

## Realimentação dinâmica de saída de sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com medição parcial das variáveis premissas

Tássio M. Linhares\*, Eduardo S. Tognetti\*

\* Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB,  
70910-900, Brasília, DF, Brasil. (e-mail: tassio.melo45@gmail.com;  
estognetti@ene.unb.br).

**Abstract:** This paper aims to investigate the problem of designing dynamic output feedback stabilizing controllers for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. It is assumed the realist scenario where the premise variables are partially or completely unmeasured, that is, some unmeasurable states are part of the membership functions. To the authors' knowledge, very few papers have addressed this problem outside the observer-based approach. The fuzzy output controller is allowed to have a different number of fuzzy rules and a different set of membership functions from the T-S model. The design conditions are expressed as linear matrix inequality relaxations based on fuzzy Lyapunov functions and the use of slack variables introduced by Finsler's lemma. The effectiveness and applicability of the methodology are shown through numerical examples.

**Resumo:** Este artigo tem como objetivo investigar o problema de projeto de controladores de realimentação dinâmica de saída para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) de tempo discreto em que as variáveis premissas são parcial ou completamente não medidas, ou seja, alguns estados não mensuráveis fazem parte das funções de pertinência. Pelo conhecimento dos autores, muito poucos artigos abordaram esse problema fora da abordagem baseada em observadores. O controlador de saída fuzzy pode ter um número diferente de regras fuzzy e um conjunto diferente de funções de pertinência do modelo T-S. As condições de projeto são expressas como desigualdades matriciais lineares (LMIs) com base em funções de Lyapunov fuzzy e uso de variáveis de folga introduzidas pelo lema de Finsler. A efetividade e aplicabilidade da metodologia são demonstradas por meio de exemplos numéricos.

**Keywords:** Takagi-Sugeno fuzzy systems; dynamic output feedback; discrete-time systems; linear matrix inequalities (LMIs); immeasurable premise variables.

**Palavras-chaves:** Sistema fuzzy Takagi-Sugeno; realimentação dinâmica de saída; sistemas discretos no tempo; desigualdades matriciais lineares (LMIs); variáveis premissas não medidas.

### 1. INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e o projeto de controladores de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno, 1985) têm recebido destacada atenção da comunidade científica nos últimos anos devido à sua habilidade de representar uma ampla faixa de fenômenos. Pode-se destacar a representação exata de dinâmicas não lineares por meio da técnica conhecida como não linearidade por setor (do inglês, *sector nonlinearity approach* (Tanaka and Wang, 2001)). Muitos métodos de projeto foram propostos para a síntese de controladores de realimentação de estados baseados no método direto de Lyapunov e em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) (veja Feng (2006) e referências).

A principal conveniência do projeto de realimentação de estados é a possibilidade de leitura das variáveis premissas que em geral dependem dos estados na representação de não linearidade por setor. Contudo, no projeto de controladores por reali-

mentação de saída é preciso considerar que algumas variáveis premissas não podem ser medidas.

O problema de projeto com medição parcial ou sem nenhuma medição das variáveis premissas é mais complexo no projeto de controladores de realimentação dinâmica de saída (CRDS) do que em controladores baseado em observadores. Neste último, a abordagem comum é estimar as variáveis premissas não medidas considerando o erro de estimação no projeto (Guerra et al., 2006; Guerra et al., 2018). Por essa razão, poucos trabalhos da literatura consideram o projeto de CRDS que não compartilham as mesmas funções de pertinência e número de regras com o sistema T-S, como em Nguang and Shi (2006); Tognetti et al. (2012); Zhao and Dian (2017) para sistemas contínuos e Ueno et al. (2011) para sistemas discretos no tempo.

Várias abordagens têm sido usadas para este problema. Em Nguang and Shi (2006), um limite superior é usado para lidar com a diferença entre as funções de pertinência da planta e do controlador, produzindo resultados conservadores. Uma abordagem via Transformações Lineares Fracionárias (LFT, sigla em inglês para *Linear Fractional Transformation*) é adotada em Liu et al. (2017). Em Tognetti et al. (2012), as variáveis premissas disponíveis para a lei de controle são selecionadas

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Apoio a Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

escolhendo-se graus apropriados para os polinômios que representam variáveis de folga na condição de síntese, mas, como desvantagem, o problema de projeto deve ser resolvido em duas etapas. Para sistemas de tempo discreto, Ueno et al. (2011) propõe um controlador de realimentação de saída com as variáveis premissas sendo suas estimativas. No entanto, também é necessário incluir um observador para esse fim. O projeto de CRDS de ordem completa mas assumindo que todas as variáveis premissas estão disponíveis para realimentação é investigado em Klug et al. (2015).

