

# Controle Chaveado Via Realimentação de Estados Para Sistemas Lineares Chaveados a Tempo Discreto Por Meio de LMIs Iterativas<sup>★</sup>

Andressa M. Souza, Ricardo C. L. F. Oliveira, Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP  
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil  
(e-mail: {andressa,ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br)

**Abstract:** This paper proposes an algorithm based on LMIs to compute a switching control law and state feedback gains that stabilize a discrete-time switched system. The adopted design methodology is based on the existence of a quadratic Lyapunov function, which typically yields synthesis conditions involving the search for scalar parameters in terms of nonconvex inequalities. Differently from the available methods, in the proposed technique the switching law and feedback gains are computed simultaneously through an iterative procedure, without the need to resort to grid-based strategies (as usual in the literature), due to the fact that the scalar parameters appear affinely in the conditions. Numerical examples illustrate the results.

**Resumo:** Este artigo propõe um algoritmo baseado em LMIs para computar uma lei de controle de chaveamento e ganhos de realimentação de estado que estabilizam um sistema chaveado a tempo discreto. A metodologia de projeto adotada é baseada na existência de uma função de Lyapunov quadrática, que tipicamente resulta em condições de projeto envolvendo a busca por parâmetros escalares em termos de desigualdades não convexas. Diferentemente dos métodos disponíveis, na técnica proposta a lei de comutação e os ganhos de realimentação são calculados simultaneamente por meio de um procedimento iterativo, sem a necessidade de recorrer a estratégias baseadas em *gridding* (como usual na literatura), pelo fato de os parâmetros escalares aparecerem de maneira afim nas condições. Exemplos numéricos ilustram os resultados.

**Keywords:** Switched system; Switching law; State feedback; Linear matrix inequalities; Discrete-time system.

**Palavras-chaves:** Sistemas chaveados; Regra de chaveamento; Realimentação de estados; Desigualdades matriciais lineares; Sistemas a tempo discreto.

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados são uma subclasse de sistemas híbridos que vem atraindo grande atenção da comunidade científica desde a década de 1970, como pode ser confirmado por vários resultados relevantes na literatura, como por exemplo os artigos (Wicks et al., 1994; Liberzon and Morse, 1999; Skafidas et al., 1999; DeCarlo et al., 2000; Hespanha and Morse, 2002; Ji et al., 2005) e livros (Liberzon, 2003; Sun and Ge, 2005). Esses sistemas são caracterizados por apresentarem um conjunto finito de subsistemas e uma regra de chaveamento responsável por selecionar qual subsistema está ativo em determinado instante de tempo (Liberzon, 2003; Lin and Antsaklis, 2009). Essas características fazem com que uma ampla gama de problemas físicos e de engenharia possam ser modelados como sistemas chaveados, por exemplo, os sistemas de eletrônica de potência (Cardim et al., 2009), veículos aéreos (Wang et al., 2015), robóticos (Zhang et al., 2018) e de distribuição inteligente

(Homaei et al., 2014), energia (Williams and Hoft, 1991), controle em rede (Donkers et al., 2011) e hidráulicos (Kong et al., 2019). Uma característica interessante dos sistemas chaveados é que muitas vezes a regra de chaveamento é capaz de assegurar a estabilidade assintótica global mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis. Também é importante salientar que a presença da comutação pode não estar necessariamente associada à dinâmica física, mas sim a uma lei de controle, capaz de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada (Morse, 1996; Narendra and Balakrishnan, 1997).

A regra de chaveamento, quando arbitrária, em geral está associada a sinais exógenos ou parâmetros variantes no tempo (Daafouz et al., 2002; Lin and Antsaklis, 2005; Lee and Dullerud, 2006), diferente de uma regra controlada que tipicamente é regida pelos estados do sistema (Wicks et al., 1994; Feron, 1996; Geromel and Colaneri, 2006; Deaecto et al., 2015; Zhai, 2001). Em meados da década de 1990, muitos resultados surgiram para regras de chaveamento controladas. Nesse contexto, as condições propostas em Zhai (2001) destacam-se pelo pioneirismo em discutir a extensão dos resultados originalmente apre-

<sup>★</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e CNPq.

sentados para sistemas contínuos, baseados na existência de uma combinação convexa estável (Wicks et al., 1994), para lidar com sistemas a tempo discreto. Em seguida surgiram outras condições de estabilidade para o tempo discreto propostas em Zhang et al. (2012), Zhang et al. (2009). É possível observar que a maioria das técnicas disponíveis na literatura é formulada em termos de condições na forma de desigualdades matriciais bilineares (em inglês, *bilinear matrix inequalities — BMIs*), como nos resultados baseados na estabilidade quadrática e em múltiplas funções de Lyapunov (Hu et al., 2008; Liberzon, 1999; Wicks and DeCarlo, 1997; Pettersson, 2003; Zhang et al., 2009) ou nas desigualdades de Lyapunov-Metzler (Geromel and Colaneri, 2006; Deaecto et al., 2015; Deaecto and Geromel, 2017; Fiacchini et al., 2016).

Este artigo propõe o projeto de uma lei de controle de realimentação de estado de um sistema chaveado a tempo discreto em que a regra de chaveamento e os ganhos de realimentação são computados simultaneamente. A estratégia de estabilização é baseada na técnica proposta em Zhai (2001), que é composta pela busca por uma combinação linear dos modos do sistema chaveado e uma função de Lyapunov quadrática (que independe dos modos). Um algoritmo iterativo baseado em desigualdades matriciais lineares (em inglês, *linear matrix inequalities — LMIs*) é proposto para não somente encontrar tal combinação convexa, como também a regra de chaveamento e os ganhos de realimentação. Um destaque do método é a não necessidade de realizar a discretização do espaço de parâmetros escalares, que é uma prática comum das estratégias disponíveis na literatura. Experimentos numéricos são apresentados para avaliar o desempenho da abordagem proposta.

