriz dinâmica de malha fechada do sistema T-S, é possível reescrever (10), somada à parametrização linear (3) do conjunto (2), na forma

$$\dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x^{\{m\}} \\ \dot{x}^{\{m\}} \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} L(\beta) & V \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{\{m\}} \\ \dot{x}^{\{m\}} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sendo

$$\dot{x}^{\{m\}} = A_{cl}^{\#}(\alpha)x^{\{m\}} \Rightarrow [A_{cl}^{\#}(\alpha) - I] \begin{bmatrix} x^{\{m\}} \\ \dot{x}^{\{m\}} \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Portanto, combinando-se (13) e (14), tem-se a forma $\dot{v}(x) = x^{\top} \mathcal{Q}x < 0, \forall \mathcal{B}x = 0, x \neq 0$ do Lema de Finsler. É possível, assim, identificar

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} L(\beta) & V \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = [A_{cl}^{\#}(\alpha) - I],$$

e escrever a condição equivalente:

$$\exists \mathcal{X} : \mathcal{Q} + \text{He}(\mathcal{X}\mathcal{B}) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists \mathcal{X}(\alpha) : \begin{bmatrix} L(\beta) & V \\ V & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} F(\alpha) \\ G(\alpha) \end{bmatrix} [A_{cl}^{\#}(\alpha) - I] \right), \quad (15)$$

sendo a variável de folga $\mathcal{X}(\alpha)^{\top} = [F^{\top}(\alpha) \ G^{\top}(\alpha)]$.

Reescrevendo na forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 & F(\alpha) \\ 0 & I & G(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\beta) & V & A_{cl}^{\#\top}(\alpha) \\ V & 0 & -I \\ A_{cl}^{\#}(\alpha) & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ F^{\top}(\alpha) & G^{\top}(\alpha) \end{bmatrix} < 0,$$

identifica-se $\mathcal{B}^{\perp\top} \mathcal{Q} \mathcal{B}^{\perp} < 0$ do Lema de Finsler. Assim, a condição com variáveis de folga pode ser novamente aplicada, obtendo-se a condição equivalente

$$\exists \mathcal{X}(\alpha) : \begin{bmatrix} L(\beta) & V & A_{cl}^{\#\top}(\alpha) \\ V & 0 & -I \\ A_{cl}^{\#}(\alpha) & -I & 0 \end{bmatrix} + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) < 0, \quad (16)$$

com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = [Y_1(\alpha) \ Y_2(\alpha) \ Y_3(\alpha)],$$

sendo que $\mathcal{B}(\alpha) \mathcal{B}^{\perp}(\alpha) = 0$ implica

$$\begin{cases} F(\alpha) = -(Y_3(\alpha)^{-1}Y_1(\alpha))^{\top} \\ G(\alpha) = -(Y_3(\alpha)^{-1}Y_2(\alpha))^{\top} \end{cases}$$

A condição (16) garante $X_3(\alpha)Y_3(\alpha) + Y_3^{\top}(\alpha)X_3^{\top}(\alpha) < 0$ e, assim, $X_3(\alpha)$ e $Y_3(\alpha)$ são não singulares e invertíveis. Desse modo, sendo $\alpha \in \Lambda_r$, para que o sistema nebuloso T-S com realimentação de estados seja estável é suficiente que as condições do Teorema 4 sejam atendidas.

Teorema 4. Sejam os inteiros $m \geq 1$ e $d \geq 0$, e $L(\beta)$ dado em (3) uma parametrização linear de $\mathcal{L}_{n,m}$ (2). Se existirem matrizes $0 < V \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$, $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times 3\sigma(n,m)}$ e $\beta \in \mathbb{R}^{\omega(n,m)}$ tais que as seguintes BMIs robustas sejam satisfeitas,

$$\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \right)^d \left(\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \right) < 0, \quad (17)$$

para todo $\alpha \in \Lambda_r$ com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} L(\beta) & V & A_{cl}^{\#\top}(\alpha) \\ V & 0 & -I \\ A_{cl}^{\#}(\alpha) & -I & 0 \end{bmatrix},$$

então $v(x) = x^{\{m\}\top} V x^{\{m\}}$ é uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau $2m$ para o sistema T-S (9) que prova a estabilidade assintótica global da origem do sistema.