Motivado pela falta de resultados para o projeto de CRDS para sistemas de tempo discreto com variáveis premissas parcial ou completamente não mensuráveis, este trabalho apresenta uma contribuição para este problema. Utilizando funções de Lyapunov fuzzy, como em Guerra and Vermeiren (2004), é proposto um projeto baseado em LMI cujo controlador não compartilha o mesmo conjunto de variáveis de premissa do sistema T-S. Graças ao uso da modelagem multi-simplex (produto cartesiano de simplexes) (Oliveira et al., 2008) do sistema T-S, as matrizes dinâmicas da planta são reescritas em termos das funções de pertinência desejáveis. Exemplos numéricos demonstram a eficácia da abordagem proposta.

**Notação.** A notação  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_{>0}$  e  $\mathbb{R}^{n \times m}$  denotam os conjuntos de vetores reais de dimensão  $n$ , números reais positivos, e matrizes reais de dimensão  $n \times m$ , respectivamente. A matriz identidade de ordem  $n$  é denotada por  $I_n$  e a matriz nula  $m \times n$  por  $0_{m,n}$  (ou simplesmente  $I$  e  $0$  na falta de confusão). Para uma matriz  $X$ ,  $X'$  denota sua transposta e  $He\{X\}$  é uma notação curta de  $X + X'$ . O símbolo  $\star$  denota blocos simétricos em matrizes particionadas,  $\blacksquare$  é o elemento genérico de uma matriz que não tem influência nos resultados.

## 2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 Descrição do sistema

Considere a  $\ell$ -ésima regra de um modelo T-S discreto no tempo dado por

**Regra  $\ell$ :** Se  $z_1(t)$  é  $\mathcal{M}_1^{\alpha_{\ell 1}}$  e ... e  $z_p(t)$  é  $\mathcal{M}_p^{\alpha_{\ell p}}$ , então

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} x(k) + B_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} u(k) \\ y(k) = C_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} x(k) \end{cases} \quad (1)$$

para  $\ell=1, \dots, N$ , em que  $N$  é o número total de regras fuzzy;  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida e  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle;  $z = (z_1, \dots, z_p)$  é o vetor das variáveis premissas;  $\mathcal{M}_j^{\alpha_{\ell j}}$  denota o conjunto fuzzy baseado em  $z_j$  utilizado na  $\ell$ -ésima regra fuzzy; e  $\alpha_{\ell j}$  é o conjunto fuzzy baseado em  $z_j$  utilizado na  $\ell$ -ésima regra. As matrizes dos subsistemas lineares são:  $A_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  e  $C_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ .

Denotando por  $r_j$  o número de conjuntos fuzzy baseados em  $z_j$  tem-se  $N = \prod_{j=1}^p r_j$ . Seja  $\mathcal{M}_j^{\alpha_{\ell j}}(z_j)$  a função de pertinência de  $\mathcal{M}_j^{\alpha_{\ell j}}$ , a função de pertinência normalizada de  $\alpha_{\ell j} = 1, \dots, r_j = i$  é dada por  $\mu_{ji}(z_j) = \mathcal{M}_j^i(z_j) / \sum_{i=1}^{r_j} \mathcal{M}_j^i(z_j)$  para  $j = 1, \dots, p$ ;  $i = 1, \dots, r_j$ . Importante observar que cada variável premissa  $z_j$  é unicamente associada à função de pertinência  $\mu_j(z_j)$ .

Cada  $\mu_j(z_j) = (\mu_{j1}(z_j), \dots, \mu_{jr_j}(z_j))$ ,  $j = 1, \dots, p$ , pertence ao simplex unitário

$$\mathcal{U}_{r_j} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{r_j}) \in \mathbb{R}^{r_j} : \sum_{i=1}^{r_j} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

e  $\mu(z) = (\mu_1(z_1), \mu_2(z_2), \dots, \mu_p(z_p)) \in \mathcal{U}_N := \mathcal{U}_{r_1} \times \mathcal{U}_{r_2} \times \dots \times \mathcal{U}_{r_p}$ , em que  $\mathcal{U}_N$  o produto cartesiano de simplexes (multi-simplex).

