

# Controle Robusto PID Para Sistemas Lineares Incertos Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares<sup>\*</sup>

Danilo L. Matias, Ricardo C. L. F. Oliveira, Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP  
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil  
(e-mails: danilolimamatias@gmail.com, {ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br).

**Abstract:** This paper investigates the problem of PID (Proportional-Integral-Derivative) control design for uncertain linear systems. Starting from the definition of intervals for the gains of the controller, a state space realization of order 2 for the PID controller is employed for the feedback of SISO dynamic systems of arbitrary order with uncertain time-invariant parameters belonging to polytopes. Therefore, in closed-loop, one gets a linear uncertain system depending on uncertain parameters and on the controller gains belonging to known intervals. A procedure based on the iterative subdivision of the space of the controller parameters is applied and parameter-dependent Lyapunov functions are used to identify the stable regions and, then, to assure a guaranteed  $\mathcal{H}_\infty$  performance index for each region. Numerical examples, including comparisons with one method from the literature, are presented to illustrate the advantages of the proposed technique.

**Resumo:** Este artigo investiga o problema de controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo) para sistemas lineares incertos. A partir da definição de intervalos para os ganhos do controlador, uma realização no espaço de estados de ordem 2 para o controlador PID é utilizada para realimentar sistemas dinâmicos SISO (do inglês, *Single-Input Single-Output*) de ordem arbitrária com parâmetros incertos invariantes no tempo pertencentes a politopos. Como consequência, em malha fechada, tem-se um sistema linear incerto dependendo dos parâmetros incertos do modelo e dos ganhos do controlador pertencentes a intervalos conhecidos. Um procedimento baseado na subdivisão iterativa do espaço dos parâmetros do controlador é aplicado e funções de Lyapunov dependentes de parâmetros são utilizadas para identificar as regiões de estabilidade e, posteriormente, garantir um índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para cada região. Exemplos numéricos, incluindo comparações com um método da literatura, são apresentados para ilustrar as vantagens da técnica proposta.

**Keywords:** PID control; Robust stability analysis;  $\mathcal{H}_\infty$  norm; Linear matrix inequalities.

**Palavras-chaves:** Controle PID; Análise de estabilidade robusta; Norma  $\mathcal{H}_\infty$ ; Desigualdades matriciais lineares.

## 1. INTRODUÇÃO

Entre as diversas técnicas de controle disponíveis na literatura, sem sombra de dúvidas o chamado controle proporcional-integral-derivativo, ou simplesmente, *controle PID* (Åström and Hägglund, 1995), é a preferência no meio industrial (Lin et al., 2004), principalmente no tratamento de dinâmicas modeladas como lineares de ordem um ou dois (ou ordem um com atraso). Para essa classe de plantas, métodos analíticos (e.g., Cohen-Coon) e empíricos (e.g., Ziegler-Nichols) são comumente empregados, fornecendo resultados satisfatórios (Åström and Hägglund, 1995, 2001; Li et al., 2006). Contudo, graças aos avanços

contínuos nas áreas de sensores e microprocessadores, maiores exigências de desempenho no controle de processos têm demandando técnicas de sintonia mais gerais, capazes de tratar modelos de ordens maiores e, principalmente, parâmetros incertos.

Técnicas de controle para modelos lineares sujeitos a parâmetros incertos têm sido constantemente aprimoradas ao longo das últimas duas décadas, sendo um importante avanço no desenvolvimento de estratégias de controle chamadas *robustas* (Geromel et al., 1991; Iwasaki and Skelton, 1994; Gahinet and Apkarian, 1994; Takahashi et al., 1997; de Oliveira et al., 1999; de Souza et al., 2003; Ebihara and Hagiwara, 2004; Trofino et al., 2005; Gonçalves et al., 2005; Gonçalves et al., 2008; Agulhari et al., 2012; Parada et al., 2017; Felipe and Oliveira, 2021). Nesse contexto destacam-se os métodos desenvolvidos a partir da teoria

<sup>\*</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e CNPq.

de estabilidade de Lyapunov, que em geral resultam em condições de projeto formuladas como problemas de otimização convexos, por exemplo, em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) Boyd et al. (1994). Contudo, controle PID é uma técnica de realimentação de saída e nesse contexto ainda observam-se condições de projeto conservadoras e de baixo desempenho, pelo menos quando comparadas com métodos baseados na realimentação dos estados. O motivo principal para esse fato é que a realimentação da saída, no caso geral, resulta em um problema de otimização não convexo (Syrmos et al., 1997). Assim, uma formulação convexa é geralmente obtida a partir de hipóteses conservadoras ou restritivas, dificultando a obtenção de controladores com os melhores desempenhos possíveis (Gonçalves et al., 2008; Boyd et al., 2016; Parada et al., 2017; Ortiz et al., 2020).