O parâmetro d utilizado na desigualdade (17) tem relação com a aplicação de relaxações de Pólya (Oliveira and Peres, 2007), que são úteis uma vez que as variáveis de otimização do problema são aproximadas por polinômios de modo a viabilizar uma solução numericamente implementável — em geral conservadora — para as condições do Teorema 4. Outros detalhes sobre esse aspecto são fornecidos mais adiante.

Como a matriz em malha fechada do sistema T-S e a matriz de Lyapunov aparecem linearmente nas condições do

Teorema 4, uma extensão direta é a possibilidade de trabalhar com restrições de magnitude impostas às matrizes do controlador através de restrições lineares e, portanto, sem a inserção de conservadorismo adicional usado em técnicas clássicas na forma de restrições nas estruturas das variáveis de otimização. Para isso, basta impor que as condições LMIs do Teorema 4 sejam resolvidas conjuntamente com as restrições

$$K_i \geq K_{min}, K_i \leq K_{max}, i = 1, \dots, r \quad (18)$$

em que K_{min} e K_{max} são matrizes dadas.

Por outro lado, as condições do Teorema 4 são BMIs devido ao produto $\mathcal{X}\mathcal{B}$. Para resolvê-las, é utilizado um algoritmo iterativo com convergência local, que parte de uma solução inicial factível com a fixação de algumas variáveis — mais precisamente as matrizes de \mathcal{B} —, fazendo com que as condições se tornem LMIs. A factibilidade das condições, entretanto, pode ser mantida aplicando uma relaxação na estabilidade do sistema.

A relaxação consiste na substituição da matriz dinâmica $A_{cl}^\#(\alpha)$ por $(A_{cl}(\alpha) - \rho I)^\#$, com a qual se garante que as condições do Teorema 4 são factíveis para um valor suficientemente elevado de ρ . Como aparece de maneira afim nas condições, ρ pode ser considerado como uma função objetivo a ser minimizada no procedimento iterativo, sendo que o ganho de realimentação de estados obtido para o sistema T-S se torna estabilizante quando ρ atinge um valor não positivo. Outra característica interessante é o fato de que $-\rho$ corresponde ao *decay rate*, sendo esta o maior valor de γ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\gamma t) \|x(t)\| = 0$$

para todas as trajetórias $x(t)$ (Boyd et al., 1994), com valores positivos indicando estabilidade do sistema. Em termos da função de Lyapunov, um limitante inferior para o *decay rate* corresponde a $\gamma > 0$ tal que $\dot{v}(x) \leq -2\gamma v(x)$. Pela expressão de $\dot{v}(x)$ em termos da matriz estendida (11), a condição para o limitante do *decay rate* equivale à substituição de $A_{cl}^\#(\alpha)$ por $(A_{cl}(\alpha) + \gamma I)^\#$, ou seja, o *decay rate* corresponde a $-\rho$, podendo ser maximizado ao minimizar ρ .

Para iniciar o método iterativo, é fundamental partir de uma solução factível, que pode ser obtida conforme descrito no teorema a seguir.

Teorema 5. Seja a condição inicial

$$\bar{\mathcal{B}}_1 = [I \ I \ -I].$$

Então, a desigualdade do Teorema 4 é satisfeita com $\mathcal{X} = -\rho_0 \bar{\mathcal{B}}_1^\top / 2$ para algum $\rho_0 > 0$.