**Notação:**  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  indica que  $M$  é uma matriz real de dimensão  $n \times m$  e a matriz transposta de  $M$  é simbolizada por  $M'$ .  $He(M) = M + M'$  e  $M \succ 0$  denota uma matriz definida positiva. O símbolo  $\star$  representa um bloco induzido por simetria em uma matriz quadrada e  $\otimes$  indica o produto de Kronecker.  $I_n$  representa a matriz identidade de dimensão  $n$  e  $0$  a matriz nula de dimensão apropriada. O módulo dos autovalores de  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é denotado por  $|\lambda_i(M)|$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Além disso,  $|\lambda_{min}(M)| = \min_i |\lambda_i(M)|$  e  $|\lambda_{max}(M)| = \max_i |\lambda_i(M)|$ . O conjunto unitário é dado por

$$\Lambda = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

## 2. PRELIMINARES

Considere o sistema linear chaveado a tempo discreto

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $\sigma$  é uma regra de comutação a ser projetada que seleciona, para cada instante de tempo, um subsistema, isto é,

$$\sigma(k) = i \in \{1, \dots, N\}$$

$$A_{\sigma(k)} \in \{A_1, \dots, A_N\}, \quad B_{\sigma(k)} \in \{B_1, \dots, B_N\}$$

sendo  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  matrizes dadas. O objetivo é projetar simultaneamente a regra de chaveamento  $\sigma$  e um conjunto de ganhos de realimentação de estados  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  associado à lei de controle

$$u(k) = K_{\sigma(k)}x(k)$$

tais que o sistema em malha fechada

$$x(k+1) = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x(k) \quad (2)$$

seja globalmente assintoticamente estável.

Uma condição para provar a estabilidade de (2) por meio da existência de uma função de Lyapunov quadrática é verificar se o conjunto de matrizes  $\{A'_{cl_i}PA_{cl_i} - P\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  é *estritamente completo* (Skafidas et al., 1999) com  $A_{cl_i} = A_i + B_iK_i$ . Esse teste é de difícil formulação e uma alternativa viável de ser tratada numericamente é a busca por uma combinação positiva estável das matrizes  $A_{cl_i}$  do conjunto. O lema apresentado a seguir, proposto por Zhai (2001), viabiliza o cálculo da regra de comutação  $\sigma$  e os ganhos de realimentação de estados  $K_i$ .

**Lema 1.** Se existirem uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e escalares  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A'_{cl_i}PA_{cl_i} - P) < 0 \quad (3)$$

então a regra de chaveamento

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} x'(A'_{cl_i}PA_{cl_i} - P)x \quad (4)$$

com

$$A_{cl_i} = A_i + B_iK_i \quad (5)$$

torna a origem globalmente assintoticamente estável.

É imediato perceber que as condições do Lema 1 não são LMIs devido ao produto envolvendo os escalares  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , as matrizes  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $P$  na desigualdade (3). Contudo, soluções em termos de LMIs podem ser obtidas por meio de heurísticas envolvendo a discretização do espaço paramétrico dos  $\lambda_i$ 's e implementação de procedimentos de busca (mudanças de variáveis envolvendo a matriz  $P$  e os ganhos  $K_i$  também são necessárias).

Uma simplificação que pode ser aplicada na desigualdade (3), conveniente para a estratégia apresentada neste artigo, é suprimir o produto entre  $\lambda_i$  e a matriz de Lyapunov que aparece isolada, isto é, resolver as condições do Lema 1 substituindo a desigualdade em (3) por

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A'_{cl_i}PA_{cl_i}) < P, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (6)$$

Como discutido em Zhai (2001), sempre que o Lema 1 possui solução, a soma  $\delta = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$  é um número positivo. Portanto, a desigualdade (3) pode ser multiplicada por  $\delta^{-1}$ , resultando em (6) com  $\alpha_i = \lambda_i/\delta$  e  $\alpha \in \Lambda$ . Além disso, também é permitido considerar que a soma dos  $\alpha_i$  em (6) seja maior do que um, pois nesse caso

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A'_{cl_i}PA_{cl_i}) > \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} (A'_{cl_i}PA_{cl_i})$$

e, como consequência, a primeira desigualdade em (6) continua factível com  $\alpha \in \Lambda$ .

Como observado em Geromel and Colaneri (2006), sempre que a desigualdade (6) tem solução, então a combinação convexa  $\sum_i \alpha_i A_{cl_i}$  é Schur estável. Contudo, nem toda combinação convexa estável satisfaz (6) (um fenômeno que não acontece no caso de sistemas a tempo contínuo).

Um primeiro passo importante na transformação da desigualdade (6) em LMIs é o desacoplamento entre as matrizes  $A_{cli}$  e  $P$ . Objetivando uma expressão simétrica em um espaço aumentado, é conveniente incorporar o escalar  $\alpha_i$  em  $A_{cli}$ , e uma solução possível é considerar  $(\sqrt{\alpha_i}A_{cli})'P(\sqrt{\alpha_i}A_{cli})$  e adotar a mudança de variável  $\rho_i = \sqrt{\alpha_i}$  (possível, pois  $\alpha_i \geq 0$ ). Além disso, o produto  $\rho_i K_i$  também é um inconveniente, mas pode ser contornado com a imposição de um limite nas entradas dos ganhos  $K_i$  (útil do ponto de vista prático, embora possa não ser suficiente para prevenir a saturação dos atuadores)

$$K_i = [k_{ij\ell}] \in \mathbb{R}^{m \times n}, |k_{ij\ell}| \leq \beta$$

em que  $k_{ij\ell}$  representa a  $j$ -ésima linha e  $\ell$ -ésima coluna do ganho  $K_i$  e  $\beta \geq 0$  é um escalar dado<sup>1</sup>, e as mudanças de variáveis  $\bar{K}_i = \rho_i K_i$ , que levam às restrições

$$-\rho_i \beta \leq \bar{k}_{ij\ell} \leq \rho_i \beta \quad (7)$$

para  $i = 1, \dots, N$ .

A próxima seção apresenta condições de síntese em que a regra de chaveamento  $\sigma$  e os ganhos de realimentação  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  são projetados simultaneamente. A novidade técnica é que, com a fixação de algumas variáveis de folga, as condições são formuladas em termos de LMIs.