Este trabalho propõe uma técnica de controle PID para sistemas lineares com parâmetros incertos pertencentes a um politopo, frequentemente chamados de sistemas lineares *politópicos*. Essa representação de sistemas lineares incertos é uma das mais utilizadas na literatura de controle robusto via otimização convexa. O método proposto é baseado no emprego de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e na subdivisão de um domínio poliedral gerado pelo espaço dos ganhos do controlador. Como resultado tem-se um método capaz de computar controladores PID estabilizantes que garantem o melhor nível de desempenho dentro de uma precisão pré-estabelecida. Essa abordagem contrasta com os métodos da literatura, que não oferecem uma maneira sistemática para diminuir o conservadorismo. As condições de projeto são resolvidas em termos de LMIs, com esforço computacional proporcional ao nível de precisão escolhido. Como critério de desempenho utiliza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que é um índice associado à atenuação de distúrbios. Outros critérios de desempenho, que possam ser representados em termos de LMIs, também podem ser utilizados pelo método proposto. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia da técnica.

## 2. PRELIMINARES

Seja um sistema linear incerto a tempo contínuo representado na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B_u(\alpha)u + B_w(\alpha)w, \\ z &= C(\alpha)x + D_u(\alpha)u + D_{zw}(\alpha)w, \\ y &= C_y(\alpha)x + D_{yw}(\alpha)w \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$  e  $y \in \mathbb{R}$  são respectivamente o vetor de estados, a entrada de controle, a entrada de distúrbios, a saída controlada e a saída medida. As matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_u(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $B_w(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_u(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $D_{zw}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $C_y(\alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $D_{yw}(\alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times r}$  são todas estruturadas na forma

$$X(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$$

sendo  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes conhecidas (chamadas de vértices) e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  um vetor parâmetros incertos invariantes no tempo confinado no simplex unitário dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\}$$

Este artigo propõe um procedimento de projeto para a lei de realimentação PID dada pela função de transferência

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{1 + \tau s}$$

com  $k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}$ , que relaciona<sup>1</sup> a entrada  $U(s)$  com a saída  $Y(s)$ . Uma realização com dois estados possível para a função de transferência  $K(s)$  é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} k_i \\ -\frac{k_d}{\tau^2} \end{bmatrix}, C_c = [1 \ 1], D_c = k_p + \frac{k_d}{\tau}$$

A dinâmica de malha fechada (conexão entre (1) e (2)) pode ser representada na forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \mathbf{A}(\alpha)\bar{x} + \mathbf{B}(\alpha)w, \\ z &= \mathbf{C}(\alpha)\bar{x} + \mathbf{D}(\alpha)w, \end{aligned} \quad (3)$$

com,  $\bar{x} = [x^T \ x_c^T]^T$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) + B_u(\alpha)D_c C_y(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ B_c C_y(\alpha) & A_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_w(\alpha) + B_u(\alpha)D_c D_{yw}(\alpha) \\ B_c D_{yw}(\alpha) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\alpha) &= [C(\alpha) + D_u(\alpha)D_c C_y(\alpha) \ D_u(\alpha)C_c] \\ \mathbf{D}(\alpha) &= [D_{zw}(\alpha) + D_u(\alpha)D_c D_{yw}(\alpha)] \end{aligned}$$

Substituindo as matrizes do controlador em função dos parâmetros  $k_p, k_i$  e  $k_d$ , obtém-se a seguinte representação alternativa para a matriz  $\mathbf{A}(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} B_u(\alpha)C_y(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ k_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & C_y(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} B_u(\alpha)\frac{1}{\tau}C_y(\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau^2}C_y(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}_0(\alpha) + k_p \mathbf{A}_1(\alpha) + k_i \mathbf{A}_2(\alpha) + k_d \mathbf{A}_3(\alpha) \end{aligned}$$

Note que as matrizes  $\mathbf{A}_i(\alpha)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  não dependem dos parâmetros do controlador, apenas das incertezas da planta. Assumindo que os parâmetros do controlador estão confinados a faixas pré-estabelecidas na forma

$$\underline{a}_p \leq k_p \leq \bar{a}_p, \quad \underline{a}_i \leq k_i \leq \bar{a}_i, \quad \underline{a}_d \leq k_d \leq \bar{a}_d \quad (4)$$

verifica-se que  $\mathbf{A}(\alpha)$  possui incertezas mistas, isto é, incertezas politópica e hiperretangular (ou afim). Uma maneira conveniente para descrever as incertezas da planta e as faixas dos ganhos do controle é utilizar a seguinte representação para os ganhos

$$\begin{aligned} k_p &= \beta_1 \underline{a}_p + \beta_2 \bar{a}_p, \beta \in \Lambda_2 \\ k_i &= \gamma_1 \underline{a}_i + \gamma_2 \bar{a}_i, \gamma \in \Lambda_2 \\ k_d &= \delta_1 \underline{a}_d + \delta_2 \bar{a}_d, \delta \in \Lambda_2 \end{aligned}$$

Definindo o vetor de parâmetros incertos  $\vartheta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , representa-se a matriz dinâmica do sistema por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\vartheta) &= \mathbf{A}_0(\alpha) + (\beta_1 \underline{a}_p + \beta_2 \bar{a}_p) \mathbf{A}_1(\alpha) \\ &+ (\gamma_1 \underline{a}_i + \gamma_2 \bar{a}_i) \mathbf{A}_2(\alpha) + (\delta_1 \underline{a}_d + \delta_2 \bar{a}_d) \mathbf{A}_3(\alpha) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $U(s)$  e  $Y(s)$  são respectivamente as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $y(t)$ .

com  $\vartheta \in \Lambda_N \times \Lambda_2 \times \Lambda_2 \times \Lambda_2$ . Adotando o mesmo procedimento para a matriz  $\mathbf{A}(\vartheta)$ , é possível obter as outras matrizes do sistema na forma  $\mathbf{B}(\vartheta)$ ,  $\mathbf{C}(\vartheta)$  e  $\mathbf{D}(\vartheta)$ .