Prova. Considerando-se a definição da matriz estendida em termos de produtos de Kronecker (6), é imediato verificar que $(A + B)^\# = A^\# + B^\#$. Com isso, a relaxação proposta pode ser escrita como $(A_{cl}(\alpha) - \rho I)^\# = A_{cl}^\#(\alpha) - \rho I$, com a matriz identidade de dimensão apropriada. Assim, substituindo-se $A_{cl}^\#(\alpha)$ por $A_{cl}^\#(\alpha) - \rho_0 I$, $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}_1$ e $\mathcal{X} = -\rho_0 \bar{\mathcal{B}}_1$ na condição do Teorema 4, tem-se:

$$\begin{bmatrix} L(\beta) - \rho_0 I & V - \rho_0 I & A_{cl}^\#(\alpha) \\ V - \rho_0 I & -\rho_0 I & (\rho_0 - 1)I \\ A_{cl}^\#(\alpha) & (\rho_0 - 1)I & -\rho_0 I \end{bmatrix} < 0.$$

Escolhendo $V = \rho_0 I$ e $L(\beta) = 0$, a condição anterior pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} -\rho_0 I & 0 & A_{cl}^\#(\alpha) \\ 0 & -\rho_0 I & (\rho_0 - 1)I \\ A_{cl}^\#(\alpha) & (\rho_0 - 1)I & -\rho_0 I \end{bmatrix} < 0.$$

Aplicando-se a esta condição o complemento de Schur (Boyd et al., 1994), tem-se $\rho_0 > 0$ e

$$\begin{aligned} \rho_0 I + [A_{cl}^\#(\alpha) \ (\rho_0 - 1)I] \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho_0 \end{pmatrix} [A_{cl}^\#(\alpha) \\ (\rho_0 - 1)I] \\ = (2\rho_0 - 1)I - A_{cl}^\#(\alpha)A_{cl}^\#(\alpha) > 0, \end{aligned}$$

que é satisfeita para todo $\rho_0 > 0$ tal que $2\rho_0 - 1$ é maior que o raio espectral de $A_{cl}^\#(\alpha)A_{cl}^\#(\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda_r$.

A característica primordial da estratégia utilizada neste trabalho e que permite a solução do problema de maneira iterativa é o fato de que $\text{He}(\mathcal{X}\mathcal{B}) = \text{He}(\bar{\mathcal{B}}^\top \mathcal{X}^\top)$. Assim, todo \mathcal{X}^\top é uma escolha válida para \mathcal{B} na próxima iteração. A convergência local do procedimento iterativo, com ρ não crescente, pode ser provada supondo a factibilidade das condições do Teorema 4 em uma dada iteração k . Como $\text{He}(\mathcal{X}\mathcal{B}) = \text{He}(\bar{\mathcal{B}}^\top \mathcal{X}^\top)$, as condições do Teorema 4 continuam factíveis na iteração $k + 1$ com as escolhas particulares $\mathcal{L}_{k+1} = \mathcal{L}_k$ e $\mathcal{X}_{k+1} = \bar{\mathcal{B}}_k^\top$, garantindo que $\rho_{k+1} \leq \rho_k$.

Baseado nos resultados apresentados, é proposto o Algoritmo 1, consistindo em um procedimento iterativo para cômputo do ganho de realimentação de estados $K(\alpha)$ sujeito a uma limitação de magnitude e que atenda ao critério de desempenho dado por determinado *decay rate* ou que encontre o máximo valor possível para tal critério. Os parâmetros de entrada são as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ dos modelos locais do sistema T-S, o grau m (sendo o grau da função de Lyapunov polinomial homogênea correspondente a $2m$), o número máximo de relaxações de Pólya d_{max} , o número máximo de iterações it_{max} , a condição inicial $\bar{\mathcal{B}}_1$, a restrição dos ganhos K_{max} e K_{min} e o *decay rate* alvo γ_a . Além desses, a tolerância ε também é um parâmetro de entrada, sendo utilizada para avaliar a evolução de ρ entre duas iterações consecutivas. Caso não seja observada evolução significativa do parâmetro ρ , correspondendo a um mínimo local encontrado pelo algoritmo, o conservadorismo da solução da desigualdade (17) é reduzido ao aumentar o número d de relaxações de Pólya. Essa operação pode ajudar o algoritmo a sair do mínimo local.

Graças à forma de Kronecker do Teorema 1, a operação de extensão preserva a estabilidade do sistema. Desse modo, caso as condições do Teorema 4 sejam factíveis para uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau $2m$, então a factibilidade é garantida para uma HPLF de grau $2km$, sendo $k \geq 1$ (Chesi et al., 2009). É possível, portanto, produzir condições iniciais factíveis para um certo grau $2km$ à partir do ganho e do *decay rate* calculados para um grau inferior $2m$, conforme apresentado no Teorema 6.

