

Identificação e Modelagem de Erros Estocásticos em Sensores Inerciais via Variância de Allan e Otimização

Maia Á.H.A. * Silva F.O. * De Lima D. A. * Meneses R. F. **

* *Departamento de Automática, Universidade Federal de Lavras, MG,
(e-mails: aiam.oravla@gmail.com, felipe.oliveira@ufla.br,
danilo.delima@ufla.br, rogerio@mwf-services.com).*

** *MWF Mechatronics Ltda., Departamento de Pesquisa e
Desenvolvimento.*

Abstract: With the growing opportunities in the most diverse areas of engineering associated with autonomous vehicles, much has been studied about the application of low-cost inertial sensors, especially of the Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS) type. However, the recognized predominance of stochastic errors in such sensors becomes an obstacle, since most of the documentation provided by the respective manufacturers is incomplete. In this sense, this work aims to investigate the Allan Variance (AV) technique as a tool for identifying the nature of Inertial Measurement Unit (IMU) stochastic errors. In addition, a discrete-time state-space model capable of reconstructing these errors from the stochastic characteristics identified for the inertial sensors is evaluated. Finally, an optimized version of the aforementioned technique is proposed, which is capable of refining the dynamic model of stochastic errors, as well as its correspondence with the AVs experimentally obtained for the inertial sensors. Experimental results, based on data collected from different commercially available low-cost IMUs, show that the models and techniques discussed are capable of adequately estimating the behavior of such errors and, therefore, guaranteeing the adequate tuning of eventual estimators (such as the Kalman filter, for example), when merging IMUs with auxiliary sensors for integrated multi-sensory navigation.

Resumo: Com as crescentes oportunidades nas mais diversas áreas da engenharia associadas a veículos autônomos, muito se tem estudado acerca da aplicação de sensores inerciais de baixo custo, em especial, do tipo Sistemas Micro-Eleto-Mecânicos (MEMS). Porém, a reconhecida predominância de erros estocásticos em tais sensores torna-se um entrave, uma vez que a maioria das documentações fornecidas pelos respectivos fabricantes mostra-se incompleta. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo investigar a técnica de variância de Allan (AV) para fins de identificação da natureza dos erros estocásticos de unidades de medição inerciais (IMU). Além disso, é avaliado um modelo em espaço de estados no tempo discreto capaz de reconstruir esses erros a partir das características estocásticas identificadas para os sensores inerciais. Por fim, uma versão otimizada da técnica supracitada é proposta, a qual é capaz de refinar o modelo dinâmico dos erros estocásticos, bem como sua correspondência com as AVs experimentalmente levantadas para os sensores inerciais. Resultados experimentais, baseados na coleta de dados de diferentes IMUs de baixo custo disponíveis comercialmente, mostram que os modelos e as técnicas abordadas são capazes de estimar adequadamente o comportamento de tais erros e, portanto, garantir a adequada sintonia de eventuais estimadores (como o filtro de Kalman, por exemplo), quando da fusão de IMUs com sensores auxiliares para fins de navegação integrada multi-sensorial.

Keywords: inertial navigation system; stochastic errors; Allan variance; state space; accelerometer; gyro;

Palavras-chaves: sistema de navegação inercial; erros estocásticos; variância de Allan; espaço de estados; acelerômetro; girômetro;

1. INTRODUÇÃO

Dada a recente evolução na área de veículos autônomos, também tem crescido a demanda por sistemas de navegação mais precisos e exatos, aptos a compor sistemas de controle de alta eficiência, segurança e de baixo custo (Tannenhaus et al., 2012). Figurando como uma das principais soluções de navegação empregadas em tais aplicações, os sistemas de navegação inercial (INS - do inglês *Inertial Navigation Systems*) utilizam uma unidade de medição inercial (IMU - do inglês *Inertial Measurement Unit*) para coletar medições de força específica e velocidade angular, as quais são integradas, numericamente, para fornecer informações de posição, velocidade e atitude de um determinado veículo de interesse (Ahmad et al., 2013). O uso desse componente se dá, normalmente, em paralelo com outro sensor de navegação que objetiva corrigir e melhorar a estimação dos parâmetros finais do sistema integrado. Na maioria dos casos, sensores como receptores GNSS (do inglês *Global Navigation Satellite Systems*), LIDARs (do inglês *Light Detection and Ranging*), entre outros, são empregados em sistemas de navegação no auxílio de um INS (Grejner-Brzezinska et al., 2016), por meio de fusão sensorial via métodos tais quais o filtro de Kalman (KF - do inglês *Kalman Filter*) e suas variantes (Kalman, 1960; Kalman and Bucy, 1961).

Uma das grandes oportunidades de mercado para a qual há a necessidade de se implementar sistemas de navegação de precisão e baixo custo é a agricultura. Sendo esse um dos setores econômicos de maior expressão e relevância nacional, a Agricultura de Precisão (AP) (Pierce and Nowak, 1999) é um dos seus pilares tecnológicos e tem buscado otimizar a gestão de processos produtivos agrícolas e, conseqüentemente, aumentar a produtividade/lucratividade dos mesmos. Muitas soluções têm sido concebidas visando viabilizar esses avanços, sendo uma delas, a integração do GNSS e do INS para sistemas de posicionamento de precisão (Guo et al., 2018).