### 2.2 Notação e definições

Para lidar com somatórios matriciais fuzzy multi-dimensionais as seguintes definições são adotadas: o conjunto  $\mathcal{Q}_s := \{(q_1, \dots, q_s) : q_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, s\}$  contém os índices das  $s$  variáveis premissas  $z_q := (z_{q_1}, z_{q_2}, \dots, z_{q_s})$  representadas no somatório;  $\mathcal{I}_s := \{(i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s : i_j \in \{1, \dots, r_{q_j}\}, j = 1, \dots, s\}$  com  $s = |\mathcal{Q}_s|$ ;  $\mu_i(z_q) := \mu_{q_1 i_1}(z_{q_1}) \mu_{q_2 i_2}(z_{q_2}) \dots \mu_{q_s i_s}(z_{q_s})$ ,  $q \in \mathcal{Q}_s$ ,  $i \in \mathcal{I}_s$ , com  $q := (q_1, \dots, q_s)$  e  $i := (i_1, i_2, \dots, i_s)$ . Para dados vértices  $Q_{i_1 i_2 \dots i_s}$ , a seguinte somatória fuzzy é definida:

$$Q_{z_q} := \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mu_i(z_q) Q_i,$$

com  $Q_i := Q_{i_1 i_2 \dots i_s}$  e

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mu_i(z_q) Q_i = \sum_{i_1=1}^{r_{q_1}} \dots \sum_{i_s=1}^{r_{q_s}} \mu_{q_1 i_1}(z_{q_1}) \dots \mu_{q_s i_s}(z_{q_s}) Q_{i_1 \dots i_s}.$$

Se a somatória contém todas as variáveis premissas  $z = (z_1, \dots, z_p)$  do modelo fuzzy, nós omitiremos o índice  $q$ , pois  $z_q = z$ , e denotaremos simplesmente por  $Q_z := \sum_{i \in \mathcal{I}_p} \mu_i(z) Q_i$ . Denotaremos a somatória  $Q_z$  no instante  $k+1$  como  $Q_{z+}$ .

Por exemplo, suponha que deseja-se representar a uma somatória fuzzy com as variáveis premissas  $z_2, z_4$  e  $z_5$ . Então, tem-se  $P_{z_q} = \sum_{i \in \mathcal{I}_3} \mu_i(z_q) P_i$  com:  $q = (2, 4, 5) \in \mathcal{Q}_3$ ,  $s = 3$ ,  $z_q = (z_2, z_4, z_5)$ ,  $i = (i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{I}_3$ ,  $\mu_i(z_q) = \mu_{2i_1}(z_2) \mu_{4i_2}(z_4) \mu_{5i_3}(z_5)$ ,  $P_i = P_{i_1 i_2 i_3}$ , ou seja,

$$P_{z_q} = \sum_{i_1=1}^{r_2} \sum_{i_2=1}^{r_4} \sum_{i_3=1}^{r_5} \mu_{2i_1}(z_2) \mu_{4i_2}(z_4) \mu_{5i_3}(z_5) P_{i_1 i_2 i_3}.$$

Finalmente, para fins de concisão, adotaremos o índice  $z$  para o produto ou soma de somatórias fuzzy envolvendo  $z$  e  $z_q$ , e o índice  $z_q$  quando somente os somatórios fuzzy que dependem de  $z_q$  estão envolvidos.

### 2.3 Definição do problema

O sistema fuzzy global obtido a partir de (1) pode ser expresso por

$$\begin{cases} x(k+1) = A_z x(k) + B_z u(k) \\ y(k) = C_z x(k) \end{cases} \quad (2)$$

com

$$(A, B, C)_z = \sum_{i \in \mathcal{I}_p} \mu_i(z) (A_i, B_i, C_i), \quad \forall \mu \in \mathcal{U}_N.$$

Considera-se o caso em que o sistema (2) é estritamente próprio por representar o caso mais comum na representação de dinâmicas. O procedimento de projeto pode ser adaptado para considerar a matriz de transmissão direta.

Considere um subconjunto  $z_q$  das variáveis premissas  $z$  mensuráveis e disponíveis para a lei de controle. O objetivo é projetar um controlador de ordem completa por realimentação dinâmica de saída dado por

$$\begin{cases} x_c(k+1) = A_{cz_q} x_c(k) + B_{cz_q} y(k) \\ u(k) = C_{cz_q} x_c(k), \end{cases} \quad (3)$$

em que

$$(A_c, B_c, C_c)_{z_q} = \sum_{i \in I_s} \mu_i(z_q)(A_{ci}, B_{ci}, C_{ci})$$

e  $x_c(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do controlador. Note que o controlador (3) é de ordem completa. No método proposto de projeto, controladores de ordem reduzida levam ao um problema não convexo de restrição de posto (El Ghaoui et al., 1997). De fato, para a implementação da lei de controle é necessária somente a leitura das variáveis premissas  $z_q$ .

O sistema em malha fechada é dado por

$$x_a(k+1) = A_z x_a(k), \quad (4)$$

onde  $x_a(k) = [x(k)' \ x_c(k)']'$  denota o estado aumentado e

$$A_z = \begin{bmatrix} A_z & B_z C_{cz_q} \\ B_{cz_q} C_z & A_{cz_q} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

O seguinte problema é tratado nesse trabalho.