Teorema 6. Sejam $K_m(\alpha)$ e $\rho_m = -\gamma_{max}$ calculados a partir do Algoritmo 1 para uma HPLF de grau $2m$. Uma solução inicial factível para uma HPLF de grau $2km$, $k \geq 1$, é dada por

$$\bar{\mathcal{B}}_1 = [F^\top(\alpha) \ G^\top(\alpha) \ -I]$$

Algoritmo 1 Estabilização robusta

Entradas: $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, m , d_{max} , it_{max} , \mathcal{B}_1 , K_{min} , K_{max}
 γ_a , ε ,
 1: $k \leftarrow 0$; $d \leftarrow 0$; $A_{cl}^\#(\alpha) \leftarrow (A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha) - \rho I)^\#$;
 2: **Enquanto** $k \leq it_{max}$ **Resolva**
 3: $k \leftarrow k + 1$;
 4: **minimizar** ρ **sujeito a** (17) e (18);
 5: $\mathcal{B}_{k+1} \leftarrow \mathcal{X}^\top$;
 6: **Se** $-\rho_k \geq \gamma_a$ **Então**
 7: **Retorna** $\gamma_{max} = -\rho_k$, $K(\alpha)$, V ;
 8: **Fim Se**
 9: **Se** $\rho_{k-1} - \rho_k \leq \varepsilon$ e $d < d_{max}$ **Então**
 10: $d \leftarrow d + 1$;
 11: **Senão**
 12: **Retorna** $\gamma_{max} = -\rho_k$, $K(\alpha)$, V ;
 13: **Fim Se**
 14: **Fim Enquanto**
 15: **Retorna** $\gamma_{max} = -\rho_k$, $K(\alpha)$, V ;

em que $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ são matrizes soluções da condição (15) com $V > 0$ e

$$A_{cl}^\#(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K_m(\alpha) - \rho_m I.$$

Prova. Imediata à partir da equivalência entre (15) e (16).

O Teorema 6 é particularmente importante no caso em que soluções para $m = 1$ estão disponíveis, obtidas pelo próprio método iterativo ou por outras técnicas, como as de Montagner et al. (2009) ou Sala and Ariño (2007). O procedimento de inicialização proposto pode se beneficiar dessas soluções para procurar soluções para $m \geq 2$ que forneçam melhor *decay rate*, ou que sejam capazes de tratar as restrições de magnitude nos ganhos com menor conservadorismo, inclusive no caso $m = 1$.

4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

As condições do Teorema 4 são resolvidas com o auxílio do *parser* ROLMIP (*Robust LMI Parser*), que aplica uma relaxação para transformar a LMI robusta (17), que depende de $\alpha \in \Lambda_r$, em um conjunto finito de LMIs (Agulhari et al., 2019; Oliveira and Peres, 2007). As variáveis de otimização são fixas como polinômios homogêneos de grau um, e a matriz $L(\beta)$ é construída de acordo com o algoritmo proposto em Chesi et al. (2009). A implementação foi realizada no Matlab 9.4 (R2018a), com o resolvidor Mosek 9.3.18 (Andersen and Andersen, 2000), em um computador com sistema operacional Windows 10 64 bits, processador Core i7 e 8 GB de memória RAM.

Exemplo 1: Neste exemplo, é avaliada a região de factibilidade fornecida pelo controlador PDC por realimentação de estados para o sistema considerando-se a variação dos parâmetros $a \in \{2, 3, 4\}$ e $b \in \{20, 25, 30, 35, 40\}$ com modelos locais dados por (Tanaka et al., 1998)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

No Algoritmo 1, nenhuma restrição de magnitude dos ganhos é imposta em princípio e o *decay rate* alvo é estabelecido como $\gamma_a = 0$, uma vez que se deseja obter simplesmente os ganhos estabilizantes. O número máximo de iterações é $it_{max} = 150$, o número máximo de relaxações

de Pólya em $d_{max} = 5$ e a tolerância $\varepsilon = 10^{-6}$. Testes foram realizados para grau $2m = 2$ da HPLF e a condição inicial \mathcal{B}_1 foi obtida por meio do Teorema 5. A técnica proposta é comparada com as condições LMIs não iterativas programadas com base em Montagner et al. (2009) (MOP09) para funções de Lyapunov quadráticas. Os resultados obtidos são os mesmos para ambos os métodos, com controladores estabilizantes projetados para todos os pontos $a \times b$.