### 3. CONTROLE CHAVEADO VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

**Teorema 2.** Sejam  $\mathcal{B}_1 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathcal{B}_2 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  e  $\mathcal{B}_3 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  matrizes dadas com  $\mathcal{B}_3$  de posto completo, e  $\beta$  um escalar positivo. Se existirem uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}^{n \times nN}$ ,  $\mathcal{X}_2 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathcal{X}_3 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e os escalares  $\mu$ ,  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que (7)

$$\rho_i \geq 0, i = 1, \dots, N \quad (8)$$

$$\mu \leq \rho_1 + \dots + \rho_N \quad (9)$$

$$\mathcal{Q} + \text{He}(\mathcal{X}\mathcal{B}) < 0 \quad (10)$$

com

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -P & \star & \star \\ 0 & \Phi_1 & \star \\ \Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = [\mathcal{B}_1 \ \mathcal{B}_2 \ \mathcal{B}_3], \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi_1 = I_N \otimes P, \Phi_2 = \begin{bmatrix} \rho_1 A_1 + B_1 \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \rho_N A_N + B_N \bar{K}_N \end{bmatrix}, \Phi_3 = -I_{nN}$$

então, caso  $\rho_1^2 + \dots + \rho_N^2 \geq 1$ , a regra de chaveamento (4) torna a origem do sistema (2) globalmente assintoticamente estável com  $K_i = 0$  se  $\rho_i = 0$  ou  $K_i = (\rho_i)^{-1} \bar{K}_i$  se  $\rho_i \neq 0$ .

**Prova:** Multiplicando (10) à direita por  $\mathcal{B}^\perp$  e à esquerda por  $\mathcal{B}^{\perp'}$ , com

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{nN} \\ (-\mathcal{B}_3^{-1} \mathcal{B}_1) & (-\mathcal{B}_3^{-1} \mathcal{B}_2) \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\mathcal{Q}_a + \text{He}(\mathcal{X}_a \mathcal{B}_a) < 0 \quad (11)$$

<sup>1</sup> Diferentes valores de  $\beta$  para cada entrada da matriz de ganho podem ser considerados.

com

$$\mathcal{Q}_a = \begin{bmatrix} -P & \star \\ 0 & \Phi_1 \end{bmatrix}, \mathcal{X}_a = \begin{bmatrix} (-\mathcal{B}_3^{-1} \mathcal{B}_1)' \\ (-\mathcal{B}_3^{-1} \mathcal{B}_2)' \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_a = \begin{bmatrix} \rho_1 A_1 + B_1 \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \rho_N A_N + B_N \bar{K}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{nN} \end{bmatrix}$$

Por fim, ao multiplicar (11) à direita por  $\mathcal{B}_a^\perp$  e à esquerda por  $\mathcal{B}_a^{\perp'}$  com

$$\mathcal{B}_a^\perp = \begin{bmatrix} I_n \\ \rho_1 A_1 + B_1 \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \rho_N A_N + B_N \bar{K}_N \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\sum_{i=1}^N ((\rho_i A_i + B_i \bar{K}_i)' P (\rho_i A_i + B_i \bar{K}_i)) - P < 0 \quad (12)$$

Com as mudanças de variáveis associadas aos ganhos de realimentação  $\bar{K}_i$  e colocando  $\rho_i$  em evidência, tem-se

$$\sum_{i=1}^N \rho_i^2 ((A_i + B_i K_i)' P (A_i + B_i K_i)) < P$$

Assim, caso  $\rho_1^2 + \dots + \rho_N^2 \geq 1$ , então a mudança de variável  $\alpha_i = \rho_i^2$  garante a factibilidade de (6) e, portanto, que  $\sigma(x)$  dado por (4) é uma regra de chaveamento globalmente estabilizante.  $\square$

A grande vantagem do Teorema 2 está no fato das matrizes  $(\rho_i A_i + B_i \bar{K}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  aparecerem de forma afim na desigualdade (10). Sendo assim, os escalares  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  podem ser tratados como variáveis do problema (sujeitos às restrições lineares (8) e (9)). A limitação do Teorema 2 é que os parâmetros  $\rho_i$  estão correlacionados com os parâmetros  $\alpha_i$  do Lema 1 na forma  $\rho_i = \sqrt{\alpha_i}$ . Essa propriedade decorre da estratégia proposta para linearizar a desigualdade (6), que apresenta uma série de bilinearidades. Portanto, uma solução factível do Teorema 2 não garante em princípio que a soma dos  $\alpha_i$  é maior ou igual a um e, conseqüentemente, que a regra de chaveamento é estabilizante. Esse ponto é endereçado mais adiante explorando de forma conveniente a desigualdade (9).

Outra limitação está em garantir a existência de uma solução factível dada a escolha das matrizes iniciais  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_3$ , contornada no próximo teorema.

**Teorema 3.** As escolhas

$$\mathcal{B}_1 = 0, \mathcal{B}_2 = I_{nN}, \mathcal{B}_3 = -I_{nN}$$

garantem que as condições do Teorema 2 sempre fornecem uma solução factível.

**Prova:** Adotando as escolhas propostas para  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$  e fixando  $\mathcal{X} = (-1/2)\mathcal{B}$  na desigualdade (10), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P & \star & \star \\ 0 & I_N \otimes (P - I_n) & \star \\ \Gamma & 0 & -I_{nN} \end{bmatrix} < 0$$

com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho_1 A_1 + B_1 \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \rho_N A_N + B_N \bar{K}_N \end{bmatrix}$$

com  $P = dI > 0$ ,  $\rho_i = 0$ ,  $\bar{K}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  tem-se

$$\begin{bmatrix} -dI_n & \star & \star \\ 0 & I_N \otimes (d-1)I_n & \star \\ 0 & 0 & -I_{nN} \end{bmatrix} < 0$$

sempre verificada para  $0 < d < 1$ . Finalmente, note que a desigualdade (9) pode ser satisfeita com qualquer valor não positivo de  $\mu$ .  $\square$

Uma propriedade útil associada ao Teorema 2, visando a busca de soluções com  $\mu \geq 1$ , é que caso o mesmo seja factível para um certo valor de  $\bar{\mu}$ , as matrizes soluções  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$  e  $\mathcal{X}_3$  podem ser utilizadas para inicializar as matrizes  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_3$  em um novo teste, garantindo que o novo valor de  $\mu$  pode ser maior ou igual a  $\bar{\mu}$ , como mostra o próximo teorema.