Com as hipóteses apresentadas, a busca por um controlador estabilizante e que também oferece algum desempenho traduz-se na análise das matrizes incertas  $\mathbf{A}(\vartheta)$ ,  $\mathbf{B}(\vartheta)$ ,  $\mathbf{C}(\vartheta)$  e  $\mathbf{D}(\vartheta)$ . Mais precisamente, procura-se por valores de  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  confinados em suas faixas tais que o sistema seja estável e forneça um certo desempenho para todo  $\alpha \in \Lambda$ . Neste trabalho é investigada a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w$  para  $z$ , que oferece uma medida da atenuação da energia do sinal  $w$  sobre a energia da saída  $z$  para sinais quadraticamente integráveis (isto é, quando  $w \in \mathcal{L}_2$ ). Para calcular um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é utilizada a desigualdade<sup>2</sup> (*bounded real lemma*, (Boyd et al., 1994))

$$\begin{bmatrix} F(\vartheta)\mathbf{A}(\vartheta) + \mathbf{A}(\vartheta)^T F(\vartheta)^T & P(\vartheta) - F(\vartheta) + \mathbf{A}(\vartheta)^T G(\vartheta) \\ \star & -G(\vartheta) - G(\vartheta)^T \\ \star & \star \\ \star & \star \\ F(\vartheta)\mathbf{B}(\vartheta) & \mathbf{C}(\vartheta)^T \\ G(\vartheta)^T \mathbf{B}(\vartheta) & 0 \\ -I & \mathbf{D}(\vartheta)^T \\ \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

em que  $P(\vartheta) = P(\vartheta)^T$  é uma matriz definida positiva e  $F(\vartheta)$  e  $G(\vartheta)$  são variáveis de folga a serem determinadas. Em caso de solução,  $\gamma$  é um custo garantido para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha-fechada.

A factibilidade do bloco formado pelas duas primeiras linhas e colunas da desigualdade, isto é<sup>3</sup>,

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\vartheta) \\ \star & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} F(\vartheta) \\ G(\vartheta) \end{bmatrix} [\mathbf{A}(\vartheta) - I] \right) < 0 \quad (6)$$

com  $P(\vartheta) > 0$  é um teste de estabilidade robusta implícito na desigualdade (5), condição necessária para a existência da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 3. PROCEDIMENTO DE SÍNTESE

Diferentemente das abordagens tradicionais de síntese de controle por realimentação dinâmica de saída, neste trabalho utiliza-se uma extensão da técnica sugerida em Sabra et al. (2021), em que os ganhos de controle são procurados por um procedimento de subdivisão sucessiva do paralelepípedo definido pelos intervalos dados em (4), de modo a encontrar ganhos estabilizantes que fornecem o menor valor possível para o limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . A vantagem desta técnica é a possibilidade de reduzir progressivamente o conservadorismo dos resultados com o refinamento da subdivisão do domínio definido por (4). Como desvantagem, tem-se o aumento do tempo computacional, que é diretamente proporcional ao granulamento da malha. Contudo, esse procedimento pode ser regulado de modo a oferecer o melhor custo-benefício entre precisão e carga computacional. Outra vantagem da técnica utilizada é que as condições de análise e cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  aplicadas às matrizes incertas que dependem de  $\vartheta$ , também podem ter o conservadorismo controlado por meio de aproximações polinomiais de grau arbitrário para a matriz de Lyapunov

<sup>2</sup> O símbolo  $\star$  representa blocos simétricos.

<sup>3</sup>  $\text{He}(X) = X + X^T$ .

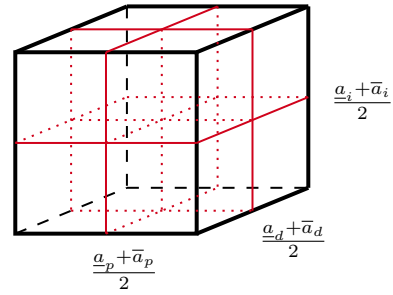


Figura 1. Subdivisão da região (paralelepípedo) definida pelos intervalos dados em (4) em oito sub-regiões. Os cortes (em vermelho) são realizados nos pontos médios das arestas.

$P(\vartheta)$  e as matrizes de folga, como discutido nas próximas seções. Como em geral um critério de desempenho só é computado para sistemas estáveis, o procedimento proposto é realizado em duas etapas. Inicialmente, na *estabilização*, determinam-se regiões estáveis dentro do domínio (4). Posteriormente, avalia-se o desempenho exclusivamente nas regiões estáveis.

