

Amostragem Compressiva: Princípios Fundamentais e Aplicação com RMPI Adaptado

Hugo B. S. Araujo* Rubens M. B. da S. Lima**
Adna Kallery Santos da Silva*** Cleonilson P. de Souza****

* Universidade Federal da Paraíba, PB, (e-mail: hugo.araujo@cear.ufpb.br).

** Universidade Federal da Paraíba, PB (e-mail: rubens.lima@cear.ufpb.br)

*** Universidade Federal da Paraíba, PB (e-mail: adna.silva@cear.ufpb.br)

**** Universidade Federal da Paraíba, PB (e-mail: protasio@cear.ufpb.br)

Abstract: Compressed Sensing (CS) is a technique that takes advantage of signal sparsity in a given domain and allows sampling with sub-Nyquist sampling rates. A device that implements the CS model is the Analog-to-Information Converter (AIC), which obtains an output that is a digitized and compressed version of the input. This paper presents CS principles, analysis, and results obtained for a dual-tone sine signal applied to a version of a Random Modulation Pre-Integrator (RMPI) AIC.

Resumo: A Amostragem Compressiva é uma técnica que explora a esparsidade de sinais em um determinado domínio e permite que esses sinais seja amostrado com taxas de amostragem sub-Nyquist. Um dispositivo que implementa o conceito de amostragem compressiva é o Conversor Analógico para Informação (AIC) que amostra e comprime o sinal de entrada concomitantemente e, assim, uma versão digitalizada e comprimida do sinal de entrada é obtida. Neste artigo, os princípios fundamentais da Amostragem Compressiva são apresentados, assim como a análise e os resultados relacionados à aplicação da Amostragem Compressiva em um AIC baseado na arquitetura Pré-Integrador de Modulação Aleatória (RMPI) para um sinal senoidal de duplonton.

Keywords: Compressed Sensing; Analog-to-Information Converter; Sparsity.

Palavras-chave: Amostragem compressiva; Conversor Analógico para Informação; Esparsidade.

1. INTRODUÇÃO

A abordagem convencional de amostragem de sinais analógicos para digital segue o Teorema de Nyquist, em que a taxa de amostragem, normalmente conhecida como taxa de Nyquist, deve ser pelo menos duas vezes o valor da frequência máxima do sinal analógico (Shannon, 1948). Esse princípio constitui a base para diversas aplicações nos campos de áudio e imagem, tais como receptores de rádio, dispositivos médicos de imagem etc. (Candès and Wakin, 2008), e em diversos outros campos em que conversores analógico-para-digital (ADC) são utilizados.

Em termos práticos, as taxas de amostragem de conversores analógicos-digitais (ADC) são bem superiores à taxa de Nyquist a fim de otimizar a recuperação do sinal. Entretanto, com altas taxas de amostragem, a grande quantidade de amostras obtidas ocasiona diretamente a

necessidade de mais memória, de maior poder de processamento, e, conseqüentemente, aumenta-se o consumo de energia e o custo do sistema (Rapuano, 2016).

Uma técnica chamada Amostragem Compressiva (AC, do inglês *Compressed Sensing* ou *Compressed Sampling*) permite a aquisição de sinais sem a limitação de Nyquist. A principal ideia da amostragem compressiva é que é possível recuperar sinais de certas classes com uma taxa de amostragem menor que a taxa de Nyquist. Particularmente, a AC permite a reconstrução de sinais que são considerados esparsos ou podem ser comprimidos quando expressos em uma determinada base Ψ (Candès and Wakin, 2008). De acordo com a AC, sinais esparsos podem ser amostrados a uma taxa de amostragem sub-Nyquist sem perdas significantes de informação (Nouasria and Et-Tolba, 2018).