**Teorema 4.** Sejam  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\mathcal{X}}_1$ ,  $\bar{\mathcal{X}}_2$  e  $\bar{\mathcal{X}}_3$  soluções do Teorema 2, para uma dada matriz inicial  $\bar{\mathcal{B}}$ . As escolhas  $\mathcal{B}_1 = \bar{\mathcal{X}}_1'$ ,  $\mathcal{B}_2 = \bar{\mathcal{X}}_2'$  e  $\mathcal{B}_3 = \bar{\mathcal{X}}_3'$  em um novo teste das condições do Teorema 2 garantem uma solução factível com  $\mu \geq \bar{\mu}$ .

**Prova:** Como hipóteses, as desigualdades (9) e (10) estão satisfeitas com  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\mathcal{X}}$  para uma dada condição inicial  $\bar{\mathcal{B}}$ . Como  $\text{He}(\bar{\mathcal{X}}\bar{\mathcal{B}})$  é igual a  $\text{He}(\bar{\mathcal{B}}'\bar{\mathcal{X}}')$ , um novo teste do Teorema 2, com a condição inicial  $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{X}}'$  é garantidamente factível e o valor de  $\mu$  é maior ou igual a  $\bar{\mu}$ .  $\square$

O último elemento necessário para estabelecer o procedimento de estabilização proposto neste trabalho é a garantia da soma maior ou igual a um dos parâmetros  $\alpha_i$  para que as condições propostas no Teorema 2 atendam as restrições dadas em (6) e, conseqüentemente, o Lema 1. Como a relação entre  $\rho_i$  e  $\alpha_i$  não é linear, uma possibilidade é resolver as condições do Teorema 2 maximizando o valor de  $\mu$ . Com o resultado em mãos, verifica-se se a soma dos  $\alpha_i$  é maior ou igual a um. Se não for, o Teorema 2 é testado novamente com a garantia de que o novo valor de  $\mu$  não diminui. Esse procedimento é apresentado no Algoritmo 1, principal contribuição deste trabalho. A cada iteração o valor da soma dos  $\alpha_i$  é computado e o procedimento é terminado caso esse valor seja maior ou igual a um (teste aplicado na linha 5 do algoritmo). Os parâmetros  $it_{max}$  (número máximo de iterações) e  $\epsilon$  são fornecidos *a priori*, sendo esse último parâmetro utilizado para encerrar o procedimento caso a melhora de  $\mu$  seja marginal entre duas iterações consecutivas. É importante salientar que o procedimento não é globalmente convergente, pois os resultados dependem das condições iniciais  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_3$ .

---

**Algoritmo 1** Controle Chaveado

---

- 1: **Inicialização:**  $it_{max}$ ,  $\epsilon$ ,  $k \leftarrow 0$ ,  $\mathcal{B}_1 = 0$ ,  $\mathcal{B}_2 = I_N \otimes I_n$ ,  $\mathcal{B}_3 = I_N \otimes -I_n$
  - 2: **Enquanto**  $k < it_{max}$  **Faça**
  - 3:      $k \leftarrow k + 1$ ;
  - 4:     **maximize**  $\mu_k$  **s. a**  $P > 0$ , (7), (8), (9) e (10)
  - 5:     **Se**  $\sum_{i=1}^N \rho_i^2 \geq 1$  **Então**
  - 6:         **Retorna** ( $P$ ,  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ )
  - 7:     **Fim Se**
  - 8:     **Se**  $|\mu_k - \mu_{k-1}| < \epsilon$  **Então**
  - 9:         abandone;
  - 10:     **Fim Se**
  - 11:      $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{X}'$
  - 12: **Fim Enquanto**
- 

4. EXEMPLOS

A complexidade numérica do Teorema 2 é proporcional ao número de variáveis escalares  $V$  e linhas de LMIs  $L$ , dados por  $V = N + 2 + n^2(2N^2 + N) + mnN + (n^2 + n)/2$  e  $L = 2n(mN + N + 1) + N + 1$  (observe que  $L$  cresce linearmente com  $N$ ).

Nos exemplos apresentados a seguir, o Algoritmo 1 foi testado com  $it_{max} = 25$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ , implementado com o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004), e as LMIs resultantes foram solucionadas com o resolvidor de programação semidefinida Mosek (Andersen and Andersen, 2000). Os experimentos foram simulados em um PC com a seguinte configuração: Core i7-4770 (3.40 GHz), 7.7 GB de RAM, MATLAB Versão: 9.4.0.813654 (R2018a) 64 bits, Ubuntu 18.04.06 (64 bits).

**Exemplo 1:** Considere o sistema chaveado (1) proposto em Benallouch and Schutz (2012) com  $A_i$  e  $B_i$  dadas por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0,7786 & 0,9908 & 0,1270 \\ 0,1616 & 0,8443 & 0,8144 \\ 0,9214 & 0,9747 & 0,7825 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0,2458 & 0,7409 \\ 0,2501 & 0,5257 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0,3894 & 0,3263 & 0,7746 \\ 0,7806 & 0,9886 & 0,1297 \\ 0,8814 & 0,4718 & 0,3110 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0,2722 & 0,6055 \\ 0,1576 & 0,1580 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0,3049 & 0,4247 & 0,8979 \\ 0,8448 & 0,2485 & 0,6921 \\ 0,7558 & 0,9160 & 0,3636 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0,4945 & 0,3020 \\ 0,9237 & 0,9118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0,1194 & 0,3964 & 0,2454 \\ 0,1034 & 0,2515 & 0,4983 \\ 0,6981 & 0,8655 & 0,2403 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0,9894 & 0,7205 \\ 0,1709 & 0,1519 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inicialmente, o objetivo é projetar apenas uma regra de chaveamento ( $K_i = 0$ ) tal que o sistema chaveado seja globalmente assintoticamente estável e comparar os resultados com a técnica proposta no Teorema 4 de Geromel and Colaneri (2006) (GC-T4). Para realizar a comparação, a seguinte modificação na matriz dinâmica  $A_i = \varphi A_i$  foi realizada, de modo a provar a estabilidade do sistema para o maior valor do parâmetro  $\varphi \in [0,001, 10]$ , mediante uma busca por bissecção. A condição GC-T4 demanda um busca em um parâmetro escalar  $\gamma \in [0, 1)$ , implementada com a discretização da faixa em 25 pontos igualmente espaçados. Os resultados são reportados na Tabela 1 e observa-se que o Algoritmo 1 consegue obter um valor de  $\varphi$  superior ao encontrado por GC-T4 ( $\gamma = 0,24$ ) apesar de demandar maior esforço computacional.

