

# Projeto de Filtro de Kalman *Fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar a Partir de Dados Experimentais

Daiana Caroline dos Santos Gomes\*  
Ginalber Luiz de Oliveira Serra\*\*

\* Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966,  
Bacanga, São Luís, Maranhão (e-mail: daianagomes159@gmail.com).

\*\* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão,  
Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, Maranhão, (e-mail:  
ginalber@ifma.edu.br)

---

**Abstract:** This paper presents a computational approach for interval type-2 fuzzy evolving Kalman filters desingnig from experimental data. First, an initial parametric estimation of interval type-2 evolving fuzzy Kalman filter model is obtained considering an initial window of the experimental data. From this initial estimation, the parameters defined in the antecedent and consequent propositions of interval type-2 evolving fuzzy Kalman filter are updated recursively from each new sample of the dataset through a type-2 fuzzy version of evolving Takagi-Sugeno (eTS) clustering algorithm and a type-2 fuzzy version of Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm, respectively. Computational results and comparative analysis demonstrate the efficiency and applicability of the proposed methodology when applied to Mackey–Glass chaotic time series modeling.

**Resumo:** Este artigo apresenta uma abordagem computacional para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* evolutivos tipo-2 intervalares a partir de dados experimentais. Primeiramente, uma estimação paramétrica inicial *offline* do modelo do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar é obtida considerando uma janela inicial dos dados experimentais. A partir desta estimação inicial, os parâmetros definidos nas proposições do antecedente e consequente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar são atualizados recursivamente a cada nova amostra do conjunto de dados através de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento *evolving Takagi-Sugeno* (eTS) e de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), respectivamente. Resultados computacionais e análise comparativa demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta quando aplicada a modelagem da série temporal caótica de Mackey–Glass.

**Keywords:** Systems identification; Kalman filtering; Recursive parametric estimation; Interval type-2 evolving fuzzy model; Evolving fuzzy systems.

**Palavras-chaves:** Identificação de Sistemas; Filtragem de Kalman; Estimação Paramétrica Recursiva; Modelo *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar; Sistemas *fuzzy* evolutivos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O aumento da complexidade das aplicações do mundo real tem motivado o estudo de técnicas de inteligência computacional tais como redes neurais artificiais (Feng et al., 2022), lógica *fuzzy* (Orouskhani et al., 2021), computação evolucionária (He et al., 2021; Guirguis et al., 2020), entre outras, para o desenvolvimento de ferramentas úteis para solução de problemas práticos (Lin et al., 2021). Recentemente, a combinação de diferentes sistemas inteligentes com abordagens computacionais tradicionais têm sido propostas em diferentes campos de pesquisa de modo a desenvolver ferramentas mais eficientes (Dziwinski and Bartczuk, 2020; Wang et al., 2021). No contexto de modelagem computacional de dados experimentais, os sistemas *fuzzy* têm atraído considerável atenção dos pesquisadores devido sua estrutura interpretável baseada em regras, a

qual proporciona a aproximação de funções não-lineares e o tratamento de incertezas (Serra, 2012; Shirzadeh et al., 2021).

Os sistemas *fuzzy* tipo-2, mais explorados pela comunidade científica nos últimos anos, também vêm se destacando pelo desempenho apresentado em aplicações complexas envolvendo a modelagem de dados experimentais devido sua melhor capacidade de processar informações incertas (Mendel, 2019). Embora sejam bastante significativos os avanços percebidos na modelagem *fuzzy* tipo-2 de dados experimentais, ainda existem muitos desafios a serem superados. Uma das grandes preocupações abordadas em pesquisas atuais está relacionada às alterações de dinâmicas difíceis de serem modeladas em dados experimentais, dificultando a obtenção de modelos eficientes (Evangelista and Serra, 2020). Neste contexto, metodologias para o

projeto e implementação de sistemas *fuzzy* evolutivos vêm sendo discutidas e aplicadas com a finalidade de adaptar a estrutura do modelo *fuzzy* à dinâmica incerta dos dados experimentais (Ahwiadi and Wang, 2022).