Um sinal pode ser considerado esparsos quando é possível caracterizá-lo em poucos coeficientes não-nulos após uma transformação entre domínios (Stanković et al., 2019). Um exemplo clássico de sinal esparsos é o sinal de eletrocardiograma (ECG), que no domínio do tempo a maior parte do sinal é zero (ou próximo de zero) e em uma pequena fração existem pulsos cardíacos. O sinal senoidal é outro

* O presente trabalho foi realizado com apoio do PRONEX/FAPESQ-PB/CNPq (Nº 009/2019), do Edital FAPESQ 09/21 DEMANDA UNIVERSAL, Termo Nº3055/2021, da Chamada nº 03/2020 Produtividade em Pesquisa PROPESQ/PRPG/UFPB código SIGAA PVK13136-220, do CNPq, termo Nº 309371/2019-8, e pelo PIBIC/PIBITI da UFPB.

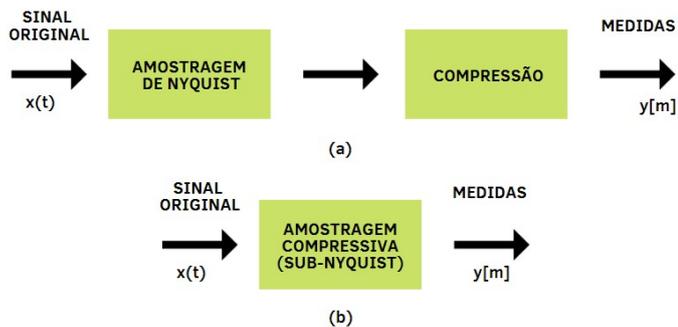


Figura 1. Uma comparação entre técnicas de amostragem: (a) amostragem tradicional, (b) amostragem compressiva.

exemplo clássico, que é esparso no domínio da frequência pois apresenta picos concentrados de energia.

Uma vantagem da amostragem compressiva é que, ao passo que realiza a amostragem do sinal analógico de entrada, um processo de compressão é realizado concomitantemente e, assim, é obtida como saída uma versão digitalizada e comprimida do sinal de entrada (Donoho, 2006; Rapuano, 2016; Silva, 2019). Cada saída digitalizada e comprimida é denominada de “medição”, e para a reconstrução do sinal analógico de entrada, as medições devem ser aplicadas em um algoritmo de reconstrução. A Figura 1 mostra a comparação entre os esquemas da amostragem tradicional e da amostragem compressiva.

Um dispositivo que implementa o conceito de amostragem compressiva é o Conversor Analógico para Informação (AIC, do inglês *Analog-to-Information Converter*).

O fenômeno da compressibilidade levanta várias questões naturais, tais como: Por que é necessário adquirir todas as amostras de um sinal se a maior parte será descartada? Será que é possível medir somente a parte que não será descartada? A amostragem compressiva lida com essas questões adquirindo somente uma quantidade mínima das amostras necessárias para representar a informação de interesse de um sinal (Donoho, 2006).

Neste artigo, os princípios fundamentais da amostragem compressiva são apresentados e são mostrados alguns resultados obtidos da aplicação de um sinal de duplo-ton em um AIC simulado no Simulink.

2. AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Sinais podem ser representados em diferentes domínios. Um sinal senoidal, por exemplo, pode ser representado por um único coeficiente no domínio da frequência, e também por várias amostras no domínio do tempo.

Considere um sinal discreto no tempo, $x \in R^N$, como visto na equação (1), em que $\Psi \in R^{N \times N}$ representa uma transformação linear e é chamada de matriz de transformação (ou matriz de esparsidade), e $s \in R^N$ é a representação esparsa do sinal x , ou seja, seus coeficientes não-nulos.

$$x = \Psi s \quad (1)$$

Se a base de transformação for genérica, tais como a de Fourier ou Wavelet, então apenas alguns elementos ativos em s são necessários para a reconstrução do sinal x , reduzindo os dados necessários para armazenar ou transmitir o sinal (Brunton and Kutz, 2017).