Tabela 1. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e Teorema 4 (GC-T4), proposto em Geromel and Colaneri (2006), para o Exemplo 1. O número médio de iterações e o tempo médio por iteração são dados por  $it_{medio}$  e  $t_{medio}$  (s), respectivamente.

	$\varphi_{max}$	$it_{medio}$	$t_{medio}$ (s)
A1	0,74	3,33	0,12
GC-T4	0,51	2	0,01

A Figura 1 mostra as trajetórias do sistema e a regra de chaveamento  $\sigma$ , para a condição inicial  $x(0) = [2 \ 1 \ -3]'$  e  $\varphi_{max} = 0,74$ .

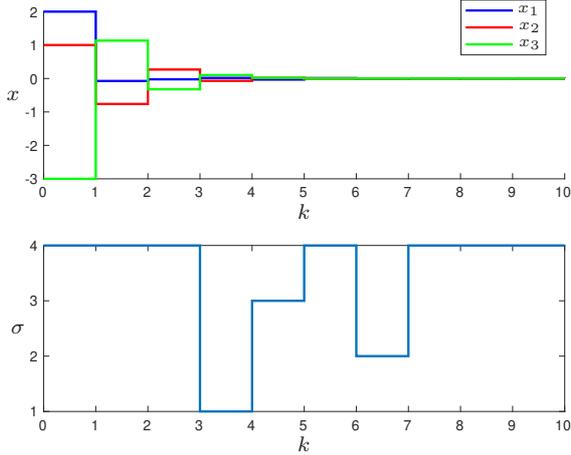


Figura 1. Trajetória dos estados e regra de chaveamento  $\sigma$  para  $\varphi_{max} = 0,74$ , Exemplo 1.

O próximo objetivo deste experimento é projetar, além da regra de chaveamento, um conjunto de ganhos de realimentação tais que o sistema chaveado em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável. Além disso, todas as entradas dos ganhos de realimentação são limitadas por  $\beta$ . Os resultados do Algoritmo 1 para  $\beta \in \{0,1; 1; 10\}$  são apresentados a seguir.

- $\beta = 0,1$  : infactível

- $\beta = 1$  :  $\mu = 2,4553$ ,  $P = \begin{bmatrix} 0,8572 & 0,8205 & 0,2060 \\ 0,8205 & 1,0160 & 0,2344 \\ 0,2060 & 0,2344 & 0,3600 \end{bmatrix}$ ,

$$K_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,0000 & -1,0000 & -1,0000 \\ -0,6816 & -1,0000 & -0,6610 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1,0000 & -1,0000 & -1,0000 \\ -1,0000 & -1,0000 & -0,9532 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1,0000 & -1,0000 & -1,0000 \\ 0,0427 & 0,4354 & -0,1671 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,4034 & 0,0027 & 0,0721 \\ -1,0000 & -1,0000 & -1,0000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- $\beta = 10$  :  $\mu = 3,1788$ ,  $P = \begin{bmatrix} 1,0327 & 0,8660 & 0,4159 \\ 0,8660 & 0,8674 & 0,3830 \\ 0,4159 & 0,3830 & 0,2234 \end{bmatrix}$ ,

$$K_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,6779 & -2,6719 & -9,9971 \\ -2,9006 & -0,7493 & 2,8933 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -10,0000 & -10,0000 & 0,1286 \\ 3,5730 & 3,6398 & -1,4412 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0,7848 & -2,6067 & -3,8599 \\ -0,3103 & 2,1517 & 3,0652 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7,0515 & 6,6289 & 6,7996 \\ -10,0000 & -10,0000 & -10,0000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Com relação ao esforço computacional demandado pelo Algoritmo 1, foram 360 variáveis escalares ( $V$ ), 83 linhas de LMIs ( $L$ ), uma iteração e 0,03 e 0,04 segundos por iteração para os casos  $\beta = 1$  e  $\beta = 10$ , respectivamente. O caso  $\beta = 0,1$  demandou 9 iterações e 0,04 segundos por iteração.

A Figura 2 mostra as trajetórias do sistema chaveado em malha-fechada para a condição inicial  $x(0) = [2 \ 1 \ -3]^T$ , para  $\beta = 10$ . O sinal de controle  $u$  e a regra de chaveamento  $\sigma$  são apresentados na Figura 3. Os resultados claramente mostram que o controle chaveado via realimentação de estados proposto pelo Teorema 2 provou ser eficaz. Como todos os subsistemas foram estabilizados pelos ganhos  $K_i$ , é provável que a regra de chaveamento permaneça em um dos modos após alguns instantes de tempo, como o observado na Figura 3.

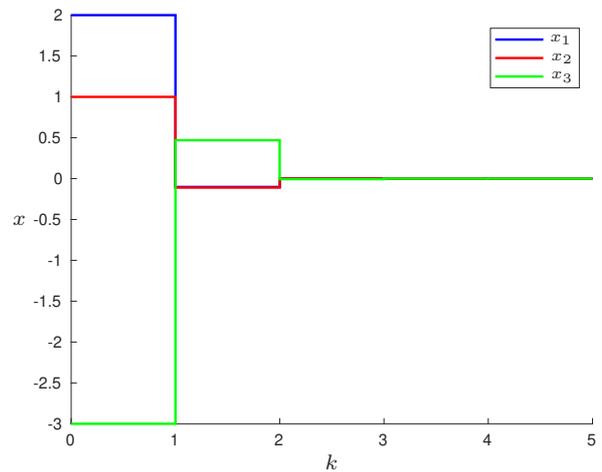


Figura 2. Trajetória dos estados para  $\beta = 10$ , Exemplo 1.