A despeito da sua factibilidade, a maioria dos sensores com qualidade ideal para tais fusões se mostram inviáveis devido aos seus altos custos. Nesse sentido, soluções alternativas têm empregado IMUs de baixo custo com vistas à sua disseminação no mercado de massa. Para que isso seja possível, contudo, é necessário que sejam feitos tratamentos/calibrações de forma a mitigar os erros presentes em tais sensores, uma vez que, devido aos seus baixos custos de aquisição, esses possuem desempenhos inferiores quando comparados aos demais sensores de alto custo (Farrell et al., 2022).

Para que essas correções sejam adequadamente implementadas, faz-se necessário ter acesso a uma boa documentação/especificação dos erros dos sensores por parte de seus fabricantes. Uma documentação completa garante o conhe-

* Os autores agradecem à Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa (FUNDEP - ROTA 2030), processo no. 27192.02.02/2021.01.00; ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo no. 313160/2019-8; à Fundação de Amparo a Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG) processo no. APQ-01449-17; e à Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), processo no. 212-20/2018.

cimento da magnitude esperada dos erros determinísticos e, também, da natureza dos erros estocásticos aos quais os componentes estão sujeitos. Com tais informações, a próxima etapa consiste na construção de modelos dinâmicos (geralmente representados na forma de espaço de estados) capazes de prever adequadamente a evolução temporal de tais erros e, assim, garantir a sintonia de um estimador que os mitigue de forma igualmente eficiente.

Com base no exposto, este artigo possui o objetivo de investigar a abrangência das documentações fornecidas por alguns dos principais fabricantes de sensores inerciais de baixo custo disponíveis no mercado, com foco na especificação dos seus erros estocásticos, i.e., não-determinísticos. Como principais contribuições do trabalho, demonstra-se que a grande maioria das documentações supracitadas trazem informações limitadas, as quais são insuficientes para uma adequada identificação de seus erros característicos. Como ferramenta alternativa a tal processo de identificação, é investigado o uso da variância de Allan (AV, do inglês *Allan Variance*), conforme recomendado pela comunidade científica e industrial (IEEE, R2003). Como fruto da utilização da mesma, adequados modelos dinâmicos em espaço de estados (Farrell et al., 2022) podem ser usados para reconstruir (via simulação) as medições dos sensores inerciais, com vistas à validação da técnica e futura sintonia de KFs para fusão sensorial. Como contribuição adicional deste trabalho, é apresentada uma solução otimizada da técnica supracitada, a qual é capaz de refinar os modelos dinâmicos propostos para os erros estocásticos dos sensores inerciais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 são abordados os principais conceitos utilizados no desenvolvimento e análises do mesmo, a saber, a natureza dos erros estocásticos de sensores inerciais, a técnica da AV e um modelo dinâmico adequado para reconstrução das medições corrompidas dos sensores; em seguida, é discutida na Seção 3, a metodologia utilizada no trabalho para a coleta de dados, tratamento estatístico e otimização proposta; na Seção 4 são apresentados os principais resultados obtidos com base em ensaios experimentais de diferentes IMUs disponíveis comercialmente; por fim, a Seção 5 expõe as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

2. CONCEITOS

Nesta seção são apresentados os principais conceitos associados à definição dos erros estocásticos de sensores inerciais, suas técnicas de identificação e modelos utilizados para a adequada caracterização dos mesmos.

2.1 Erros Estocásticos

Para se definir adequadamente os erros estocásticos existentes nos sensores inerciais, se faz necessário, primeiramente, o estabelecimento de um modelo de medição para os mesmos. Em (IEEE, R2003), por exemplo, é sugerido o seguinte:

$$\tilde{u}(t) = u(t) + d(u(t)) + z(t), \quad (1)$$

onde a medição $\tilde{u}(t)$ corresponde ao sinal verdadeiro $u(t)$ corrompido pelos erros determinísticos $d(u(t))$ e estocásticos $z(t)$ do sensor inercial. Os erros determinísticos são causados por fatores físicos e/ou eletrônicos e, como o próprio nome diz, são passíveis de determinação. Exemplos de erros determinísticos incluem os desalinhamentos entre os eixos dos sensores, erros de fator de escala e as componentes repetibilidade (*run - to - run*) dos *biases* (Secer and Barshan, 2016). Os erros estocásticos, por outro lado, são caracterizados por sinais aleatórios presentes nas medições, tais como o ruído branco, o passeio aleatório (RW, do inglês *Random Walk*) e o *bias* instabilidade. A caracterização desses últimos é realizada com base na densidade espectral de potência (PSD - do inglês *Power Spectral Density*) de seus respectivos ruídos diretores, uma vez que seus comportamentos aleatórios tornam impossível a caracterização de outra forma.

Os erros em $z(t)$, que são foco das análises deste artigo e que predominam nos sensores de uma IMU, são o ruído branco, $z_N(t)$, o *bias* instabilidade, $z_B(t)$, e o *random walk*, $z_K(t)$:

$$z(t) = z_N(t) + z_B(t) + z_K(t). \quad (2)$$

Conforme sugerido por Farrell et al. (2022), tais erros estocásticos podem ser adequadamente modelados como segue:

$$z_N(t) = \omega_N(t), \quad (3)$$

$$\dot{z}_G(t) = -\mu_B z_G(t) + \omega_B(t), \quad (4)$$

$$\dot{z}_K(t) = \omega_K(t). \quad (5)$$

O sinal $z_G(t)$, definido em (4), consiste em uma aproximação para o erro $z_B(t)$, uma vez que esse erro estocástico não possui modelo em espaço de estados que represente perfeitamente sua evolução temporal (para detalhes, vide (Farrell et al., 2022)). Um modelo alternativo, que caracteriza aproximadamente o *bias* instabilidade, conforme sugerido também por Farrell et al. (2022), é o de Gauss-Markov de primeira ordem (Brown and Hwang, 1997), o qual foi adotado neste trabalho. A variável μ_B é definida como:

$$\mu_B = \frac{1}{T_B}, \forall T_B > 0 \quad (6)$$

onde T_B é o tempo de correlação do processo de Gauss-Markov de primeira ordem.