Se o sinal x tem esparsidade K em Ψ , isto é, possui K coeficientes não nulos, então ao invés de medir o sinal x diretamente, é possível coletar uma quantidade bem menor de amostras no domínio esparso. Por sua vez, é possível obter um vetor de medidas $y \in R^M$, com $K < M \ll N$ por meio da equação (2), em que $\Phi \in R^{M \times N}$ é chamada de matriz de medidas e é associada a um conjunto de medidas lineares referentes a x .

$$y = \Phi x \quad (2)$$

A escolha da matriz de medidas é extremamente importante para garantir que a recuperação do sinal x seja feita corretamente. A matriz de medidas Φ deve permitir a reconstrução do sinal x de tamanho N a partir do vetor de medidas y com $M < N$ (Foucart and Rauhut, 2013). A matriz de medidas também deve obedecer à algumas condições para que seja possível reconstruir o sinal após a amostragem compressiva, e o principal critério a ser obedecido é a incoerência entre as matrizes Φ e Ψ .

Coerência (ou baixa incoerência) pode ser definida como a máxima correlação entre quaisquer dois elementos de Φ e Ψ , ou seja, o maior valor dos produtos internos de dois elementos das matrizes Φ e Ψ , como mostrada em (3).

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max\{\Phi^T \Psi\} \quad (3)$$

Se Ψ for uma matriz de transformação e possuir baixa coerência com Φ , então a informação contida em x será uniformemente espalhada por todos os coeficientes do vetor de medidas y , assim cada coeficiente terá parte da informação global do sinal. Dessa forma, é possível reconstruir a informação completa do sinal x amostrando-se somente $M < N$ coeficientes (Medeiros et al., 2010).

O objetivo da amostragem compressiva é encontrar o vetor s mais esparso possível correspondente às medidas y . A equação (2) pode ser reescrita como dada em (4), onde $\Theta = \Phi \Psi$.

$$y = \Phi \Psi s = \Theta s \quad (4)$$

O sistema de equações em (4) é indeterminado e possui infinitas soluções s . A solução s mais esparsa que satisfaz (4) é encontrada pela minimização da norma l_0 , como mostrada em (5).

$$\min_{s \in R^N} \|s\|_0 \text{ sujeito a } \Theta s = y \quad (5)$$

Embora a solução encontrada pela norma l_0 seja a mais esparsa, a otimização feita em (5) é do tipo NP-completo, e no geral, a solução só pode ser encontrada por meio de uma busca combinatória $\binom{N}{K}$. Todos os vetores possíveis K -esparsos em R^N devem ser verificados, e se o valor da esparsidade K não for conhecido a busca é ainda mais extensiva, o que a invalida como a melhor solução para

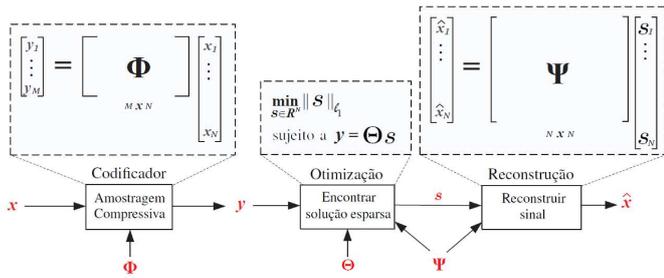


Figura 2. Estrutura da amostragem compressiva. Adaptado de (Abari et al., 2012).

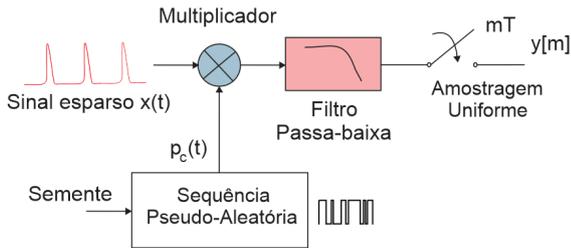


Figura 3. Diagrama de blocos do Demodulador Aleatório com filtro passa-baixas.

este problema tendo em vista o alto custo computacional necessário para encontrar a solução desejada, mesmo para valores pequenos de N (Brunton and Kutz, 2017; Tropp and Gilbert, 2007).