#### Etapa 1: Estabilização

Na primeira etapa, a técnica de síntese deve procurar por regiões dentro do domínio definido em (4) tais que o sistema em malha-fechada seja robustamente estável. O procedimento de busca consiste em verificar, em um primeiro passo, a estabilidade robusta da matriz  $\mathbf{A}(\vartheta)$  dentro da região (paralelepípedo) definida pelos limitantes dados em (4). Caso a estabilidade robusta não seja verificada, a região é dividida em oito sub-regiões tomando os pontos médios dos três intervalos, conforme ilustração apresentada na Figura 1. A condição de estabilidade robusta é então aplicada nas oito regiões, e assim prossegue-se subdividindo o domínio até que a estabilidade seja verificada ou até que o volume da região seja inferior a um limite pré-especificado. Nesse último caso a região é definida como instável e a subdivisão não é mais aplicada. Esse procedimento é formalizado pelo Algoritmo 1. Com relação ao cálculo da estabilidade (realizado na linha 8), visando uma eficiência computacional maior, antes de aplicar uma condição suficiente de estabilidade baseada em LMIs (desigualdade mostrada na equação (6)), os vértices da região incerta são testados. Apenas se todos forem estáveis, a condição baseada em LMIs, em geral mais custosa computacionalmente, é aplicada. Ao final da execução o algoritmo retorna as regiões que foram certificadas como estáveis dentro da precisão estabelecida pelo volume mínimo. Com relação à forma de implementação, o algoritmo é relativamente simples, requerendo apenas uma estrutura de dados (nesse caso, uma lista) que ofereça as operações de inserção e remoção do primeiro elemento.

A partir de um conjunto de regiões estáveis determinado pelo Algoritmo 1, o procedimento de síntese passa para a fase de cômputo do desempenho.

#### Etapa 2: Otimização do desempenho

Nesta etapa um limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é computado para todas as regiões estáveis determinadas anteriormente e armazenadas na variável `regioesEstaveis`. Em princípio

---

**Algoritmo 1** Controle PID: Estabilização.

---

```

1: Entradas: matrizes do sistema;  $\underline{a}_p, \bar{a}_p, \underline{a}_i, \bar{a}_i, \underline{a}_d, \bar{a}_d$ ;
    $vol_{min}$  (volume mínimo)
2: listaRegioes.Insere( $[\underline{a}_p, \bar{a}_p, \underline{a}_i, \bar{a}_i, \underline{a}_d, \bar{a}_d]$ );
3: regioesEstaveis  $\leftarrow \emptyset$ ;
4: Enquanto listaRegioes não é vazia Faça
5:   regioao  $\leftarrow$  listaRegioes.RemovePrimeiro();
6:   Avalia estabilidade de  $\mathbf{A}(\vartheta)$  em regioao;
7:   Se estável Então
8:     regioesEstaveis.Insere(regioao);
9:   Senão
10:    Se  $volume(\text{regiao}) > vol_{min}$  Então
11:      subRegioes  $\leftarrow$  subRegiao(regiao);
12:      listaRegioes.Insere(subRegioes);
13:    Fim Se
14:  Fim Se
15: Fim Enquanto
16: Retorna regioesEstaveis

```

---

o objetivo é computar um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para todas as regiões. Contudo, é possível que o limitante calculado esteja longe do custo garantido de pior caso, principalmente se a região em análise for grande. Assim, esta etapa do procedimento de síntese também pode realizar subdivisões do domínio, eventualmente encontrando controladores com melhor desempenho. Como critério para subdividir uma região, calcula-se a diferença relativa entre a norma calculada nos vértices (é um limitante inferior) da região definida para o controlador (toma-se o pior caso) e a norma calculada para toda a região (limitante superior). Caso a diferença esteja acima de um certo limiar, subdivide-se a região. Caso contrário a região é dada como processada. O Algoritmo 2 apresenta esta etapa de síntese. Como resultado, tem-se um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  associado a cada região estável. Por conta do critério de refinamento, é possível que o número de regiões estáveis com custos garantidos determinados seja maior que o número de regiões estáveis passadas como entrada do procedimento. O melhor controlador  $\mathcal{H}_\infty$  está associado à região com menor custo garantido. Note, contudo, que essa região fornece uma *família* de controladores que asseguram esse custo garantido para o sistema em malha-fechada. Na implementação, qualquer ganho da família, por exemplo, um dos vértices ou o ponto médio, pode ser utilizado. Essa característica, diferente das técnicas tradicionais da literatura, que computam um ganho único, confere um certo grau de resiliência (não fragilidade) ao controlador implementado.