Já as variáveis $\omega_N(t)$, $\omega_B(t)$, $\omega_K(t)$ representam ruídos brancos Gaussianos com PSDs dadas por:

$$S_N = N^2, \quad (7)$$

$$S_B = \frac{2B^2 \ln 2}{\pi(0,4365)^2 T_B}, \quad (8)$$

$$S_K = K^2, \quad (9)$$

onde N , B e K são os coeficientes característicos dos respectivos erros $z_N(t)$, $z_B(t)$ e $z_K(t)$. Tais coeficientes devem ser, idealmente, fornecidos pelos fabricantes dos sensores inerciais em suas documentações oficiais ou, quando não o são (caso mais frequente), podem ser identificados e analisados utilizando a técnica da variância de Allan, apresentada na Subseção a seguir.

2.2 Variância de Allan

A variância de Allan (AV - do inglês *Allan Variance*) é uma técnica amplamente utilizada para validar o desempenho de IMUs e caracterizar seus erros estocásticos. A partir dessa técnica, é possível prever a precisão de navegação de um sensor inercial, seja ele acelerômetro ou girômetro, e assim orientar a escolha de uma IMU apropriada para a aplicação de interesse.

O processo para se computar a variância de Allan ocorre da seguinte maneira: dado um conjunto de amostras, $D = \{\tilde{u}_i\}_{i=1}^L$, de um acelerômetro ou girômetro, onde L é a quantidade total de amostras, coletadas sob um intervalo de amostragem T , com a IMU em estado estacionário, forma-se um conjunto (*cluster*) contendo $n \in [1, L/2]$ amostras, e com período $\tau = nT$, o qual varia de T até $TL/2$. Em seguida, são formados conjuntos semelhantes ao primeiro (todos com n amostras e contendo sobreposição de uma amostra em relação à cada conjunto anterior), e é calculado o valor médio de cada conjunto, $\bar{u}_i(\tau)$. Por fim, calcula-se a AV em função do período τ utilizando a diferença quadrática das médias entre os conjuntos, conforme (Allan, 1966):

$$\hat{\sigma}_u^2(\tau) = \frac{1}{2(L-2n)} \sum_{i=1}^{L-2n} [\bar{u}_{i+n}(\tau) - \bar{u}_i(\tau)]^2. \quad (10)$$

Para o cálculo do desvio padrão de Allan (ASD - do inglês *Allan Standard Deviation*) basta retirar a raiz quadrada da AV para o período τ de interesse, portanto, $\hat{\sigma}_u(\tau) = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2(\tau)}$. Na curva (logarítmica), formada pelo ASD plotado em função de τ , é possível observar a presença de cada um dos erros estocásticos apresentados anteriormente. Na Figura 1, por exemplo, o ruído branco, o *bias* instabilidade e o *random walk* podem ser identificados pelas curvas com inclinações de $-1/2$, 0 e $+1/2$, respectivamente. Para uma adequada identificação dos erros estocásticos presentes no sensor inercial é recomendado um período de coleta das amostras de no mínimo dez horas, pois, assim, é possível analisar todas as inclinações presentes no ASD (Farrell et al., 2022).

Com relação aos parâmetros N , B e K apresentados de (7) a (9), respectivamente, eles podem ser inferidos a partir dos gráficos da curva do ASD, uma vez que são conhecidas fórmulas analíticas fechadas para os mesmos (IEEE, R2003). Para a caracterização do ruído branco, em particular, tem-se que:

$$\sigma_{z_N}^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau} \leftrightarrow \sigma_{z_N}(\tau) = \frac{N}{\tau^{1/2}}, \quad (11)$$

a qual resulta na inclinação de $-1/2$ da Figura 1 e a partir da qual conclui-se que $N = \sigma_{z_N}(\tau)|_{\tau=1s}$. Tal erro

estocástico está associado à emissão espontânea de elétrons presentes na saída de origem, é um componente de alta frequência o qual possui um tempo de correlação muito menor que o tempo de amostragem, o que explica a inclinação negativa para pequenos valores de τ (IEEE, R2003). Já com relação ao ASD do *random walk*, esse pode ser definido pela seguinte expressão:

$$\sigma_{z_K}^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3} \leftrightarrow \sigma_{z_K}(\tau) = K\sqrt{\frac{\tau}{3}}. \quad (12)$$

A partir de (12), verifica-se que ela caracteriza a inclinação de +1/2 da ASD e que $K = \sigma_{z_K}(\tau)|_{\tau=3s}$. O *random walk* é um processo estocástico de origem incerta, possivelmente um caso limite de um ruído exponencialmente correlacionado com um tempo de correlação muito longo, o que explica sua caracterização somente para valores de τ mais longos (IEEE, R2003). Por fim, para o *bias* instabilidade, referente ao trecho horizontal de seu ASD pode ser descrito como (Farrell et al., 2022):

$$\sigma_{z_B}^2(\tau) \approx \frac{2B^2 \log 2}{\pi} \leftrightarrow \sigma_{z_B}(\tau) \approx 0,664B. \quad (13)$$

O valor de $\sigma_{z_B}(\tau)$ é aproximado como sendo o menor valor atingido pela curva do ASD, o que, por sua vez, acontece no instante correspondente a 1,89 vezes o tempo de correlação T_B do processo Gauss-Markov de primeira ordem empregado para modelar o *bias* instabilidade (Farrell et al., 2022). A origem do *bias* instabilidade está associada à eletrônica, ou outros componentes suscetíveis a oscilações aleatórias. Devido à sua natureza de baixa frequência, ele aparece como as flutuações de viés nos dados (IEEE, R2003).