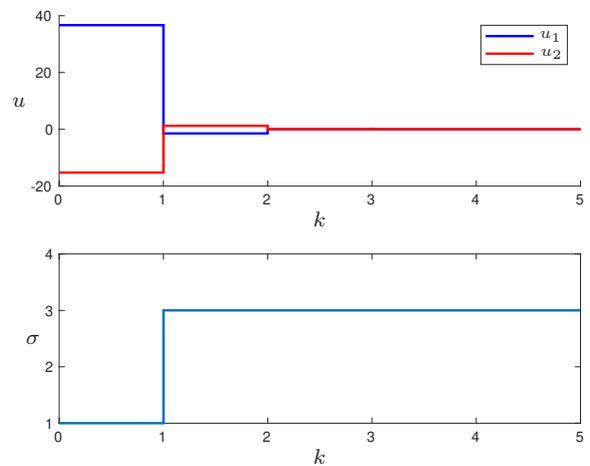


Figura 3. Sinal de controle  $u$  e regra de chaveamento  $\sigma$ , Exemplo 1.

Antes de finalizar este experimento, uma nova comparação é apresentada, porém com a técnica de controle via realimentação de estados proposta no Corolário 3.3 em Deaecto (2010) (D-C3.3). Novamente, é considerada a modificação  $B_i = \varphi B_i$ , e procura-se estabilizar o sistema para o menor valor do parâmetro  $\varphi \in [0,001, 10]$ . Assim, a factibilidade das condições é verificada com a diminuição do efeito da entrada de controle sobre o sistema. Em D-C3.3, também faz-se uma discretização da faixa  $[0, 1)$  para procurar pelo valor de  $\gamma$  que torna as condições factíveis (neste exemplo, foram considerados 25 pontos). Além disso, para

implementar a restrição de magnitude nos ganhos, as matrizes  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  foram restritas a matrizes diagonais, sendo  $s_{i_j}$  o  $j$ -ésimo elemento da diagonal, e as seguintes limitações dos ganhos foram implementadas

$$-s_{i_\ell} \beta \leq y_{i_j, \ell} \leq s_{i_\ell} \beta$$

em que  $y_{i_j, \ell}$  representa a  $j$ -ésima linha e  $\ell$ -ésima coluna das matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Note que os ganhos em Deaecto (2010) são dados por  $K_i = Y_i S_i^{-1}$ , e a estratégia utilizada é apenas suficiente.

Os resultados da Tabela 2 indicam que o Algoritmo 1 consegue obter valores inferiores de  $\varphi$  apesar do maior esforço computacional quando comparado com o D-C3.3 ( $\gamma = 0$ , para o caso  $\beta = 10$ ).

Tabela 2. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e Corolário 3.3 de Deaecto (2010) (D-C3.3), para o Exemplo 1. O número médio de iterações e o tempo médio por iteração são dados por  $it_{medio}$  e  $t_{medio}$  (s), respectivamente.

	$\beta$	$\varphi_{min}$	$it_{medio}$	$t_{medio}$ (s)
A1	0,1	1,67	5,38	0,24
D-C3.3		inatisfável		
A1	1	0,17	2,70	0,12
D-C3.3		inatisfável		
A1	10	0,02	1,91	0,08
D-C3.3		0,17	1	0,01

Como ilustração, o Algoritmo 1 obteve os seguintes resultados para  $\beta = 10$  e  $\varphi_{min} = 0,02$

- $\mu = 1,7091$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 0,3471 & 0,4078 & 0,2969 \\ 0,4078 & 0,5937 & 0,3983 \\ 0,2969 & 0,3983 & 0,3089 \end{bmatrix}, K_i = - \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$ . As trajetórias do sistema chaveado em malha-fechada para  $\beta = 10$ ,  $\varphi_{min} = 0,02$  e a condição inicial  $x(0) = [2 \ 1 \ -3]'$  são mostradas na Figura 4, assim como o sinal de controle  $u$  e a regra de chaveamento  $\sigma$  na Figura 5. Apesar das matrizes  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , serem ponderadas por um valor pequeno e os ganhos de controle serem limitados, as condições dadas pelo Teorema 2 se provaram eficazes para a estabilização via realimentação de estados.

**Exemplo 2:** Considere a estabilização simultânea de três pêndulos invertidos proposto em Al-Areqi et al. (2012), sendo o modelo linearizado de cada pêndulo invertido  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_i(t) \\ \dot{\phi}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(m_i + M_i)g}{M_i l_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i(t) \\ \dot{\phi}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ M_i l_i \end{bmatrix} F_i$$

em que  $\phi_i$  é o ângulo do pêndulo,  $F_i$  é a força que atua sobre o carrinho e  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  é a aceleração gravitacional. Cada pêndulo  $\mathcal{P}_i$  possui valor de massa  $m_i = 0,3 \text{ Kg}$  e o carrinho associado  $M_i = 0,1 \text{ Kg}$ , e os valores dos comprimentos para os pêndulos  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{P}_3$  são respectivamente  $l_{1/2/3} = 0,1336/0,242/0,545 \text{ m}$ , o que leva a diferentes frequências naturais  $\omega_{1/2/3} = 12/9/6 \text{ s}^{-1}$ . As matrizes do modelo discretizado com o tempo de amostragem  $\tau = 0,1$  segundo são dadas por

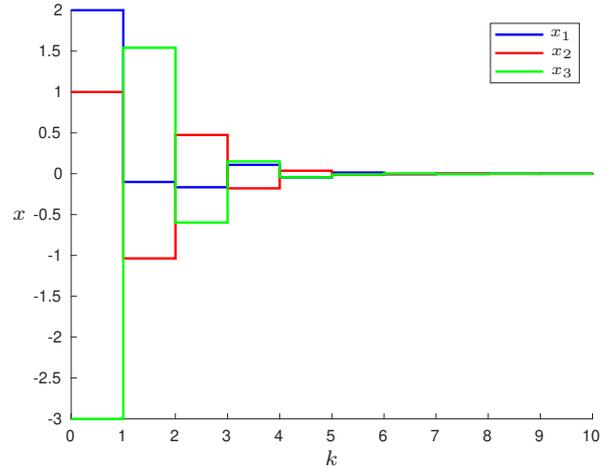


Figura 4. Trajetória dos estados para  $\beta = 10$  e  $\varphi_{min} = 0,02$ , Exemplo 1.