Caso um detalhamento maior de um certo conjunto de regiões seja desejado, apenas esse conjunto pode ser passado como entrada em uma nova execução do Algoritmo 2. Essa é uma das principais vantagens de trabalhar-se com dois algoritmos, pois eventuais refinamentos no custo não dependem mais da fase de estabilização. Além disso, o Algoritmo 2 pode ser facilmente adaptado para tratar outros critérios de desempenho, não dependendo de novas execuções do Algoritmo 1. Como comentário final, note que a análise de todos os intervalos estáveis passados como entrada do Algoritmo 2 é completamente independente. Portanto, caso o Algoritmo 2 seja paralelizado, permitindo execuções simultâneas, as regiões poderiam ser processadas independentemente. Esse aspecto, atraente em princípio,

não pode ser explorado pelas técnicas da literatura que tratam os ganhos de controle como variáveis de otimização.

---

**Algoritmo 2** Controle PID: Otimização  $\mathcal{H}_\infty$ .

---

```

1: Entradas: matrizes do sistema; regioesEstaveis;
    $vol_{min}$  (volume mínimo);  $\gamma_{rel}$  (limiar de desempenho
   relativo)
2: listaRegioes.Insere(regioesEstaveis);
3: regioesHinf  $\leftarrow \emptyset$ ;
4: Enquanto listaRegioes não é vazia Faça
5:   regioao  $\leftarrow$  listaRegioes.RemovePrimeiro();
6:    $[\gamma, \gamma_v] \leftarrow$  norma( $\mathbf{A}(\vartheta), \mathbf{B}(\vartheta), \mathbf{C}(\vartheta), \mathbf{D}(\vartheta)$ , regioao);
7:   Se  $(\gamma - \gamma_v)/\gamma > \gamma_{rel}$  &  $volume(\text{regiao}) > vol_{min}$ 
   Então
8:     subRegioes  $\leftarrow$  subRegiao(regiao);
9:     listaRegioes.Insere(subRegioes);
10:  Senão
11:    regioesHinf.Insere(regiao,  $\gamma$ );
12:  Fim Se
13: Fim Enquanto
14: Retorna regioesHinf

```

---

#### 4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Antes de apresentar os exemplos, é importante informar alguns detalhes sobre como as desigualdades (5) e (6) são implementadas. Na forma em que foram apresentadas, as desigualdades (5) e (6) são LMIs dependentes de parâmetros, pois nenhuma estrutura é fixada para a matriz de Lyapunov  $P(\vartheta)$  e para as variáveis de folga  $F(\vartheta)$  e  $G(\vartheta)$ . Como amplamente discutido na literatura, estruturas polinomiais homogêneas não perdem generalidade (Bliman, 2004; Oliveira and Peres, 2007) e, portanto, são adotadas. Nesse contexto note que as matrizes variáveis dependem de quatro vetores de parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , com os últimos três associados ao espaço dos ganhos de controle. Dado que esse espaço pode ser subdividido arbitrariamente, o grau de dependência polinomial das variáveis nesses parâmetros não é tão relevante, pois qualquer grau fixo torna-se suficiente à medida que as regiões vão ficando menores. Por outro lado, a dependência das variáveis em  $\alpha$  requer mais atenção, pois um grau fixo pode ser conservador. Somente o aumento progressivo do grau é que pode levar o procedimento de síntese a identificar todas as regiões estáveis e calcular os custos garantidos ótimos (dentro de uma certa precisão) em cada região. Graus elevados requerem, por outro lado, um maior esforço computacional. Portanto, na implementação numérica foi utilizado grau um em todos os parâmetros ( $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ ). O código computacional foi implementado com auxílio dos *parsers* ROLMIP (Agulhari et al., 2019), YALMIP (Löfberg, 2004), que são capazes de definir as LMIs finitas a partir dos graus informados. As LMIs foram então solucionadas com o resolvidor Mosek (Andersen and Andersen, 2000). O PC empregado foi: Core Core i7-10750H (2.60 GHz), 16 GB of RAM, MATLAB Versão: 9.4.0.813654 (R2018a) 64 bits, Windows 11 v.21H2 64 bits.

##### Exemplo 1

Como primeiro exemplo considere o controle PID de um sistema massa-mola-amortecedor. O modelo é baseado na

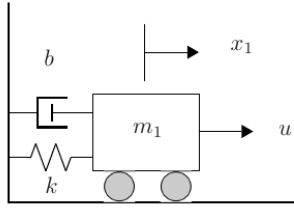


Figura 2. Sistema massa-mola.

ilustração fornecida na Figura 2 e tem representação de estados dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] x$$

com  $m = 10 \text{ Kg}$ ,  $k \in [2, 5] \text{ N/m}$ ,  $b \in [3, 7] \text{ Ns/m}$ , resultando em um polítopo de quatro vértices.