2.3 Modelo Discreto

No intuito de validar a eficácia das técnicas supracitadas na identificação dos erros estocásticos de IMUs, Farrell et al. (2022) propõem um modelo discreto para os mesmos, concebido a partir dos respectivos modelos contínuos abordados na Seção 2.1 e dos coeficientes dos erros identificados via AV na Seção 2.2. O objetivo é permitir a reconstrução de medições simuladas de IMUs, as quais contenham as mesmas características estocásticas dos sensores reais. Desse modo, é possível validar os parâmetros dos ruídos, conceber um modelo bem sintonizado de erros da IMU junto ao modelo de erros dos estados do veículo, além

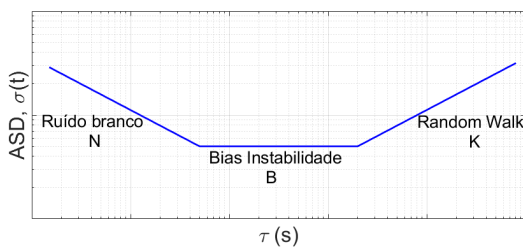


Figura 1. Curva característica de um ASD indicando o ruído branco, o bias instabilidade e o *random walk*, identificados pelas curvas com inclinações de -1/2, 0 e +1/2, respectivamente.

de usá-lo para o projeto do estimador de eventuais fusões sensoriais envolvendo o INS.

Farrell et al. (2022) propõem o seguinte o modelo em espaço de estados no tempo contínuo:

$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = A_z \mathbf{x}_z(t) + B_z \boldsymbol{\omega}_z(t), \quad (14)$$

$$z(t) = C_z \mathbf{x}_z(t) + \eta_z(t), \quad (15)$$

onde $A_z \in R^{n_z \times n_z}$, $B_z \in R^{n_z \times p}$ e $C_z \in R^{1 \times n_z}$. O parâmetro p representa o numero de ruídos independentes e distintos processados na equação diferencial dos erros da IMU; o parâmetro n_z é o numero de estados presentes no mesmo; e os sinais $\boldsymbol{\omega}_z(t)$ e $\eta_z(t)$ são ruídos brancos Gaussianos e mutuamente independentes com PSD dadas por $S_{\omega_z} \in R^{p \times p}$ e $S_{\eta_z} \in R$, respectivamente.

Assumindo, para fins de simplificação, que o modelo em espaço de estados possui apenas dois estados (i.e., apenas um sensor inercial uniaxial é considerado), onde $z(t)$ é definido por (2), e os modelos para $z_N(t)$, $z_K(t)$ e $z_B(t) = z_G(t)$ são dados por (3) a (5), tem-se que $\mathbf{x}_z(t) = [z_G(t), z_K(t)]^T$,

$$A_z = \begin{bmatrix} -\mu_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_z = [1 \ 1] \quad (16)$$

bem como $\boldsymbol{\omega}_z(t) = [\omega_B(t), \omega_K(t)]^T$ e $\eta_z(t) = \omega_N(t)$. Já a matriz da PSD dos ruídos do processo S_{ω_z} pode ser expressa como:

$$S_{\omega_z} = \begin{bmatrix} S_B & 0 \\ 0 & S_K \end{bmatrix}, \quad (17)$$

e a PSD do ruído de medição $S_{\eta_z} = S_N$.

Para a conversão do modelo em espaço de estados do tempo contínuo para o tempo discreto, deve ser feito:

$$\mathbf{x}_z(k+1) = \Phi \mathbf{x}_z(k) + \boldsymbol{\omega}_z(k), \quad (18)$$

$$z(k) = H \mathbf{x}_z(k) + \eta(k), \quad (19)$$

onde k é o tempo discreto correspondente ao tempo contínuo $t = kT$, $\boldsymbol{\omega}_z(k) \sim N(0, Q_{zd})$ e $\eta(k) \sim N(0, Q_{\eta d})$ são ruídos brancos Gaussianos, independentes e com covariâncias Q_{zd} e $Q_{\eta d}$, respectivamente.

Já as matrizes Φ , H , Q_{zd} e $Q_{\eta d}$ são computadas como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-\mu_B T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$H = C_z, \quad (21)$$

$$Q_{zd} \approx S_{\omega_z} T = \begin{bmatrix} S_B T & 0 \\ 0 & S_K T \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$Q_{\eta d} = \frac{S_N}{T}. \quad (23)$$

Dessa forma, com um modelo de erros em espaço de estados no tempo discreto, fidedigno e adequadamente sintonizado, é possível utilizá-lo em ferramentas da engenharia, tais como o filtro de Kalman estendido (EKF - do inglês *Extended Kalman Filter*), para fins de reconstrução simulada de medições de IMUs e concepção de fusões sensoriais com sistemas auxiliares.

3. METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho consistiu na coleta de dados de diferentes sensores inerciais comercialmente disponíveis, na identificação da curva ASD de cada um deles, no estabelecimento de comparações entre elas e, por fim, na extração dos parâmetros de seus erros estocásticos para posterior comparação com a documentação fornecida pelos fabricantes e com os dados simulados reconstruídos. Para tais análises, foram utilizadas duas IMUs de modelos, fabricantes e desempenhos distintos, a saber: o módulo MTI-7 fornecido pela fabricante Xsens e um C102-F9R da fabricante U-blox.