**Problema 1.** Considere o sistema fuzzy (2) e um subconjunto  $z_q$  das variáveis premissas  $z$  que são medidas e estão disponíveis para a lei de controle. Determine o controlador fuzzy de realimentação dinâmica de saída (3) tal que o sistema em malha fechada (4) é assintoticamente estável.

**Comentário 1.** O Problema 1 assume que as variáveis premissas são parcialmente medidas. A técnica proposta também pode ser aplicada quando todas as variáveis premissas são medidas, recuperando o caso padrão, ou quando nenhuma variável premissa é medida, levando à implementação de um controlador robusto.

Os seguintes lemas serão úteis para o resultado principal.

**Lema 1.** (Lema de Finsler (de Oliveira and Skelton, 2001)).

Considere  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$  e  $\mathcal{B}_\perp$  a base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}\mathcal{B}_\perp = 0$ ). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\mathcal{B}_\perp^T M \mathcal{B}_\perp > 0$
- (ii)  $\exists N \in \mathbb{R}^{n \times m} : M + N\mathcal{B} + \mathcal{B}^T N^T > 0$

**Lema 2.** Se existir uma matriz simétrica dependente de parâmetros  $W_z \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  tal que a seguinte LMI é satisfeita para todo  $\mu \in \mathcal{U}_N$

$$\begin{bmatrix} W_{z+} & A_z G \\ G' A_z' & G + G' - W_z \end{bmatrix} > 0, \quad (6)$$

então o sistema em malha fechada (4) é assintoticamente estável.

**Prova.** A prova segue de Daafouz and Bernussou (2001) aplicada à estabilidade de (4) com a função de Lyapunov  $V(x_a) = x_a(k)' W_z^{-1} x_a(k)$ .  $\square$

Os resultados apresentados na próxima seção fornecem condições suficientes para o projeto de controladores de realimentação dinâmica de saída de ordem completa dependendo apenas das variáveis de premissa disponíveis  $z_q$ .

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Primeiramente, iremos definir as seguintes matrizes inspirado na parametrização adotada em de Oliveira et al. (2002):

$$G = \begin{bmatrix} X & \blacksquare \\ Y & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} Z & \blacksquare \\ -Z & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} I_n & Z \\ 0 & -Z \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde  $X, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e os elementos representados por  $\blacksquare$  são tais que  $GG^{-1} = I$ . Então a condição (6) é equivalente à

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Z} & 0 \\ 0 & \mathcal{Z} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} W_{z+} & A_z G \\ G' A_z' & G + G' - W_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & 0 \\ 0 & \mathcal{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{z+} & J_{z+} & A_z X + B_z C_{cz_q} & A_z \\ * & H_{z+} & \bar{A}_z & Z' A_z + \mathcal{B}_{z_q} C_z \\ * & * & X + X' - P_z & I_n + S' - J_z \\ * & * & * & Z + Z' - H_z \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

em que as matrizes  $P_z, J_z, H_z$  e  $S$  são definidas por

$$\begin{bmatrix} P_z & J_z \\ * & H_z \end{bmatrix} := \mathcal{Z}' W_z \mathcal{Z}, \quad S := Z'(X - Y) \quad (9)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{A}_z &:= Z' A_z X - Z' A_{cz_q} Y - Z' B_{cz_q} C_z X + Z' B_z C_{cz_q} Y \\ \mathcal{B}_{z_q} &:= -Z' B_{cz_q}, \quad \mathcal{C}_{z_q} := C_{cz_q} Y. \end{aligned} \quad (10)$$

Observe que o ganho do controlador  $A_{cz_q}$  obtido a partir de (10) depende de  $A_z, B_z$  e  $C_z$ , e portanto não pode ser implementado pois  $z$  não é disponível para realimentação. Para permitir o projeto de um controlador dependendo apenas das variáveis premissas disponíveis  $z_q$ , a seguinte técnica é proposta.

Primeiro, seja as seguintes definições

$$\Gamma_A := A_z - \hat{A}_{z_q}, \quad \Gamma_B := B_z - \hat{B}_{z_q}, \quad \Gamma_C := C_z - \hat{C}_{z_q} \quad (11)$$