Em função disso, a recuperação do sinal pode ser feita através da minimização pela norma l_1 , que apresenta uma solução esparsa o suficiente que satisfaz (5), como mostra (6).

$$\min_{s \in R^N} \|s\|_1 \text{ sujeito a } \Theta s = y \quad (6)$$

De forma prática, a solução para (6) pode ser encontrada usando a ferramenta de otimização convexa CVX na plataforma MATLAB (Grant and Boyd, 2014). O resultado do algoritmo de reconstrução é uma estimativa da representação esparsa de x , isto é, s . A estimativa de x , ou \hat{x} , pode ser obtida utilizando a inversa da matriz de transformação Ψ de forma similar a equação (1). Na Figura 2 é apresentada a estrutura completa da amostragem compressiva.

3. ARQUITETURAS DO AIC

O principal requisito para a reconstrução adequada da amostragem compressiva é que as medidas sejam obtidas aleatoriamente. Para atender à este requisito, diferentes técnicas de aquisição foram propostas na literatura, e duas arquiteturas serão comentadas nesta seção.

3.1 Demodulador Aleatório

O Demodulador Aleatório (RD, do inglês *Random Demodulator*) foi proposto em Laska et al. (2007), consiste de um multiplicador e um integrador, e a saída passa por um ADC sub-Nyquist, como mostra a Figura 3.

O sinal de entrada $x(t)$ contínuo no tempo é multiplicado por uma sequência pseudo-aleatória de $+1$ e -1 ,

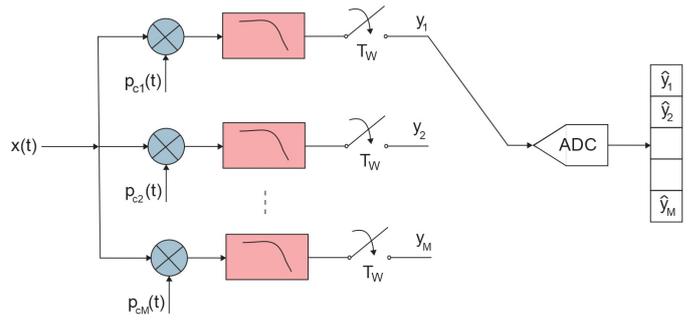


Figura 4. Diagrama de blocos do RMPI.

chamada de sequência de *chipping*, que pode ser gerada por um registrador de deslocamento com realimentação linear (LFSR, do inglês *Linear Feedback Shift Register*). Esse processo é equivalente à convolução no domínio da frequência e o resultado é o espalhamento da frequência do sinal que serve como uma assinatura única do sinal. O sinal resultante passa por um integrador atuando como um filtro passa-baixas, que é utilizado para obter a assinatura única de frequência do sinal em regiões de baixas frequências, e em seguida, o sinal resultante é amostrado por um ADC com baixa taxa de amostragem. Após a retirada de cada amostra, o integrador é reiniciado (Laska et al., 2007; Massoud et al., 2011; Kirolos et al., 2006; Ragheb et al., 2008; Tropp et al., 2009).

3.2 Pré-Integrador de Modulação Aleatória

O Pré-Integrador de Modulação Aleatória (RMPI, do inglês *Random Modulator Pre-Integration*) foi proposto em Yoo et al. (2012) e consiste em uma versão com vários canais RD em paralelos, como mostra a Figura 4. Cada canal contém um multiplicador e um integrador, e ao final de um período T_w , a saída y_i será a medida deste canal, sendo i o indicador do canal.

No RMPI, o sinal $x(t)$ é processado independentemente por M canais para calcular ao mesmo tempo os M produtos internos, que depois são integrados em cada canal. Os y_j resultantes podem ser digitalizados por um ADC sub-Nyquist compartilhado, cuja taxa de amostragem é M/T_w conversões por unidade de tempo, o que é muito menor do que a taxa de Nyquist $1/T_w = N/T_w$, em que N são as amostras requeridas obedecendo ao critério de Nyquist e $M < N$ (Pareschi et al., 2015; Silva, 2019).

Definindo a matriz de medidas $\Phi \in R^{M \times N}$, cujas M linhas são as sequências pseudo-aleatórias de cada canal, pode-se representar o vetor de medidas y por $y = \Phi x$, como descrito em 2, com j variando de 1 a M (Pareschi et al., 2015).

4. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Para verificar a amostragem compressiva, foi simulado no Simulink um AIC de 1 canal, como mostrado a Figura 5, e é constituído de: bloco gerador de sequências pseudo-aleatórias (LFSR), bloco condicionador de sinal, multiplicador, bloco integrador com reset, e ADC acionado por gatilho. O sinal simulado foi um sinal de dois tons composto por duas senoides de frequências 20 Hz e 35 Hz, respectivamente, e ambas com amplitude 1 e fase 0.

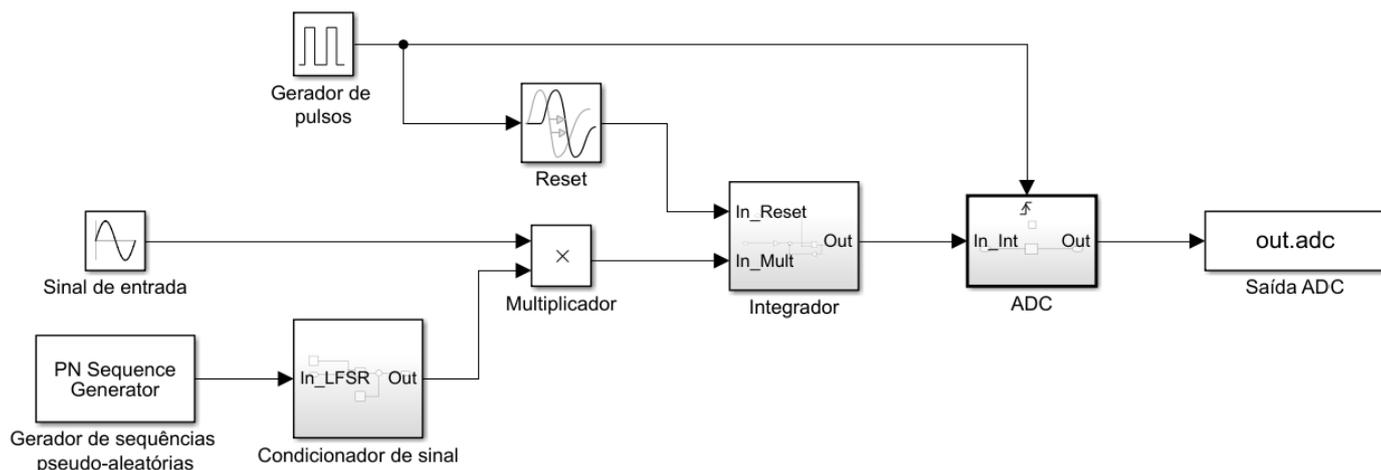


Figura 5. Diagrama de blocos do AIC no Simulink.

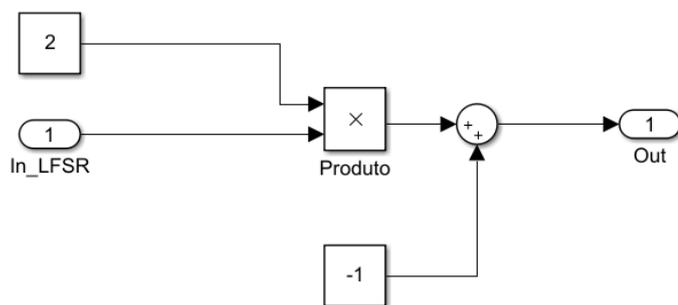


Figura 6. Bloco Condicionador de sinal no Simulink.

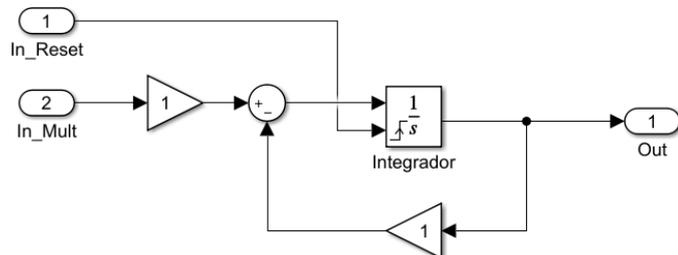


Figura 7. Bloco Integrador no Simulink.