3.1 Preparação

Para fins de coleta dos dados, todas as IMUs ensaiadas foram submetidas a condições estacionárias, i.e., sem nenhum movimento ao longo ou em torno dos seus eixos sensitivos. Além disso, como se tratam de sensores de fabricantes distintos, diferentes ferramentas foram utilizadas para a coleta dos dados. No caso do MTI-7, a própria fabricante fornece uma plataforma para a coleta de dados denominada *MT Manager* (X-sens, 2022b), na qual é possível definir quais dados serão coletados e salvos nos arquivos para fins de análises. Além da facilidade de manipulação e armazenamento dos dados, uma das vantagens dessa plataforma é a capacidade de coleta de dados à frequência de 100Hz, o que garante uma maior quantidade de informações para as análises da AV. Para o C102-F9R, a U-blox não fornece nenhuma ferramenta para a coleta dos dados da IMU em sua taxa de amostragem padrão (50 Hz), uma vez que o foco do dispositivo é a solução de navegação, integrando GNSS e IMU (o C102-F9R embarca, além de uma IMU, um receptor GNSS multiconstelelação de dupla frequência). Por esse motivo, foi necessário realizar a coleta do módulo C102-F9R por meio de uma aplicação específica desenvolvida utilizando o *framework* ROS (do inglês *Robot Operating System*) em ambiente Linux. Essa aplicação decodifica e recompõe as mensagens brutas da IMU e as salva em um formato padrão. É importante observar que a frequência em que é realizada a coleta dos dados não afeta diretamente a comparação entre as curvas, porém exerce uma influência na qualidade final da mesma, uma vez que a taxa de amostragem está diretamente relacionada à capacidade de reconstrução do sinal original.

Os algoritmos utilizados para gerar a curva do ASD são os disponibilizados em (Farrell et al., 2021). A análise se inicia na construção do ASD a partir dos dados dos sensores, prosseguindo para a inspeção visual destas para a identificação dos parâmetros N , B , K e T_B , e conclui com a comparação dos mesmos com os coeficientes fornecidos pelos respectivos fabricantes, e a reconstrução de dados simulados correspondentes.

3.2 Otimização

De forma a garantir uma melhor correspondência entre os ASDs dos sensores reais e dos dados reconstruídos, pode ser realizada também, uma otimização nos parâmetros estimados por meio do método dos mínimos quadrados.

A função-custo a ser minimizada, como sugerida por Farrell et al. (2022), é

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^L w_i (\hat{\sigma}_u^2(\tau_i) - \sigma_z^2(\tau_i; \boldsymbol{\theta}))^2, \quad (24)$$

onde w_i é um vetor de pesos definido como:

$$w_i = \frac{1}{(2\sqrt{\frac{n}{2L}}\hat{\sigma}_u(\tau))^2}. \quad (25)$$

Já a AV paramétrica $\sigma_z^2(\tau; \boldsymbol{\theta})$ a ser otimizada é definida como:

$$\sigma_z^2(\tau) = \frac{S_N}{\tau} + \frac{S_B T_B^2}{\tau} \left[1 - \frac{T_B}{2\tau} \left(3 - 4e^{\frac{\tau}{T_B}} + e^{-\frac{2\tau}{T_B}} \right) \right] + \frac{S_K \tau}{3}, \quad (26)$$

ou alternativamente, em termos do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = [S_N \ S_B \ S_K \ T_B]$:

$$\sigma_z^2(\tau; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_1}{\tau} + \frac{\theta_2 \theta_4^2}{\tau} \left[1 - \frac{\theta_4}{2\tau} \left(3 - 4e^{\frac{\tau}{\theta_4}} + e^{-\frac{2\tau}{\theta_4}} \right) \right] + \frac{\theta_3 \tau}{3}. \quad (27)$$

Como pode ser observado em (27), dentre os quatro parâmetros de $\boldsymbol{\theta}$ a serem otimizados, apenas um é não-linear, a saber θ_4 ; logo, faz-se necessária a realização de uma busca não-linear somente sobre esse parâmetro. Para cada valor de θ_4 buscado, os demais podem ser otimizados diretamente via aplicação de um estimador do tipo mínimos quadrados.

3.3 Análise

Por fim, foi realizada uma comparação entre os coeficientes dos erros estocásticos identificados via AV, e os valores fornecidos pelos fabricantes (quando disponíveis). Adicionalmente, foram reconstruídos dados virtuais de tais sensores, com base nos parâmetros identificados nominalmente e via otimização, e comparadas as curvas dos ASDs resultantes com a dos sensores reais.

4. RESULTADOS

4.1 Curvas ASD Obtidas e Parâmetros Identificados

Com os dados coletados e devidamente tratados, foram computados os ASDs de um dos eixos de cada sensor inercial. A partir dessas curvas foram identificados os parâmetros dos erros estocásticos, os quais são apresentados na Tabela 1. Com esses valores, reconstruiu-se novas amostras por meio do modelo em espaço de estados apresentado na Subseção 2.3 com vistas à sua validação. Por fim, por meio da otimização apresentada na Subseção 3.2, foram calculados os novos valores para os parâmetros estocásticos de modo à obter uma melhor aproximação do ASD. Os valores dos coeficientes otimizados são apresentados na Tabela 2. As três curvas dos ASDs resultantes de cada sensor inercial são apresentadas nas Figuras de 2 à 5. Elas permitem a comparação entre os ASDs obtidos pelos

Tabela 1. Parâmetros das IMUs identificados nas curvas do ASD para o eixo X de cada sensor.