em que  $\hat{A}_{z_q}, \hat{B}_{z_q}$  e  $\hat{C}_{z_q}$  são matrizes obtidas à partir de  $A_z, B_z$  e  $C_z$ , respectivamente, representando as somatórias fuzzy exclusivamente pelas variáveis premissas disponíveis  $z_q$ . Isso pode ser feito impondo em  $A_z, B_z$  e  $C_z$  valores fixos às variáveis premissas não usadas pelo controlador obtendo  $\hat{A}_{z_q}, \hat{B}_{z_q}$  e  $\hat{C}_{z_q}$ , e depois explicitando a diferença entre as matrizes como apresentado em (11). Se denotarmos  $\ell$  o índice das variáveis premissas não disponíveis em  $z_\ell$ , a melhor escolha para  $z_\ell$  para o caso de modelos T-S obtidos por não linearidade por setor é tal que  $\mu_\ell(\bar{z}_\ell) = (0.5, \dots, 0.5)$ , onde  $\bar{z}_\ell$  das variáveis premissas não disponíveis  $z_\ell$ . Essa escolha é a que minimiza as diferenças  $\Gamma_A, \Gamma_B$  e  $\Gamma_C$ .

**Comentário 2.** Importante destacar que um procedimento sistemático como descrito acima é proposto para construir  $\hat{A}_{z_q}, \hat{B}_{z_q}$  e  $\hat{C}_{z_q}$ , por meio das notações descritas na Seção 2.2, e, por esta razão, não é necessário fazer uso de limitantes superiores para descrever  $\Gamma_A, \Gamma_B$  e  $\Gamma_C$ , como feito em algumas técnicas presentes na literatura (Nguang and Shi, 2006; Apkarian and Noll, 2006).

Pode-se substituir  $A_z, B_z$  e  $C_z$  em (10) por  $\hat{A}_{z_q} + \Gamma_A, \hat{B}_{z_q} + \Gamma_B$  e  $\hat{C}_{z_q} + \Gamma_C$ , respectivamente, e depois reescrever (8) como

$$\Psi_0 + \Psi(\Gamma) > 0 \quad (12)$$

em que

$$\Psi_0 := \begin{bmatrix} P_{z+} & J_{z+} & A_z X + B_z C_{cz_q} & A_z \\ * & H_{z+} & \bar{A}_z & Z' A_z + \mathcal{B}_{z_q} C_z \\ * & * & X + X' - P_z & I_n + S' - J_z \\ * & * & * & Z + Z' - H_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

com

$$A_{z_q} = Z' \hat{A}_{z_q} X - Z' A_{cz_q} Y - Z' B_{cz_q} \hat{C}_{z_q} X + Z' \hat{B}_{z_q} C_{cz_q} Y \quad (14)$$

e

$$\Psi(\Gamma) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \Phi(\Gamma) & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

em que

$$\Phi(\Gamma) := [Z' \ B_{z_q}] \Gamma \begin{bmatrix} X \\ \mathcal{C}_{z_q} \end{bmatrix}, \quad \Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_A & \Gamma_B \\ \Gamma_C & 0 \end{bmatrix}.$$

Como pode ser observado, a mudança de variáveis (14) permite recuperar os ganhos do controlador dependendo apenas de  $z_q$ :

$$\begin{aligned} A_{cz_q} &= (Z')^{-1} \{Z' \hat{A}_{z_q} X + Z' \hat{B}_{z_q} \mathcal{C}_{z_q} - A_{z_q} + B_{z_q} \hat{C}_{z_q} X\} Y^{-1} \\ B_{cz_q} &= -(Z')^{-1} B_{z_q} \\ C_{cz_q} &= \mathcal{C}_{z_q} Y^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Observe que a desigualdade (12) é não linear devido à presença de produto de variáveis em  $\Phi(\Gamma)$ . O seguinte teorema apresenta condições suficientes na forma de LMIs para (12).

**Teorema 1.** Para um dado escalar  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , sejam matrizes  $X, Z, S, J_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{z_q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{z_q} \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $\mathcal{C}_{z_q} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , matrizes simétrica definidas positivas  $P_z$  e  $H_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que, para todo  $\mu \in \mathcal{U}_N$ , a seguinte LMI é satisfeita:

$$\begin{bmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 - \lambda \Psi_2 \\ \star & 2\lambda I \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

onde

$$\Psi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z' & B_{z_q} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma, \quad \Psi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ X' & \mathcal{C}'_{z_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

e  $\Psi_0$  dado por (13). Então o controlador (3), nas quais as matrizes são dadas por (16) com  $Y = X - (Z')^{-1}S$ , torna o sistema em malha fechada (4) assintoticamente estável.

**Prova.** Primeiro, note que  $\Psi(\Gamma) = \Psi_1 \Psi'_2$ . Então, a desigualdade (12) pode ser reescrita como a condição (i) do Lema 1,  $\mathcal{B}'_{\perp} M \mathcal{B}_{\perp} > 0$ , com

$$M = \begin{bmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 \\ \star & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \begin{bmatrix} I \\ \Psi'_2 \end{bmatrix}.$$

Se escolhermos  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{B} \mathcal{B}_{\perp} = 0$  como

$$\mathcal{B} = [-\Psi'_2 \ I]$$

então a condição (ii) do Lema 1 com  $N = \lambda [0 \ I]'$ ,  $\lambda > 0$ , é dada por (17) que é uma condição suficiente para (12), equivalente à (6) devido à transformação de congruência em (8) com  $\mathcal{Z}$  não singular.