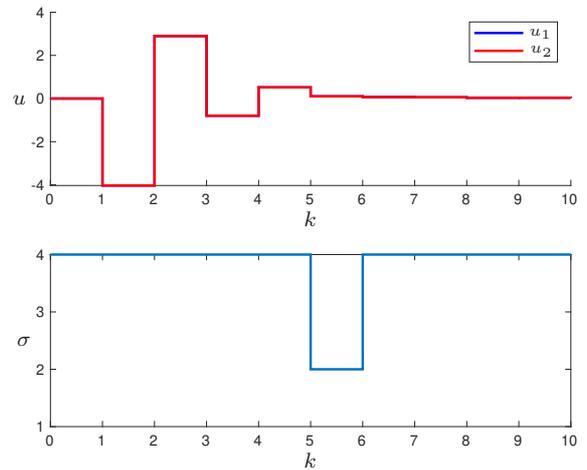


Figura 5. Sinal de controle  $u$  e regra de chaveamento  $\sigma$  para  $\beta = 10$  e  $\varphi_{min} = 0,02$ , Exemplo 1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,0268 & 0,1009 \\ 0,5384 & 1,0268 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0,7419 \\ -7,5500 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1,0479 & 0,1016 \\ 0,9647 & 1,0479 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0,4198 \\ -4,3300 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1,1088 & 0,1036 \\ 2,2156 & 1,1088 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -0,1901 \\ -2,0346 \end{bmatrix}$$

O objetivo é projetar simultaneamente os ganhos de realimentação  $K_i$  e uma regra de chaveamento  $\sigma$  que estabiliza o sistema em malha fechada sob as restrições dadas em (7) considerando  $\beta \in \{0,1; 1; 10\}$ . Os seguintes ganhos  $K_i$ , escalar  $\mu$  e matriz  $P$  foram obtidos a partir do Algoritmo 1:

- $\beta = 0,1$  : inatisfável;
- $\beta = 1$  :  $\mu = 1,8334$ ,  $P = \begin{bmatrix} 1,0133 & 0,0570 \\ 0,0570 & 0,1005 \end{bmatrix}$
- $K_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0,1022 & 0,1360 \\ 1,0000 & 0,2071 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,2751 & 0,2420 \end{bmatrix} \right\}$
- $\beta = 10$  :  $\mu = 1,8560$ ,  $P = \begin{bmatrix} 1,0093 & 0,0007 \\ 0,0007 & 0,0068 \end{bmatrix}$

$$K_i = \left\{ \begin{array}{l} [0,0964 \ 0,1361], [0,2652 \ 0,2424] \\ [1,1717 \ 0,5511] \end{array} \right\}$$

Em termos do esforço computacional, o Algoritmo 1 demandou  $V = 98$ ,  $L = 32$ , uma iteração e 0,01 segundo por iteração para os casos  $\beta = 1$  e  $\beta = 10$  (o caso  $\beta = 0,1$  demandou 10 iterações e 0,2 segundos por iteração).

As trajetórias do sistema em malha fechada considerando a condição inicial  $x(0) = [-2 \ 1]'$  e  $\beta = 10$ , e o sinal de controle  $u$  (a regra de chaveamento assumiu o valor  $\sigma(k) = 3$  para todo  $k$ ) são mostrados nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Os resultados mostram mais uma vez a eficiência da técnica.

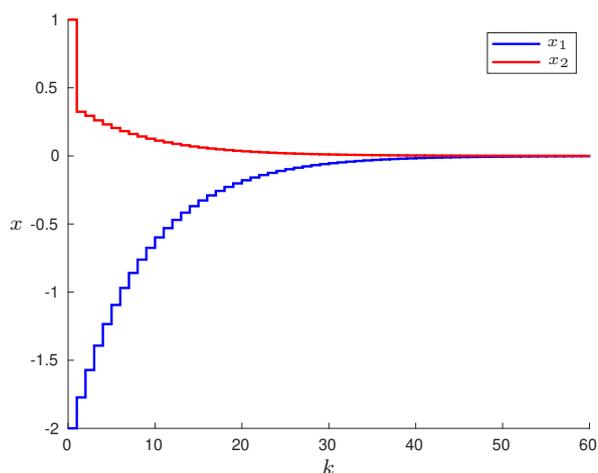


Figura 6. Trajetória dos estados para  $\beta = 10$ , Exemplo 2.

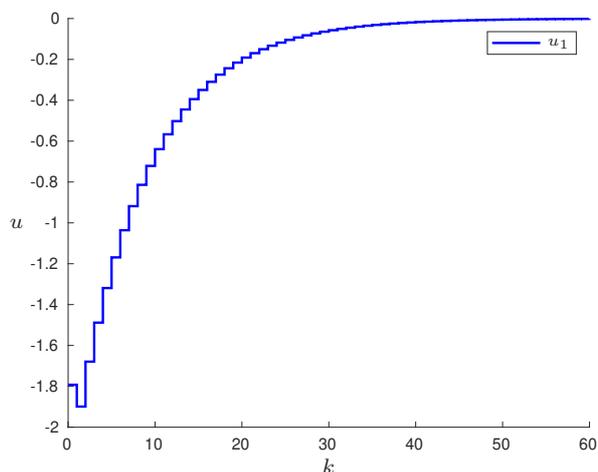


Figura 7. Sinal de controle para  $\beta = 10$ , Exemplo 2.

Em comparação com os métodos de Geromel and Colaneri (2006) e Deaecto (2010), os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 3 e 4, respectivamente, utilizando o mesmo esquema de comparação do Exemplo 1.

Os resultados das Tabelas 3 e 4 indicam que o Algoritmo 1 consegue obter resultados melhores de  $\varphi_{min}$  e  $\varphi_{max}$  quando comparados com os obtidos por GC-T4 e D-C3.3, ao preço de um maior esforço computacional.

Tabela 3. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e GC-T4, para o Exemplo 2.

	$\varphi_{max}$	$it_{medio}$	$t_{medio}$ (s)
A1	0,74	3	0,02
GC-T4	0,68	2	0,01

Tabela 4. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e D-C3.3, para o Exemplo 2.