Por outro lado, a superioridade de desempenho do algoritmo proposto fica evidente ao impor limitantes para a magnitude do ganho. No caso de MOP09, essa restrição implica na necessidade de trabalhar com uma matriz de Lyapunov diagonal cujas variáveis são limitadas em função da magnitude do ganho desejada, implicando em condições LMIs mais conservadoras. Aplicando-se, então, a técnica de MOP09 ao sistema (19) com tal restrição da matriz de Lyapunov a fim de atender $|K(\alpha)| \leq 5$, não é possível encontrar ganho estabilizante para nenhum dos pontos (a, b) mapeados, mesmo que o grau das relaxações de Pólya ou das variáveis de folga seja elevado. O algoritmo iterativo, por outro lado, garante que o sistema seja estável pela realimentação de estados em toda a região mostrada na Figura 1 com HPLF de grau $2m = 4$. Nessa, os resultados para HPLF de grau $2m = 2$ foram utilizados para inicializar o algoritmo com grau $2m = 4$, conforme o Teorema 6.

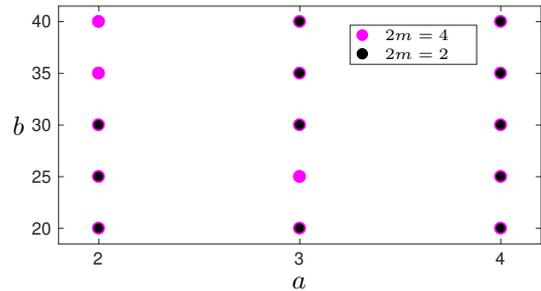


Figura 1. Região de factibilidade do controlador estabilizante por realimentação de estados com limitação de magnitude ($|K(\alpha)| \leq 5$) para o sistema (19) em função dos parâmetros a e b . Os círculos indicam factibilidade do algoritmo iterativo com inicialização por meio do Teorema 5 para HPLF de grau $2m = 2$ e do Teorema 6 para grau $2m = 4$.

Exemplo 2: Seja o sistema nebuloso T-S (criado aleatoriamente com números inteiros) cujas matrizes dos modelos locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Para este exemplo, deseja-se avaliar comparativamente o desempenho das condições LMIs de MOP09 e do algoritmo iterativo proposto neste trabalho quando se considera o controle por realimentação de estados maximizando o *decay rate*. No caso das condições de MOP09, é necessário implementar um algoritmo de maximização. Optou-se por utilizar o método da bissecção, com uma faixa de busca de -1 a 5 . Utilizando 48 variáveis de otimização (V) e 27 linhas de LMIs (L), obtém-se, em 6.05 s de tempo

de execução, o *decay rate* máximo de $\gamma_{max} = -0.0273$, indicando que as condições LMIs de MOP09 não são capazes de encontrar ganhos estabilizantes para o sistema em questão, sendo que o *decay rate* se mantém no valor citado mesmo para graus mais elevados da relaxação de Pólya e das variáveis de folga.

Por outro lado, o *decay rate* máximo com controle PDC por realimentação de estados pode ser obtido diretamente pelo Algoritmo 1 (utilizando-se *decay rate* alvo suficientemente alto, $\gamma_a = 200$ por exemplo), de acordo com o explicitado anteriormente, conforme os resultados mostrados na Tabela 1, em função do grau $2m$ da HPLF utilizada. Na tabela também é mostrado o número necessário de iterações para a convergência do algoritmo, bem como os números V e L , além do tempo total demandado pelo algoritmo. É importante ressaltar que para $2m = 2$ o algoritmo foi inicializado com o Teorema 5, enquanto que, para $2m > 2$, a inicialização do método iterativo se deu pelo Teorema 6 usando os resultados obtidos com o próprio algoritmo iterativo para $2m = 2$. O número máximo de iterações foi estabelecido em $it_{max} = 300$, o número máximo de relaxações de Pólya em $d_{max} = 5$ e a tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$.