O bloco Gerador de seqüências pseudo-aleatórias simula um LFSR de Fibonacci, com frequência de *clock* de 256 Hz. No bloco Condicionador de sinal, apresentado na Figura 6, o sinal do LFSR, que é gerado com valores lógicos 0 e 1, entra em um bloco Produto com duas entradas e é multiplicado por um sinal constante 2. O sinal resultante passa por um bloco de soma onde -1 é somado ao sinal, gerando valores escalares de -1 e $+1$, respectivamente.

Após passar pelo bloco condicionador de sinal, o sinal do LFSR e o sinal de entrada são multiplicados por um bloco Produto, e o resultado é enviado ao bloco integrador. O bloco integrador tem duas entradas: a saída do multiplicador e o sinal de *reset*. A configuração mostrada na Figura 7 possui um integrador ideal, um bloco somador e dois blocos de ganho. Os blocos de ganho são utilizados para aproximar o sinal do integrador ideal com o de um filtro real.

O bloco Gerador de pulsos gera um sinal que serve de gatilho para o ADC retirar uma medida. O mesmo pulso

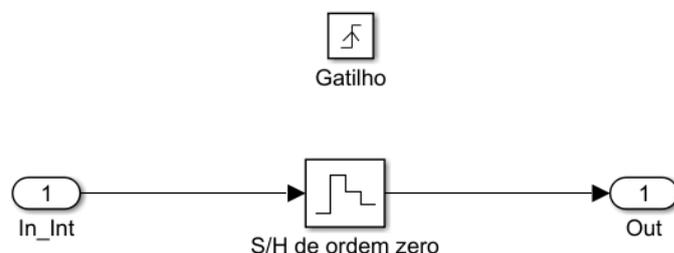


Figura 8. Bloco ADC no Simulink.

passa por um bloco *delay* que atrasa o sinal 0,05s para reiniciar o integrador. Em outras palavras, ao final de cada ciclo, o ADC é ativado por um gatilho e retira uma medida, e logo em seguida o integrador é zerado.

O bloco ADC mostrado na Figura 8 é um ADC de amostragem e retenção (S/H, do inglês *Sample-and-Hold*) de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero-Order Hold*), ativado por um gatilho do tipo borda de subida (*rising*). O resultado é então passado para o *Workspace* por meio do bloco Saída ADC (out.adc), e com esse resultado é possível fazer a reconstrução do sinal medido no MATLAB.

O AIC simulado no Simulink consiste de um RD atuando como um RMPI. A simulação possui 20 ciclos, com cada ciclo durando 1s, e ao final de cada ciclo uma medida é obtida. Assim, a matriz de medidas Φ gerada possui dimensões $M(20) \times N(256)$, onde cada seqüência do LFSR em 1s corresponde a uma linha da matriz de medidas, o que representa o comportamento dos canais paralelos de um RMPI. A matriz de transformação foi construída a partir da Transformada discreta de Fourier (DFT), e possui tamanho $N(256) \times N(256)$. A matriz Θ é calculada por $\Theta = \Phi\Psi$, como mostrado em (4), e possui dimensões $M(20) \times N(256)$.

O sinal reconstruído está no domínio esparso, então a transformada inversa de Fourier foi utilizada para retornar o sinal para o domínio não esparso. Na Figura 9 são mostrados os sinais original e reconstruído no domínio da frequência, respectivamente.

Observa-se que o sinal reconstruído possui componentes de frequências bem próximas do sinal original, apresentando um pico de energia em 18,9258 Hz, um pico em 34,8633 Hz,