	$\beta$	$\varphi_{min}$	$it_{medio}$	$t_{medio}$ (s)
A1	0,1	1,06	3,00	0,03
D-C3.3		3,17	1	0,01
A1	1	0,11	2,40	0,01
D-C3.3		0,32	1	0,01
A1	10	0,01	2,31	0,02
D-C3.3		0,03	1	0,01

## 5. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou novas condições de estabilização quadrática de sistemas chaveados a tempo discreto, baseadas em LMIs, em que a regra de chaveamento e os ganhos de realimentação são projetados simultaneamente. A síntese é realizada de forma iterativa e não requer a aplicação de procedimentos baseados em *grid*, que podem demandar alto esforço computacional para sistemas com grande número de regras. Exemplos numéricos ilustram o bom desempenho do método. Como perspectivas de trabalhos futuros têm-se o tratamento do tempo de permanência (do inglês, *dwel-time*) mínimo da regra de chaveamento nos subsistemas, assim como a extensão da técnica para lidar com estratégias de chaveamento menos conservadoras, como as baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler.

## REFERÊNCIAS

- Al-Areqi, S., Görges, D., and Liu, S. (2012). Robust feedback control and scheduling of networked embedded control systems. In *Proc. IFAC Conf. Anal. Design Hybrid Syst. (ADHS 12)*, 127–132. Eindhoven, The Netherlands.
- Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, 197–232. Springer US. <http://www.mosek.com>.
- Benallouch, M. and Schutz, G. (2012). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  model predictive control for discrete-time switched linear systems. *IFAC Proc. Vol.*, 45(17), 424–429. Proc. 4th IFAC Nonlinear Model Predictive Control Conf. (NMPC12).
- Cardim, R., Teixeira, M.C.M., Assunção, E., and Covacic, M.R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 56(9), 3505–3513.
- Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(11), 1883–1887.
- Deaecto, G.S. (2010). *Projeto de controladores dinâmicos com comutação*. Ph.D. thesis, FEEC — Universidade Estadual de Campinas.

- Deaecto, G.S. and Geromel, J.C. (2017). Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 62(8), 4058–4065.
- Deaecto, G.S., Souza, M., and Geromel, J.C. (2015). Discrete-time switched linear systems state feedback design with application to networked control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 60(3), 877–881.
- DeCarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S., and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proc. IEEE*, 88(7), 1069–1082.
- Donkers, M.C.F., Heemels, W.P.M.H., van de Wouw, N., and Hetel, L. (2011). Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(9), 2101–2115.
- Feron, E. (1996). Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback. Technical Report CICS-P-468, MIT, Cambridge, MA, USA.
- Fiacchini, M., Girard, A., and Jungers, M. (2016). On the stabilizability of discrete-time switched linear systems: Novel conditions and comparisons. *IEEE Trans. Autom. Control*, 61(5), 1181–1193.
- Geromel, J.C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of discrete time switched systems. *Int. J. Control*, 79(7), 719–728.
- Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (2002). Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 38(11), 1905–1917.
- Homaee, O., Zakariazadeh, A., and Jadid, S. (2014). Real-time voltage control algorithm with switched capacitors in smart distribution system in presence of renewable generations. *Int. J. Electrical Power Energy Syst.*, 54, 187–197.
- Hu, T., Ma, L., and Lin, Z. (2008). Stabilization of switched systems via composite quadratic functions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 53(11), 2571–2585.
- Ji, Z., Wang, L., and Xie, D. (2005). Quadratic stabilization of switched systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 36(7), 395–404.
- Kong, X., Majumdar, H., Zang, F., Jiang, S., Wu, Q., and Zhang, W. (2019). A multi-switching mode intelligent hybrid control of electro-hydraulic proportional systems. *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Eng. Sci.*, 233(1), 120–131.
- Lee, J.W. and Dullerud, G.E. (2006). Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, 42(2), 205–218.
- Liberzon, D. (1999). Stabilizing a linear system with finite-state hybrid output feedback. In *Proc. 17th Medit. Conf. Control Aut. (MED2009)*, 176–183. Thessaloniki, Greece.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA.
- Liberzon, D. and Morse, A.S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst. Mag.*, 19(5), 59–70.
- Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2005). Stability and persistent disturbance attenuation properties for a class of networked control systems: Switched system approach. *Int. J. Control*, 78(18), 1447–1458.
- Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54(2), 308–322.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 284–289. Taipei, Taiwan. <http://yalmip.github.io>.
- Morse, A.S. (1996). Supervisory control of families of linear set-point controllers — Part 1: Exact matching. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(10), 1413–1431.
- Narendra, K.S. and Balakrishnan, J. (1997). Adaptive control using multiple models. *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(2), 171–187.
- Pettersson, S. (2003). Synthesis of switched linear systems. In *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control*, 5283–5288. Maui, HI, USA.
- Skafidas, E., Evans, R.J., Savkin, A.V., and Petersen, I. (1999). Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 35(4), 553–564.
- Sun, Z. and Ge, S.S. (2005). *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer Verlag, London, UK.
- Wang, Z., Wang, Q., and Dong, C. (2015). Asynchronous  $\mathcal{H}_\infty$  control for unmanned aerial vehicles: Switched polytopic system approach. *IEEE/CAA J. Autom. Sin.*, 2(2), 207–216.
- Wicks, M.A. and DeCarlo, R.A. (1997). Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In *Proc. 1997 Amer. Control Conf.*, 1709–1713. Albuquerque, NM, USA.
- Wicks, M.A., Peleties, P., and DeCarlo, R.A. (1994). Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control*, 3492–3497. Lake Buena Vista, FL, USA.
- Williams, S.M. and Hoft, R.G. (1991). Adaptive frequency domain control of PWM switched power line conditioner. *IEEE Trans. Power Electron.*, 6(4), 665–670.
- Zhai, G. (2001). Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In *Proc. 40th IEEE Conf. Decision Control*, 2165–2166. Orlando, FL, 2001.
- Zhang, T., Zhang, W., and Gupta, M.M. (2018). An underactuated self-reconfigurable robot and the reconfiguration evolution. *Mech. Mach. Theory*, 124, 248–258.
- Zhang, W., Abate, A., Hu, J., and Vitus, M.P. (2009). Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems. *Automatica*, 45(11), 2526–2536.
- Zhang, W., Hu, J., and Abate, A. (2012). Infinite-horizon switched LQR problems in discrete time: A suboptimal algorithm with performance analysis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(7), 1815–1821.