Tabela 1. *Decay rate* máximo, número de iterações, de variáveis de otimização (V) e de linhas de LMIs (L), e tempo de execução do Algoritmo 1 para a realimentação de estados do sistema (20) em função do grau $2m$ da HPLF.

$2m$	γ_{max}	iterações	V	L	tempo (s)
2	-0.0276	58	67	30	18.07
4	0.2630	151	256	60	33.73
6	0.3543	227	716	100	165.50
8	0.3907	195	1627	150	740.80

De acordo com os resultados da Tabela 1, fica evidente a superioridade do método iterativo para a maximização do *decay rate*, visto que ganhos estabilizantes foram encontrados para graus da função de Lyapunov polinomial homogênea $2m \geq 4$, sendo tal critério de desempenho mais elevado conforme o grau da HPLF também é maior.

Exemplo 3: Neste exemplo, também é avaliado o *decay rate* máximo fornecido pelo controlador PDC por realimentação de estados para o sistema com modelos locais (Tanaka, 1998):

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & & & \\ & I_3 & & \\ & & 0_{3 \times 1} & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5294 & -4.0766 & 1.6098 & 1.6137 \\ -4.1889 & -4.0188 & 0.2763 & 1.5403 \\ 1.6810 & 0.8008 & 3.8739 & 3.1155 \\ 1.8107 & 3.6929 & 2.3598 & -2.1379 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \text{diag}(b_i), \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.4122 & 3.4515 & 4.6747 & 7.4787 \\ 0.0693 & 3.4507 & 0.6016 & 3.7547 \\ 4.7424 & 0.8277 & 5.8853 & 3.7740 \\ 0.4272 & 6.6247 & 2.9541 & 5.6937 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Para as condições LMIs de MOP09 no caso quadrático, obteve-se $V = 202$, $L = 164$, tempo total de execução do método da bisseção de 10.86 s e *decay rate* máximo encontrado correspondente a $\gamma_{max} = 200$, sendo este o limite superior utilizado no método da bisseção. A vantagem desse alto *decay rate*, por outro lado, é a magnitude elevada dos ganhos de realimentação de estados, que chegam à ordem de 6×10^3 . Para evitar estes valores elevados, que podem ser prejudiciais para a vida útil de sistemas físicos,

é necessário impor restrições de magnitude nos ganhos e, conseqüentemente, no método MOP09, uma estrutura diagonal na matriz de Lyapunov, similarmente ao que foi realizado no Exemplo 1. Considerando-se a limitação de magnitude $|K(\alpha)| \leq 500$, as condições LMIs de MOP09 apresentam conservadorismo elevado, implicando na inefetividade do ganho estabilizante mesmo com elevados graus das relaxações de Pólya e das variáveis de folga. Nesse sentido, novamente o algoritmo iterativo apresenta desempenho superior, com o *decay rate* máximo obtido mostrado na Tabela 2, que segue a mesma estrutura de apresentação dos resultados que a Tabela 1. O número máximo de iterações foi $it_{max} = 300$, o número máximo de relaxações de Pólya em $d_{max} = 5$ e a tolerância $\varepsilon = 10^{-5}$. A inicialização do algoritmo para HPLF de grau $2m > 2$ pelo Teorema 6 usando os resultados do método iterativo para a HPLF de grau $2m = 2$ reflete em número de iterações reduzido para a convergência do algoritmo. Além disso, o aumento do grau $2m$ da HPLF novamente acompanha o crescimento de γ_{max} .

Tabela 2. *Decay rate* máximo, número de iterações, de variáveis de otimização (V) e de linhas de LMIs (L), e tempo de execução do Algoritmo 1 para a realimentação de estados com limitação de magnitude ($|K(\alpha)| \leq 500$) para o sistema (21) em função do grau $2m$ da HPLF.