Para garantir  $\mathcal{Z}$  posto completo e (16) bem definida, necessita-se que  $Z$  e  $Y$  sejam não singulares. Se (17) é verificado, então

$$\begin{bmatrix} X + X' & I_n + S' \\ \star & Z + Z' \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} P_z & J_z \\ \star & H_z \end{bmatrix} > 0, \quad (19)$$

implicando  $X$  e  $Z$  não singulares e, portanto,  $W_z > 0$  devido à (9). Multiplicando-se (19) à esquerda por  $T' = [I \ -(Z')^{-1}]$  e à direita por  $T$ , obtém-se  $He\{(Z'X - S)'Z^{-1}\} > 0$ . Da definição de  $S$  em (9), tem-se  $Z'X - S = Z'Y$ , logo  $Y + Y' > 0$ , implicando  $Y$  não singular.  $\square$

Considere o caso particular  $\Gamma_A \neq 0$ ,  $\Gamma_B = 0$  e  $\Gamma_C = 0$ . Então, tem-se o seguinte corolário.

**Corolário 1.** Para um dado escalar  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , se existirem matrizes  $X, Z, S, J_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{z_q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{z_q} \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $\mathcal{C}_{z_q} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P_z$  e  $H_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que, para todo  $\mu \in \mathcal{U}_N$ , (17) é verificado com

$$\Psi_1 = [0 \ \Gamma'_A Z \ 0 \ 0]', \quad \Psi_2 = [0 \ 0 \ X \ 0]'$$

então o controlador (3), cujas matrizes são dadas por (16), com  $Y = X - (Z')^{-1}S$ , estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada (4).

**Comentário 3.** Controladores dinâmicos robustos (de ganho constante) pode ser facilmente obtidos construindo  $\hat{A}_{z_q}$ ,  $\hat{B}_{z_q}$  e  $\hat{C}_{z_q}$  como matrizes constantes. Isso pode ser feito, por exemplo, usando matrizes que são as médias dos vértices dadas por  $[\hat{A}_{z_q} \ \hat{B}_{z_q} \ \hat{C}_{z_q}] = 1/N \sum_{i \in I_p} [A_i \ B_i \ C_i]$ .

#### 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, a aplicabilidade da técnica proposta é ilustrada por meio de exemplos numéricos referentes ao projeto de CRDS quando algumas das variáveis premissas não estão disponíveis para a lei de controle. As condições propostas neste artigo são apresentadas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, mas um conjunto finito de LMIs é obtido em termos dos vértices dos somatórios fuzzy por meio do pacote computacional ROLMIP (Robust LMI Parser) (Aguilhari et al., 2019) utilizando os pacotes Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999).

**Exemplo 1.** Este exemplo é usado para avaliar o caso quando uma das variáveis premissas não é medida conforme apresentado na Seção 3. O seguinte sistema não linear é adaptado de Estrada-Manzo et al. (2019):  $x(k+1) = A(x)x(k) + B(x)u(k)$ ,  $y(k) = C(x)x(k)$ , com

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 0.2 + 0.12 \cos x_1 & 1.6 \\ -0.8 & 0.5 + 0.1 \sin x_2 \end{bmatrix}, \\ B(x) &= \begin{bmatrix} 0.1 + 0.05 \cos x_1 \\ -2 - 0.4 \sin x_2 \end{bmatrix}, \\ C(x) &= [0.2 + 0.1 \cos x_1 \quad 0.2 + 0.05 \sin x_2]. \end{aligned}$$

As matrizes do modelo fuzzy T-S (2) são dadas por

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0.32 & 1.6 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} 0.32 & 1.6 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 0.08 & 1.6 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} 0.08 & 1.6 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ -2.4 \end{bmatrix}, & B_{12} &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ -1.6 \end{bmatrix}, \\ B_{21} &= \begin{bmatrix} 0.05 \\ -2.4 \end{bmatrix}, & B_{22} &= \begin{bmatrix} 0.05 \\ -1.6 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= [0.3 \ 0.25], & C_{12} &= [0.3 \ 0.15], \\ C_{21} &= [0.1 \ 0.25], & C_{22} &= [0.1 \ 0.15], \end{aligned}$$

em que  $z_1 = \cos x_1 \in [-1, 1]$  e  $z_2 = \sin x_2 \in [-1, 1]$  são as variáveis premissas. As funções de pertinência são  $(\mu_1(z_1), \mu_2(z_2))$  com  $\mu_{11}(z_1) = 0.5(\cos x_1 + 1)$ ,  $\mu_{12}(z_1) = 1 - \mu_{11}(z_1)$ ,  $\mu_{21}(z_2) = 0.5(\sin x_2 + 1)$  e  $\mu_{22}(z_2) = 1 - \mu_{21}(z_2)$ . Considera-se que apenas  $z_1$  é disponível para a lei de controle.