Para fins comparativos, inicialmente projeta-se um controlador de ordem dois genérico utilizando uma condição da literatura capaz de sintetizar controladores dinâmicos de ordem reduzida, como a condição de síntese fornecida por Agulhari et al. (2012), que é baseada na técnica dos dois estágios (Peaucelle and Arzelier, 2001). Considerando a busca linear  $\xi \in (10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 0, 1, \dots, 10^6)$  no primeiro estágio, obteve-se o seguinte controlador dinâmico de ordem dois

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} -1,9254 & 0,1395 \\ 0,1832 & -1,9726 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1,0683 \\ -1,0938 \end{bmatrix} y$$

$$u = [11,0299 \ -11,1415] x_c - 26,8606y$$

com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  dado por  $\gamma = 0,2002$ . É importante frisar que o método de Agulhari et al. (2012) foi aplicado sem nenhuma restrição dos ganhos do controlador e o tempo total do procedimento foi de aproximadamente 30 segundos. Aplicando o Algoritmo 1 com <sup>4</sup>

$$\underline{a}_p = \bar{a}_p = \underline{a}_i = \bar{a}_i = \underline{a}_d = \bar{a}_d = 10, \quad vol_{min} = 2, \quad \tau = 2$$

foram obtidas regiões de estabilidade. O procedimento demandou 39,63 segundos, produzindo 64 regiões estáveis e 4025 regiões instáveis. No total foram 4673 iterações com 64 problemas LMIs resolvidos. Na sequência o Algoritmo 2 foi aplicado nas 64 regiões estáveis com  $vol_{min} = 0,5$  e considerando  $B_w(\alpha) = [0 \ 0,1]^T$ ,  $C(\alpha) = C_y(\alpha)$ ,  $D_u = 0$ ,  $D_{zw} = D_{yw} = 0,1$ . Para realizar uma avaliação do efeito dos parâmetros que impactam diretamente na acurácia e tempo computacional do algoritmo, os seguintes valores foram considerados  $vol_{min} \in \{0,5; 0,05; 0,005\}$  e  $\gamma_{rel} \in \{2\%, 5\%\}$ , e os resultados são mostrados na Tabela 1.

O caso  $vol_{min} = 0,05$  e  $\gamma_{rel} = 2\%$  forneceu a seguinte família de controladores

$$\begin{aligned} -7,5000 &\leq k_p \leq -6,8750 \\ -1,8750 &\leq k_i \leq -1,2500 \\ -10,0000 &\leq k_d \leq -9,3750 \end{aligned}$$

com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  dado por  $\gamma = 0,1244$ . Tomando os pontos médios dos intervalos, tem-se a seguinte função de transferência PID

$$K(s) = -7,1875 - \frac{1,5625}{s} - \frac{9,6875s}{1 + 2s}$$

Uma ilustração gráfica dos custos garantidos obtidos nas regiões de estabilidade é apresentada na Figura 3, na

<sup>4</sup> O valor de  $\tau$  foi escolhido arbitrariamente.

Tabela 1. Resultados da aplicação do Algoritmo 2 no sistema massa-mola considerando diferentes valores de  $vol_{min}$  e  $\gamma_{rel}$ . O número de iterações ( $it$ ), número de regiões ( $n^\circ \text{ reg.}$ ), custo garantido ( $\gamma$ ) e tempo computacional (em segundos) são informados.

$vol_{min}$	$\gamma_{rel}$	$it$	$n^\circ \text{ reg.}$	$\gamma$	tempo (s)
0,5	2	112	100	0,1244	35,45
0,5	5	104	93	0,1366	31,81
0,05	2	160	141	0,1244	58,16
0,05	5	152	134	0,1366	61,29
0,005	2	216	187	0,1244	97,32
0,005	5	208	180	0,1366	104,34

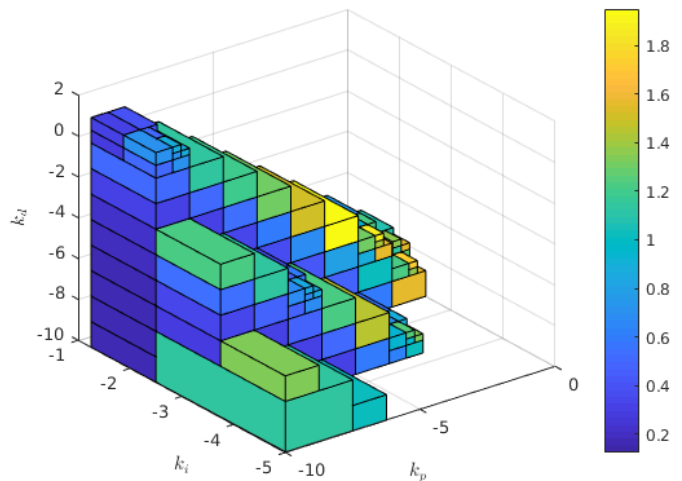


Figura 3. Custos garantidos obtidos no problema de controle PID do sistema massa-mola (apenas as regiões com  $\gamma \leq 1$  foram mostradas).



Figura 4. Emulador Industrial, Modelo 205 da Educational Control Products (ECP).

qual apenas as regiões com  $\gamma \leq 2$  foram mostradas (aumentando o efeito do gradiente de cores).