$2m$	γ_{max}	iterações	V	L	tempo (s)
2	31.1820	300	267	252	112.64
4	115.4042	9	1400	438	56.51
6	117.9375	8	5579	748	1066.42

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um algoritmo iterativo para estabilização de sistemas nebulosos T-S por meio da realimentação de estados utilizando funções de Lyapunov polinomiais homogêneas no estado. Os resultados obtidos com a técnica proposta mostram-se superiores aos que podem ser encontrados com condições LMIs não iterativas disponíveis na literatura, especialmente quando inicializações para o algoritmo baseadas em resultados obtidos com funções de Lyapunov de graus inferiores estão disponíveis. Com isso, o procedimento iterativo consegue superar o desempenho de funções de Lyapunov quadráticas, permitindo a obtenção de *decay rate* superior, inclusive para casos em que a função quadrática não consegue obter ganhos estabilizantes. Tal vantagem se mostra ainda mais evidente ao considerar-se a limitação da magnitude dos ganhos do controlador no algoritmo iterativo, que só podem ser tratadas por técnicas tradicionais com conservadorismo, muitas vezes não fornecendo soluções factíveis.

REFERÊNCIAS

- C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. <http://rolmip.github.io>.
- E. D. Andersen and K. D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An

- implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, pages 197–232. Springer US, 2000. <http://www.mosek.com>.
- F. Blanchini and S. Miani. A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 44(3):641–647, March 1999.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*, volume 390 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.
- M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, NY, 2001.
- C.-H. Fang, Y.-S. Liu, S.-W. Kau, L. Hong, and C.-H. Lee. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 14(3):386–397, June 2006.
- A. Felipe and R. C. L. F. Oliveira. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 66(9):4365–4370, September 2021.
- P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works, Natick, MA, 1995.
- S. Georg, H. Schulte, and H. Aschemann. Control-oriented modelling of wind turbines using a Takagi-Sugeno model structure. In *Proc. 2012 IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, pages 1–8, Brisbane, Australia, June 2012.
- T. M. Guerra and L. Vermeiren. LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5):823–829, May 2004.
- E. Kim and H. Lee. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8(5):523–534, October 2000.
- M. Klug, E. B. Castelan, V. J. S. Leite, and L. F. P. Silva. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets & Syst.*, 263:92–111, March 2015.
- X. Liu and Q. Zhang. New approaches to \mathcal{H}_∞ controller designs based on fuzzy observers for T–S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 39(5):1571–1582, October 2003.
- V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and \mathcal{H}_∞ control for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 17(4):863–873, August 2009.
- L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. C. Avellar. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Inform. Sci.*, 179(8):1149–1162, March 2009.
- R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.
- M. M. Quadros, V. J. S. Leite, and R. M. Palhares. Robust fault hiding approach for T–S fuzzy systems with unmeasured premise variables. *Inform. Sci.*, 589:690–715, April 2022.
- B.-J. Rhee and S. Won. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets & Syst.*, 157(9):1211–1228, May 2006.
- A. Sala and C. Ariño. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets & Syst.*, 158(24):2671–2686, December 2007.
- J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Method Softw.*, 11(1–4):625–653, 1999. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, SMC-15(1):116–132, January 1985.
- K. Tanaka. Stability of fuzzy controllers. In H. T. Nguyen and M. Sugeno, editors, *Fuzzy Systems: Modeling and Control*, pages 273–290. Springer, New York, NY, 1998.
- K. Tanaka and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets & Syst.*, 45(2):135–156, January 1992.
- K. Tanaka and H. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2001.
- K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6(2):250–265, May 1998.
- K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(4):582–589, August 2003.
- T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 9(4):525–538, August 2001.
- M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(5):613–623, October 2003.
- E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Selective \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 19(5):890–900, October 2011a.
- E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An LMI-based approach to static output feedback stabilization of T–S fuzzy systems. In *Proc. 18th IFAC World Congr.*, pages 12593–12598, Milano, Italy, August 2011b.
- H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 4(1):14–23, February 1996.
- M. I. Younis. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer, New York, NY, 2012.
- A. L. Zelentsovsky. Nonquadratic Lyapunov functions for robust stability analysis of linear uncertain systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(1):135–138, 1994.