Os ganhos do controlador são obtidos pelo Teorema 1 com  $\lambda = 1$  e dados por:

$$\begin{aligned} A_{cz_q} &= \sum_{i=1}^2 \mu_{1i}(z_1)^2 A_{cii} + \mu_{11}(z_1) \mu_{12}(z_1) A_{ci2}, \\ (B_{cz_q}, C_{cz_q}) &= \sum_{i=1}^2 \mu_{1i}(z_1) (B_{ci}, C_{ci}) \end{aligned}$$

com

$$A_{c11} = \begin{bmatrix} -0.8848 & 0.3581 \\ 0.1223 & -0.1298 \end{bmatrix}, \quad A_{c12} = \begin{bmatrix} -1.5603 & 0.4496 \\ 0.1523 & -0.3651 \end{bmatrix},$$

$$A_{c22} = \begin{bmatrix} -0.4432 & 0.2305 \\ 0.0241 & -0.2390 \end{bmatrix},$$

$$B_{c1} = \begin{bmatrix} 3.4709 \\ -0.5977 \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 4.3966 \\ -0.6211 \end{bmatrix},$$

$$C_{c1} = [-0.3923 \ 0.1822], \quad C_{c2} = [-0.4009 \ 0.2429].$$

Figuras 1 e 2 mostram as trajetórias dos estados da planta e do controlador do sistema em malha fechada, respectivamente, e a Figura 3 ilustra o sinal de controle.

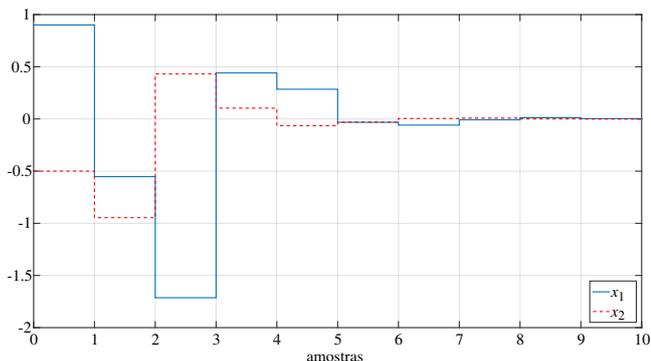


Figura 1. Trajetórias dos estados da planta do sistema em malha fechada  $x(0) = [0.9 \ -0.5]'$  e  $x_c(0) = [0 \ 0]'$  do Exemplo 1.

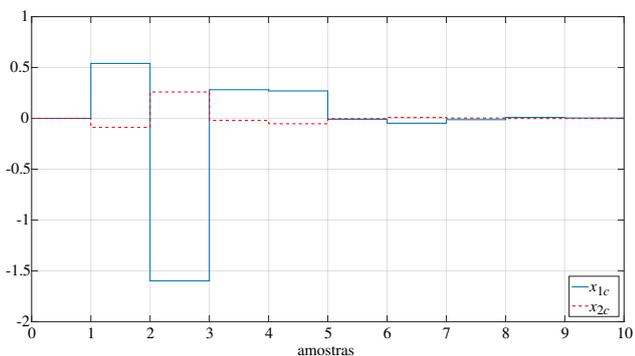


Figura 2. Trajetórias dos estados do controlador em malha fechada para a condição inicial  $x_c(0) = [0 \ 0]'$  do Exemplo 1.

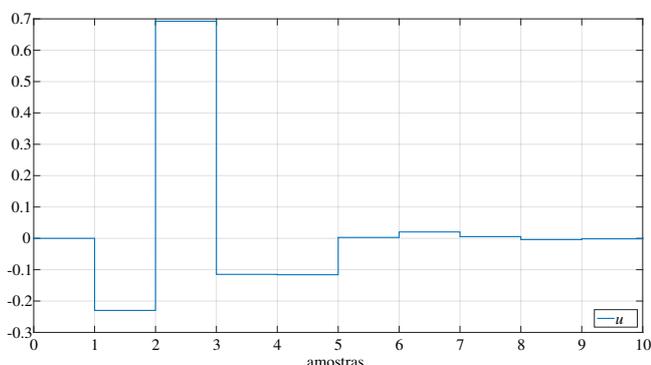


Figura 3. Sinal de controle do sistema em malha fechada para as condições iniciais  $x(0) = [0.9 \ -0.5]'$  e  $x_c(0) = [0 \ 0]'$  do Exemplo 1.