IMU	N		B		K		T_B	
	Acc: $m/s^{3/2}$	Gyro: $rad/s^{1/2}$	Acc: m/s^2	Gyro: rad/s	Acc: $m/s^{5/2}$	Gyro: $rad/s^{3/2}$	Acc: s	Gyro: s
MTI - 7	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	84,6	223,5
C-102	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	18,5	29,0

Tabela 2. Parâmetros das IMUs obtidos por meio de otimização referente ao eixo X de cada sensor

IMU	N		B		K		T_B	
	Acc: $m/s^{3/2}$	Gyro: $rad/s^{1/2}$	Acc: m/s^2	Gyro: rad/s	Acc: $m/s^{5/2}$	Gyro: $rad/s^{3/2}$	Acc: s	Gyro: s
MTI - 7	$9,6 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$8,2 \cdot 10^{-7}$	38,3	89,5
C-102	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$8,7 \cdot 10^{-5}$	148,9	68,3

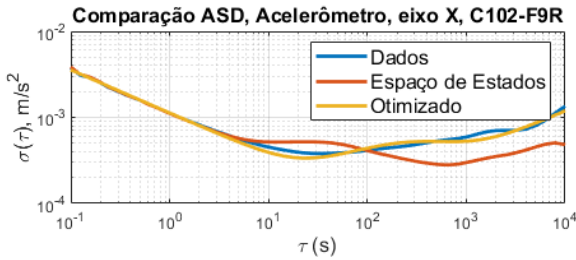


Figura 2. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do acelerômetro C102-F9R.

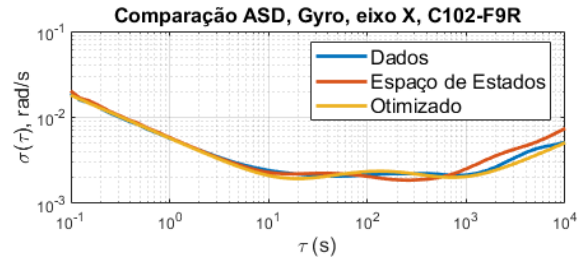


Figura 4. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do giroscópio C102-F9R.

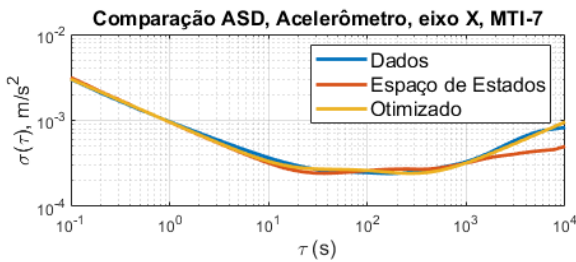


Figura 3. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do acelerômetro MTI-7.

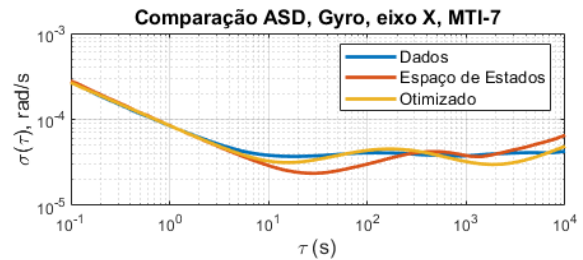


Figura 5. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do giroscópio MTI-7.

métodos propostos com o decorrente da análise real das amostras, com consequente validação de qual desses possui a melhor estimativa das variáveis estocásticas da medição.

O primeiro ponto a ser observado nessas Figuras é que o modelo em espaço de estados (curvas em vermelho), o qual utiliza as variáveis identificadas no ASD real (curvas em azul), já garante uma boa representatividade das características dos erros, o que valida a alta capacidade de estimativa da natureza dos erros estocásticos de tais modelos. A despeito de sua boa caracterização, contudo, nota-se uma significativa melhoria da caracterização dos erros estocásticos quando da utilização da técnica de otimização (curvas em amarelo). Tal fato também pode ser observado pela Tabela 3, a qual apresenta os valores dos erros quadráticos médios (RMS, do inglês *Root Mean Square*) das curvas obtidas com relação ao seu respectivo ASD original. Para ambos os sensores analisados, a curva com os parâmetros otimizados resultou em um menor valor RMS.

Por meio das Tabelas 1 e 2, é possível comparar os valores dos parâmetros identificados nos ASDs dos sensores inerciais com os seus respectivos valores otimizados. A partir dessa análise é possível concluir que o método de identificação não otimizado possui uma maior eficácia para

reconhecer a determinação das variáveis N , B e K , uma vez que, diferentemente dessas últimas, os valores para T_B são os que possuem maior discrepância com os valores identificados via otimização.

4.2 Comparativo entre Sensores Inerciais

Outra análise de interesse, também proveniente da técnica da variância de Allan é a comparação das características estocásticas entre os sensores inerciais. Estas comparações são apresentadas nas Figuras 6 e 7 para acelerômetro e giroscópio, respectivamente.

Na Fig. 6, é possível verificar que as IMUs ensaiadas possuem acelerômetros com qualidades semelhantes, uma vez que os ASDs do sensor inercial das unidades seguem

Tabela 3. Valor RMS do erro obtido pelas curvas identificada (espaço de estados) e otimizada.