#### Exemplo 2

Neste exemplo investiga-se o problema de controle PID para um modelo do Emulador Industrial (mostrado na Figura 4), cujas matrizes da representação de estados (1) são dada por

Tabela 2. Parâmetros do emulador.

parâmetro	valor
$J_d$ (mom. de inércia do disco de atuação)	$4,07 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$J_{dl}$ (mom. de inércia do disco de carga)	$6,25 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$m_{wl}$ (massa total sobre o disco de carga)	$4 \times 0,5 \text{ kg}$
$r_{wl}$ (dist. das massas ao centro do disco)	$0,1 \text{ m}$
$r_{mw}$ (raio das massas sobre o disco)	$0,025 \text{ m}$
$J_p$ (momento de inércia do pino SR)	$7,8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$
$g_r, g'_r$ (relação de velocidades 4:1)	4 e 2
$k$ (const. elástica da correia flexível)	$[5,0; 8,45] \text{ N rd}$
$k_{hw}$ (ganho de hardware)	5,76
$c_1$ (coef. de atrito viscoso)	$7,38 \times 10^{-4}$
$c_2$ (coef. de atrito viscoso)	$5,0 \times 10^{-2} \text{ N m/rad}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -kg_r^{-2}/J_d^* & -c_1/J_d^* & kg_r^{-1}/J_d^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ kg_r^{-1}/J_\ell & 0 & -k/J_\ell & -c_2/J_\ell \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{hw}/J_d^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Os parâmetros de emulador são mostrados na Tabela 2, sendo  $J_d^* = J_d + J_p(g'_r)^{-2}$  a inércia total no disco de atuação e  $J_\ell = J_{dl} + m_{wl}(r_{wl}^2 + r_{mw}^2/2) \text{ kg m}^2$  o momento de inércia total no disco de carga. A constante elástica da correia flexível é considerada incerta, mas restrita à faixa  $k \in [5,0; 8,75]$ .

O Algoritmo 1 foi aplicado para computar regiões de ganhos estabilizantes considerando

$$-\underline{a}_p = \bar{a}_p = -\underline{a}_i = \bar{a}_i = -\underline{a}_d = \bar{a}_d = 0,5,$$

$$vol_{min} = 0,01, \tau = 2$$

e foram obtidas 34 regiões estáveis e 464 regiões instáveis. O procedimento demandou 11,69 segundos e no total foram realizadas 569 iterações. Na sequência o Algoritmo 2 é usado para analisar as regiões estáveis considerando  $B_w(\alpha) = 0,001B_u(\alpha)$ ,  $C(\alpha) = C_y(\alpha)$ ,  $D_u = 0$ ,  $D_{zw} = D_{yw} = 0,01$ ,  $vol_{min} = 0,0005$  e  $\gamma_{rel} = 2\%$ . Como resultado tem-se a família de ganhos estabilizantes

$$0,0625 \leq k_p \leq 0,1250,$$

$$-0,1875 \leq k_i \leq -0,1250,$$

$$-0,4375 \leq k_d \leq -0,3750$$

com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  associado igual a  $\gamma = 0,1172$ . Foram realizadas 482 iterações que demandaram 154,09 segundos. A Figura 5 apresenta uma ilustração gráfica dos custos garantidos obtidos para as regiões estáveis. O diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador PID (foram tomados os pontos médios das faixas encontradas)

$$K(s) = 0,0938 - \frac{0,1562}{s} - \frac{0,4062s}{1 + 2\tau} \quad (7)$$

é mostrado na Figura 6.

Para fins comparativos, a técnica de Agulhari et al. (2012) também foi aplicada para determinar um controlador dinâmico de ordem dois genérico, resultando em (com a mesma busca linear empregada no Exemplo 1)

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} -306,4633 & 0,2364 \\ -1561,4629 & -6,2041 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 305,5021 \\ 1553,5601 \end{bmatrix} y \quad (8)$$

$$u = [0,3209 \ -0,0129] x_c - 20,405y$$

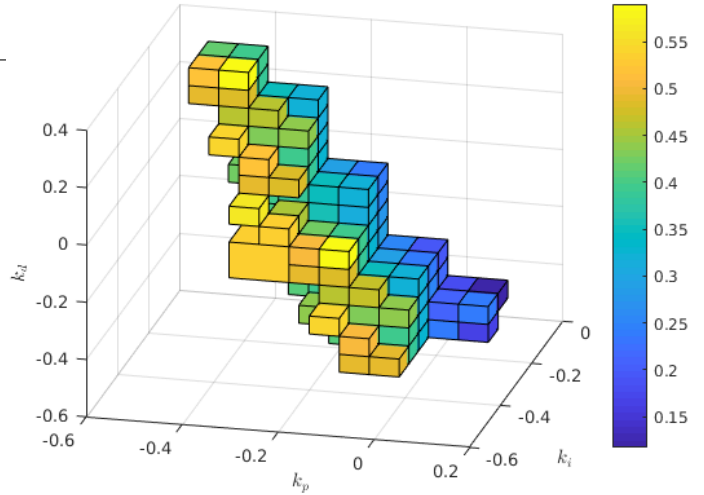


Figura 5. Custos garantidos obtidos no problema de controle PID do sistema emulador (apenas as regiões com  $\gamma \leq 2$  foram mostradas).