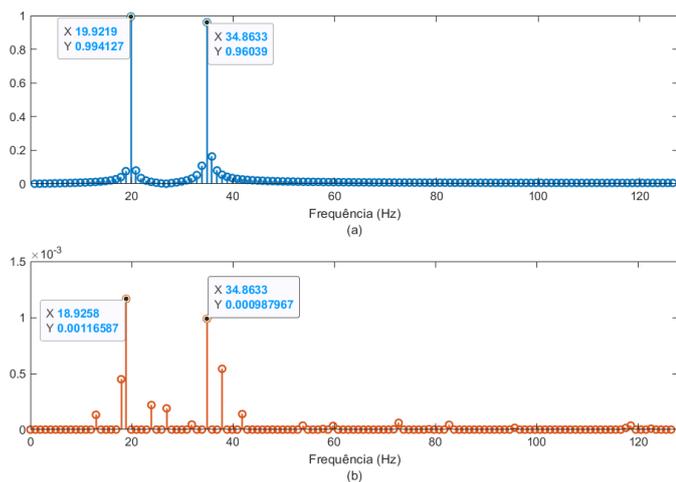


Figura 9. Sinal original (a) e sinal reconstruído (b) no domínio da frequência.

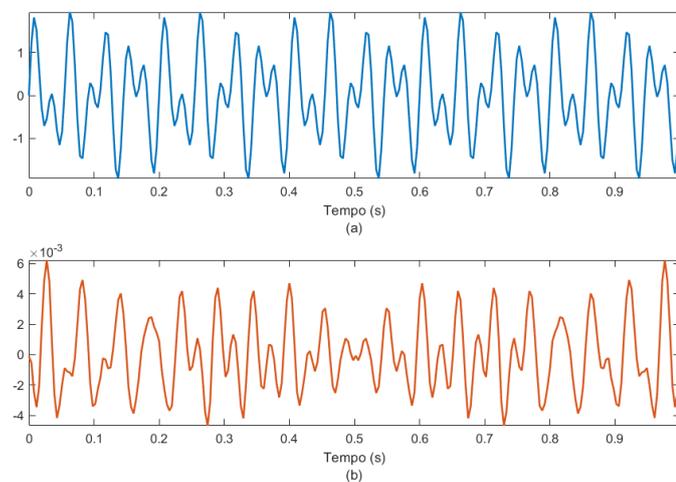


Figura 10. Sinal original (a) e sinal reconstruído (b) no domínio do tempo.

e outras componentes menores nas proximidades dos picos centrais. Observa-se também que as amplitudes dos picos do sinal reconstruído são menores que as do sinal original. Na Figura 10, nota-se a diferença dos sinais original e reconstruído no domínio do tempo, respectivamente. O sinal reconstruído apresenta uma forma similar a do sinal original, porém as componentes próximas aos maiores picos do sinal esparsos influenciam na sua representação. A amplitude, assim como no domínio da frequência, também é menor que a do sinal original.

Um ajuste simples feito adotado foi a definição de um limiar de esparsidade para o sinal reconstruído, pois para o sinal simulado sabe-se que a esparsidade $K = 2$, tendo em vista que a representação do sinal no domínio da frequência possui dois picos de energia. Fazendo esse ajuste, o sinal reconstruído no domínio do tempo e da frequência, respectivamente, pode ser visto na Figura 11. Dessa forma, embora o sinal reconstruído ainda apresente amplitudes menores que os sinal original, os picos de frequência indesejados são desconsiderados e apenas as duas maiores componentes de frequência são conservadas, e o erro quadrático médio (MSE) calculado entre o sinal original e o sinal reconstruído foi de 0,6340.

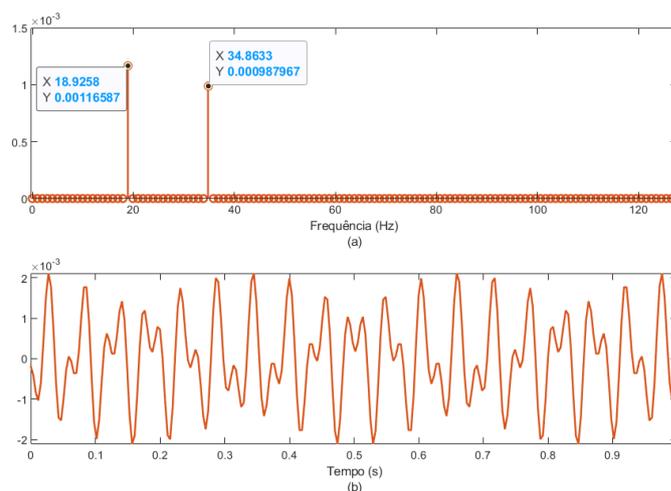


Figura 11. Sinal reconstruído ajustado no domínio do tempo (a) e no domínio da frequência (b).