IMU		RMS	
		Espaço de Estados	Otimizado
MTI-7	Acc: m/s^2	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
	Gyro: rad/s	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-6}$
C-102	Acc: m/s^2	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
	Gyro: rad/s	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$

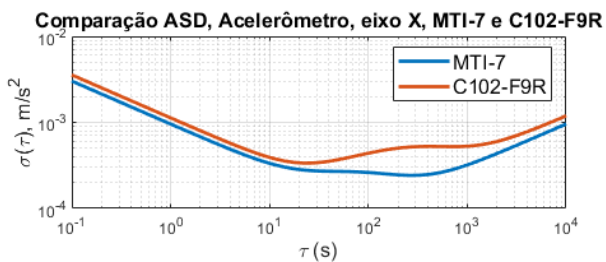


Figura 6. Comparação dos ASDs entre o eixo X dos acelerômetros.

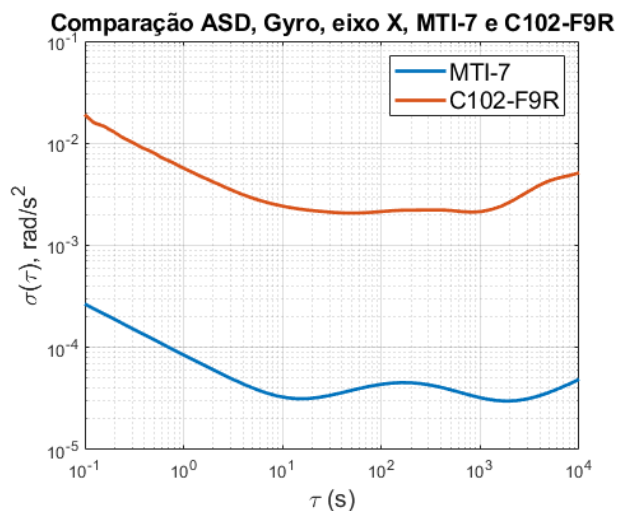


Figura 7. Comparação dos ASDs entre o eixo X dos girômetros.

o mesmo perfil. Isto também pode ser confirmado pelos dados apresentados na Tabela 2, com exceção somente na variável T_B , a qual é a única que não possui divergência em escala milesimal.

Já com relação aos girômetros das IMUs, é visível a grande diferença entre os ASDs desses sensores inerciais, conforme apresentado na Fig. 7. Conclui-se, desse modo, que o girômetro do C102-F9R possui erros estocásticos com magnitudes até 100 vezes maiores quando comparado ao mesmo sensor do MTI-7. A discrepância entre os coeficientes identificados também pode ser confirmada pelos valores apresentados na Tabela 2, bem como pela diferença de preço das duas IMUs: enquanto o módulo MTI-7 é comercializado por valores em torno de US\$500, o correspondente C102 custa menos de US\$300 na maioria das lojas especializadas.

Por fim, com essas análises, frisa-se novamente a importância da técnica da AV para fins de avaliação e adequada especificação de sensores inerciais em aplicações envolvendo navegação integrada multissensorial.

4.3 Comparação de Parâmetros do Datasheet

Como uma maneira adicional de se validar a adequação do modelo em espaço de estados investigado para fins de estimação das variáveis estocásticas de sensores inerciais, é feita a comparação dos parâmetros fornecidos pelos fabricantes com os do espaço de estados e os otimizados. Para o MTI-7, a fabricante X-sens fornece somente algumas ca-

Tabela 4. Comparativo entre os dados de AV otimizada e os disponibilizados pela X-sens (X-sens, 2022a).

	MTI-7	Fabricante	Espaço de Estados	Otimizados
N	Acc: $m/s^{3/2}$	$12,0 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$
	Gyro: $rad/s^{1/2}$	$12,0 \cdot 10^{-5}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$	$8,4 \cdot 10^{-5}$
B	Acc: m/s^2	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$
	Gyro: rad/s	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$

racterísticas relacionadas a erros estocásticos, sendo estes, o ruído branco e o *bias* instabilidade. A comparação de tais dados é feita na Tabela 4.

Como pode ser observado, a divergência entre os valores obtidos via otimização e os disponibilizados pela fabricante é mínima, o que reforça a relevância da técnica investigada. Além disso, devido à falta de disponibilidade (por parte do fabricante) dos parâmetros estocásticos associados ao *random walk*, a utilização da AV mostra-se ainda mais importante para a avaliação da qualidade da IMU.

Tal ausência de especificações, por exemplo, impede que se possa gerar a curva ASD completa do sensor, uma vez que, sem os valores das componentes K e T_B , só é possível obter a curva referente ao ruído branco, resultando em uma reta com inclinação de $-1/2$. Apesar do fabricante fornecer o parâmetro referente ao *bias* instabilidade, B , a influência desta componente não pode ser inserida na curva ASD completa devido ao modelo matemático implementado para este tipo de ruído, o qual necessita do valor do tempo de correlação. Contudo, é possível gerar uma reta que passa em $0,664B$, o qual é supostamente associado ao menor valor que a curva ASD deve atingir. Assim, um gráfico comparativo (incompleto) pode ser gerado entre a solução otimizada e a obtida via espaço de estados partir dos parâmetros fornecidos pelo *datasheet*. Tal comparativo é fornecido nas Figuras 8 e 9.