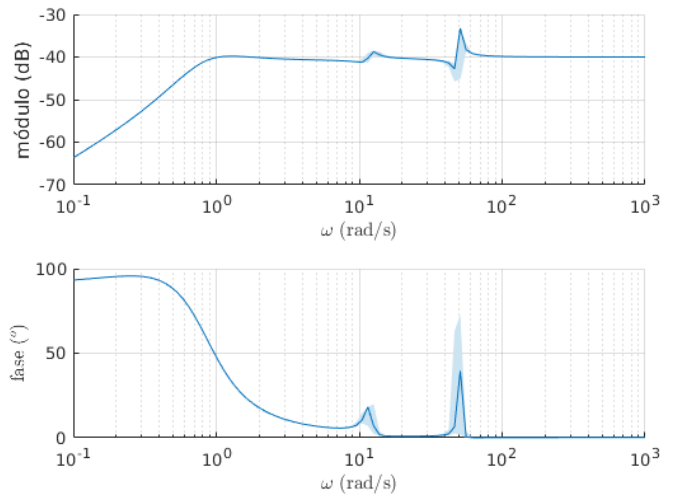


Figura 6. Diagrama de Bode do sistema emulador em malha fechada com o controlador PID dado em (7).

com custo garantido dado por  $\gamma = 44,84$ . Aplicando uma condição de cálculo de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema em malha-fechada, obtém-se o custo garantido  $\gamma = 0,0203$ . Note que o controlador (8) possui 9 graus de liberdade (seis a mais que o controlador PID).

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um método para certificação de regiões de estabilidade e controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas SISO realimentados por controladores PID. Um algoritmo que mescla a subdivisão iterativa dos intervalos dos parâmetros dos ganhos do controlador PID (supostos pertencer a intervalos conhecidos) com o uso de funções de Lyapunov e variáveis de folga com estruturas polinomiais homogêneas proporciona a caracterização de regiões robustamente estáveis no espaço dos parâmetros e também, com maior refinamento, dos custos  $\mathcal{H}_\infty$  associados a subregiões inter-

nas. Exemplos numéricos ilustraram o bom desempenho do método, que pode ser estendido de forma imediata para tratar outros critérios de desempenho.

#### REFERÊNCIAS

- C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for reduced-order robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(6):1532–1537, June 2012.
- C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. <http://rolmip.github.io>.
- E. D. Andersen and K. D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, pages 197–232. Springer US, 2000. <http://www.mosek.com>.
- K. J. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- K. J. Åström and T. Hägglund. The future of PID control. *Control Eng. Pract.*, 9(11):1163–1175, November 2001.
- P.-A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Syst. Control Lett.*, 51(3-4):165–169, March 2004.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- S. Boyd, M. Haddad, and K. J. Åström. MIMO PID tuning via iterated LMI restriction. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 26(8):1718–1731, 2016.
- M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Syst. Control Lett.*, 37(4):261–265, July 1999.
- C. E. de Souza, A. Trofino, and J. de Oliveira. Parametric Lyapunov function approach to  $\mathcal{H}_2$  analysis and control of linear parameter-dependent systems. *IEE Proc. — Control Theory & Appl.*, 150(5):501–508, September 2003.
- Y. Ebihara and T. Hagiwara. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, 40(11):2003–2009, November 2004.
- A. Felipe and R. C. L. F. Oliveira. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 66(9):4365–4370, September 2021.
- P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 4(4):421–448, July-August 1994.
- J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Control Optim.*, 29(2):381–402, March 1991.
- E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. Improved optimisation approach to the robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control problem for linear systems. *IEE Proc. — Control Theory & Appl.*, 152(2):171–176, March 2005.
- E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. A novel approach for  $H_2/H_\infty$  robust PID synthesis for uncertain systems. *J. Process Control*, 18(1):19–26, January 2008.
- T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, August 1994.
- Y. Li, K. H. Ang, and G. C. Y. Chong. PID control system analysis and design. *IEEE Control Syst. Mag.*, 26(1):32–41, February 2006.
- C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee. An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach. *Automatica*, 40(3):519–525, 2004.
- J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://yalmip.github.io>.
- R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.
- A. R. Ortiz, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle PID para sistemas lineares incertos de ordem arbitrária utilizando LMIs. In *XXIII CBA*, Novembro 2020. DOI: 10.48011/asba.v2i1.1353.
- M. Parada, D. Sbarbaro, R. A. Borges, and P. L. D. Peres. Robust PI and PID design for first-and second-order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties. *Int. J. Syst. Sci.*, 48(1):95–106, 2017.
- D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. In *Proc. 2001 Eur. Control Conf.*, pages 3800–3805, Porto, Portugal, September 2001.
- L. F. Sabra, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Projeto de controladores PI para sistemas lineares utilizando técnicas de análise de estabilidade robusta. In *XV SBAI*, pages 1186–1192, Online, October 2021.
- V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback — A survey. *Automatica*, 33(2):125–137, February 1997.
- R. H. C. Takahashi, P. L. D. Peres, and P. A. V. Ferreira. Multiobjective  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost PID design. *IEEE Control Syst. Mag.*, 17(5):37–47, October 1997.
- A. Trofino, D. F. Coutinho, and K. A. Barbosa. Improved  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. *SBA: Control Autom.*, 16(4):427–434, Outubro/Novembro/Dezembro 2005.