*Exemplo 2.* Esse exemplo ilustra o caso em que Corolário 1 pode prover resultados menos conservadores que o Teorema 1 quando  $\Gamma_A \neq 0$ ,  $\Gamma_B = 0$  e  $\Gamma_C = 0$ . Considere o sistema não linear adaptado do Exemplo 1:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0.2 + 0.12 \cos x_1 & 1.6 \\ -0.8 & \beta + 0.1 \sin x_2 \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0.1 + 0.05 \cos x_1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C(x) = [0.2 + 0.1 \cos x_1 \quad 0.2],$$

em que  $\beta > 0$  é um parâmetro que foi introduzido para fins de comparação. As matrizes do modelo fuzzy T-S (2) são dadas por

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.32 & 1.6 \\ -0.8 & \beta + 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0.32 & 1.6 \\ -0.8 & \beta - 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.08 & 1.6 \\ -0.8 & \beta + 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.08 & 1.6 \\ -0.8 & \beta - 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = B_{22} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = C_{12} = [0.3 \ 0.2], \quad C_{21} = C_{22} = [0.1 \ 0.2],$$

em que as variáveis premissas e as funções de pertinência são as mesmas que as apresentadas no Exemplo 1. Considera-se igualmente que apenas  $z_1$  é disponível para a lei de controle. O Corolário 1 é capaz de encontrar solução para  $\beta < 1.7$  enquanto o Teorema 1 é factível para  $\beta < 0.8$ .

## 5. CONCLUSÃO

Este artigo propôs novas condições de síntese LMI para controladores dinâmicos de realimentação de saída para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno de tempo discreto com variáveis premissas parcial ou completamente indisponíveis para a lei de controle. A ideia principal é reescrever a dinâmica em termos das variáveis premissas que estão disponíveis e usá-las para recuperar os ganhos do controlador. A diferença entre as matrizes dinâmicas originais e as novas é tratada no procedimento de projeto por uma escolha apropriada da variável de folga no Lema de Finsler. O uso de funções de Lyapunov fuzzy é facilitado considerando a abordagem da literatura onde variáveis instrumentais adicionais são parametrizadas de forma que as matrizes do controlador não sejam funções da matriz de Lyapunov.

## REFERÊNCIAS

- Agulhari, C.M., Felipe, A., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2019). Algorithm 998: The Robust LMI Parser - A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45(3), 36:1–36:25.
- Apkarian, P. and Noll, D. (2006). Nonsmooth  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1), 71–86.
- Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5), 355–359.
- de Oliveira, M.C., Geromel, J.C., and Bernussou, J. (2002). Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9), 666–679.
- de Oliveira, M.C. and Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.O. Reza Moheimani (ed.),

- Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.
- El Ghaoui, L., Oustry, F., and Aitrami, M. (1997). A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8), 1171–1176.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., and Guerra, T. (2019). An alternative LMI static output feedback control design for discrete-time nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno models. *ISA Transactions*, 84.
- Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5), 676–697.
- Guerra, T.M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., and Tirmant, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17), 1248–1259.
- Guerra, T.M., Márquez, R., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2018).  $H_\infty$  LMI-based observer design for nonlinear systems via Takagi-Sugeno models with unmeasured premise variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3), 1498–1509.
- Guerra, T.M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5), 823–829.
- Klug, M., Castelan, E.B., Leite, V.J., and Silva, L.F. (2015). Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 263, 92–111.
- Liu, Y., Wu, F., and Ban, X. (2017). Dynamic output feedback control for continuous-time T-S fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(5), 1155–1167.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 284–289. Taipei, Taiwan.
- Nguang, S.K. and Shi, P. (2006). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic  $\mathcal{D}$  stability constraints: An LMI approach. *Information Sciences*, 176(15), 2161–2191.
- Oliveira, R.C.L.F., Bliman, P.A., and Peres, P.L.D. (2008). Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2226–2231. Cancun, Mexico.
- Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4), 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1), 116–132.
- Tanaka, K. and Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Tognetti, E.S., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2012). Reduced-order dynamic output feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 207, 27–44. doi:10.1016/j.fss.2012.04.013.
- Ueno, N., Uchida, Y., and Yoneyama, J. (2011). Output feedback control for discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems. In *2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011)*, 315–321.
- Zhao, T. and Dian, S. (2017). Fuzzy dynamic output feedback  $H_\infty$  control for continuous-time T-S fuzzy systems under imperfect premise matching. *ISA Transactions*, 70, 248 – 259.