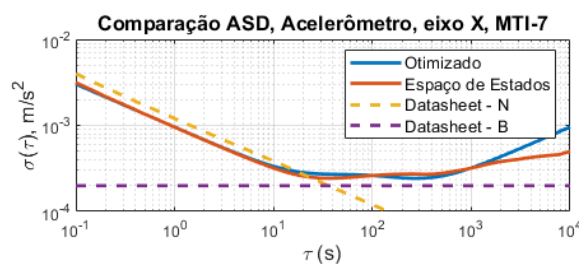


Figura 8. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do acelerômetro MTI-7 (inclusão das curvas oriundas do *datasheet*)

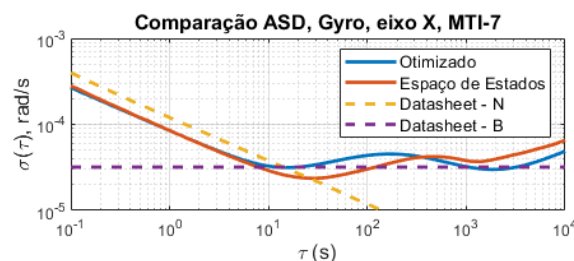


Figura 9. Comparação dos ASDs referentes ao eixo X do girômetro MTI-7 (inclusão das curvas oriundas do *datasheet*).

A partir dessas Figuras, é possível verificar que ambas as curvas, tanto em espaço de estados quanto a otimizada, obtiveram um comportamento coerente com as curvas obtidas via parâmetros fornecidos pelo *datasheet* dos sensores. Esse fato é corroborado pela Tabela 4, que mostra que o *datasheet* fornece valores de ruído muito próximos dos que efetivamente corrompem as mediações.

No que tange ao C102-F9R, não foi possível estabelecer a comparação supracitada devido à ausência de informações relativas à IMU desse módulo na documentação oficial disponibilizada pelo fabricante. Em uma cenário como esse, frequentemente encontrado por usuários de IMUs de baixo custo, a técnica da AV, associada à otimização proposta neste trabalho, mostra-se como uma solução indispensável à adequada identificação dos erros estocásticos existentes nos sensores inerciais e à sintonia de estimadores concebidos para sistemas de navegação integrada multissensorial.

5. CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi evidenciar a relevância de se conhecer a natureza estocástica dos erros de medição de sensores inerciais de baixo custo, visando a construção de um modelo em espaço de estados no tempo discreto capaz de reconstruí-los, bem como a adequada sintonia de um estimador para eventuais fusões sensoriais. Com base nas investigações apresentadas, foi possível verificar a importância do uso da técnica de variância de Allan para determinar a qualidade dos sensores inerciais e identificar os coeficientes característicos de seus erros estocásticos. Além disto, foi possível consolidar a efetividade do modelo de Farrell et al. (2022) para a reconstrução de medições de IMU, uma vez que os ASDs resultantes dos dados gerados a partir desse método mostraram-se coerentes com os obtidos com dados reais e com os fornecidos pelo fabricante do sensor.

Para etapas futuras deste estudo, pretende-se analisar e comparar tais curvas com sensores de *smartphones* disponíveis no mercado e avaliar a possível aplicação desses dispositivos em sistemas de que exijam maior regularidade. Outro passo é a implementação de um EKF para aplicações de fusão sensorial o qual seja sintonizado com base nas técnicas de identificação aqui discutidas. Além disso, planeja-se utilizar tal implementação para validar experimentalmente as soluções propostas afim de demonstrar como as mesmas garantem resultados mais confiáveis do que utilizando somente as especificações fornecidas pelo fabricante.

REFERÊNCIAS

- Ahmad, N., Ghazilla, R.A.R., Khairi, N.M., and Kasi, V. (2013). Reviews on various inertial measurement unit (IMU) sensor applications. *International Journal of Signal Processing Systems*, 1(2), 256–262.
- Allan, D. (1966). Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2), 221–230. doi:10.1109/PROC.1966.4634.
- Brown, R.G. and Hwang, P.Y. (1997). *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*.
- Farrell, J., Silva, F., Rahman, F., and Wendel, J. (2021). Matlab software to implement various Allan variance

- calculations related to the article “IMU error Modeling for State Estimation and Sensor Calibration: A Tutorial”. URL <https://github.com/jaffarrell/AV-Matlab-SW>.
- Farrell, J., Silva, F., Rahman, F., and Wendel, J. (2022). IMU error modeling for state estimation and sensor calibration: A tutorial.
- Grejner-Brzezinska, D.A., Toth, C.K., Moore, T., Raquet, J.F., Miller, M.M., and Kealy, A. (2016). Multisensor navigation systems: A remedy for GNSS vulnerabilities? *Proceedings of the IEEE*, 104(6), 1339–1353.
- Guo, J., Li, X., Li, Z., Hu, L., Yang, G., Zhao, C., Fairbairn, D., Watson, D., and Ge, M. (2018). Multi-gnss precise point positioning for precision agriculture. *Precision agriculture*, 19(5), 895–911.
- IEEE (R2003). Specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros.
- Kalman, R.E. and Bucy, R.S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems.
- Pierce, F.J. and Nowak, P. (1999). Aspects of precision agriculture. *Advances in agronomy*, 67, 1–85.
- Secer, G. and Barshan, B. (2016). Improvements in deterministic error modeling and calibration of inertial sensors and magnetometers. *Sensors and Actuators A: Physical*, 247, 522–538.
- Tanenhaus, M., Carhoun, D., Geis, T., Wan, E., and Holland, A. (2012). Miniature IMU/INS with optimally fused low drift MEMS gyro and accelerometers for applications in GPS-denied environments. In *Proceedings of IEEE/ION PLANS 2012*, 259–264.
- X-sens (2022a). X-sens sensor specification, MTi 1-series. URL mtidocs.xsens.com/sensor-specifications.
- X-sens (2022b). X-sens setup page. URL www.xsens.com/setup.