5. CONCLUSÃO

Neste artigo foram apresentados os princípios fundamentais da amostragem compressiva, assim como algumas arquiteturas de conversores analógicos para informação. Foi implementado em software um AIC baseado na arquitetura RD atuando como um RMPI, e mostrou-se, por simulação, que um sinal de dois tons foi reconstruído com resultados aproximados, com uma quantidade de amostras bem menor do que o indica o Teorema de Nyquist.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte dado pela Prof^a Veronica Maria Lima Silva, do Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Abari, O., Chen, F., Lim, F., and Stojanovic, V. (2012). Performance trade-offs and design limitations of analog-to-information converter front-ends. In *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 5309–5312. IEEE.
- Brunton, S.L. and Kutz, J.N. (2017). *Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control*. Cambridge University Press.
- Candès, E.J. and Wakin, M.B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2), 21–30.
- Donoho, D.L. (2006). Compressed sensing. *IEEE Transactions on information theory*, 52(4), 1289–1306.
- Foucart, S. and Rauhut, H. (2013). *A mathematical introduction to compressive sensing*. Springer.
- Grant, M. and Boyd, S. (2014). CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. <http://cvxr.com/cvx>.
- Kirolos, S., Laska, J., Wakin, M., Duarte, M., Baron, D., Ragheb, T., Massoud, Y., and Baraniuk, R. (2006). Analog-to-information conversion via random demodulation. In *2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software*, 71–74. IEEE.

- Laska, J.N., Kirolos, S., Duarte, M.F., Ragheb, T.S., Baraniuk, R.G., and Massoud, Y. (2007). Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation. In *2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1959–1962. IEEE.
- Massoud, Y., Smaili, S., and Singal, V. (2011). Efficient realization of random demodulator-based analog to information converters. In *2011 IEEE Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS)*, 133–136. IEEE.
- Medeiros, R.J.V.d. et al. (2010). Investigação sobre aplicação de amostragem compassiva a sinais de áudio.
- Nouasria, H. and Et-Tolba, M. (2018). New sensing approach for compressive sensing using sparsity domain. In *2018 19th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON)*, 20–24. doi:10.1109/MELCON.2018.8379061.
- Pareschi, F., Albertini, P., Frattini, G., Mangia, M., Rovatti, R., and Setti, G. (2015). Hardware-algorithms co-design and implementation of an analog-to-information converter for biosignals based on compressed sensing. *IEEE transactions on biomedical circuits and systems*, 10(1), 149–162.
- Ragheb, T., Laska, J.N., Nejati, H., Kirolos, S., Baraniuk, R.G., and Massoud, Y. (2008). A prototype hardware for random demodulation based compressive analog-to-digital conversion. In *2008 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 37–40. IEEE.
- Rapupano, S. (2016). Analog-to-information converters: research trends and open problems. In *2016 26th International Conference Radioelektronika (RADIOELEKTRONIKA)*, 10–17. IEEE.
- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3), 379–423.
- Silva, V.M.L. (2019). Métodos de testes de conversores analógico para informação baseados no padrão IEEE 1241.
- Stanković, L., Sejdić, E., Stanković, S., Daković, M., and Orović, I. (2019). A tutorial on sparse signal reconstruction and its applications in signal processing. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 38(3), 1206–1263.
- Tropp, J.A. and Gilbert, A.C. (2007). Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on information theory*, 53(12), 4655–4666.
- Tropp, J.A., Laska, J.N., Duarte, M.F., Romberg, J.K., and Baraniuk, R.G. (2009). Beyond nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals. *IEEE transactions on information theory*, 56(1), 520–544.
- Yoo, J., Becker, S., Monge, M., Loh, M., Candes, E., and Emami-Neyestanak, A. (2012). Design and implementation of a fully integrated compressed-sensing signal acquisition system. In *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 5325–5328. IEEE.