Diferentemente das abordagens já propostas na literatura, este artigo propõe uma metodologia para modelagem e previsão de dados experimentais combinando sistemas *fuzzy* evolutivos tipo-2 e filtragem de Kalman. O filtro de Kalman é uma ferramenta matemática largamente utilizada no processamento de dados desde que foi proposto em 1960 (Kalman, 1960). No projeto do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar será realizada uma estimação inicial do modelo *fuzzy* evolutivo a fim de melhorar seu desempenho durante sua atualização recursiva e, assim, contribuir para a eficiência da abordagem proposta. As principais contribuições deste artigo que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- Formulação de uma metodologia para modelagem *fuzzy* evolutiva de dados experimentais considerando uma estimação inicial para o modelo *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar implementado na filtragem de Kalman.
- Formulação de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento *evolving Takagi-Sugeno* para o particionamento dos dados experimentais em regiões de operação intervalares e atualização da estrutura da proposição antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar.
- Formulação de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* considerando dados experimentais para atualização dos parâmetros da proposição consequente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar.

## 2. METODOLOGIA PROPOSTA

Nesta seção, será apresentada a metodologia para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar proposto a partir de dados experimentais, contemplando suas etapas de estimação paramétrica inicial *offline* e de atualização recursiva (*online*).

### 2.1 Modelo *fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar para Filtragem de Kalman

O modelo *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar adotado para implementação do filtro de Kalman proposto apresenta a  $i^{\text{a}}$  ( $i=1,2,\dots,c$ )-ésima regra *fuzzy* dada pela seguinte expressão:

$$R^{(i)} : \text{SE } \mathbf{Z}_k \text{ É } \tilde{W}^i$$

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1)$$

com  $n$ -ésima ordem,  $m$  entradas,  $p$  saídas e  $c$  regras *fuzzy*, onde  $\mathbf{Z}_k$  é a variável linguística do antecedente;  $\tilde{W}^i$  é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar,  $\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados estimados intervalar;  $\tilde{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas estimadas intervalar e  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de entrada. As matrizes  $\tilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_k^i \in$

$\mathbb{R}^{p \times m}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  são, respectivamente, de estados, entrada, saída, transmissão direta e ganho de Kalman, as quais são parâmetros que definem o  $i$ -submodelo *fuzzy* no espaço de estados. O erro residual  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i$  para a  $i$ -ésima regra é definido como  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = \mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k^i$ , onde  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  corresponde ao conjunto de dados experimentais real e  $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$  é a saída intervalar estimada pelo  $i$ -ésimo submodelo linear.

O filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar aproxima o comportamento dinâmico dos dados experimentais por meio da soma ponderada de filtros de Kalman definidos na proposição do consequente das regras *fuzzy*, a cada instante de tempo  $k$ , de acordo com os graus de ativação intervalares  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ , como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \quad (3)$$

onde  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = \left[ \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right]$  representa o grau de pertinência da amostra  $\mathbf{Z}_k$  no  $i$ -ésimo conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{W}^i$ , tal que  $\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  e  $\overline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  correspondem, respectivamente, aos graus de ativação superior e inferior da  $i$ -ésima regra, tal que:

$$\sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = [1, 1], \quad \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) > [0, 0] \quad (4)$$

onde  $c$  é o número de regras *fuzzy*.

### 2.2 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman *Fuzzy* Evolutivo Tipo-2 Intervalar

Nesta seção, serão apresentadas as formulações para a estimação paramétrica das proposições do antecedente e consequente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar em função da dinâmica descrita pelos dados experimentais.

*Estimação Paramétrica do Antecedente* Para a estimação inicial da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, foi utilizada uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, a qual é descrita como segue.

**Repetir** para  $l = 1, 2, \dots$

**Passo 1** - Cálculo dos centros dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$ :

$$\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right)^{i(l-1)} \tilde{\mathbf{m}}^i \mathbf{Z}_k}{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right)^{i(l-1)} \tilde{\mathbf{m}}^i}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (5)$$

onde  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i$  é o grau de pertinência intervalar da amostra  $\mathbf{Z}_k$  no  $i$ -ésimo conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar.

**Passo 2** - Cálculo da matriz de covariância  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  dos agrupamentos:

$$\tilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}} \left( \mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)} \right) \left( \mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)} \right)^T}{\sum_{k=1}^N \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{(l-1)} \right)^{\tilde{m}}}, \quad (6)$$

$1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N_b$

**Passo 3** - Cálculo das distâncias  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i$ :

$$\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i = \sqrt{(\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T \left[ \det(\tilde{\mathbf{F}}^i)^{1/n} (\tilde{\mathbf{F}}^i)^{-1} \right] (\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})} \quad (7)$$

onde  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  é a matriz de covariância calculada no Passo 2.

**Passo 4** - Atualização da matriz de partição  $\tilde{\mathbf{U}}^{(l)}$ :

Se  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i > 0$  para  $1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq N_b$

$$\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \left[ \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right] \quad (8)$$

onde

$$\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \min \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{D_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i}{D_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(m-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{\bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i}{\bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(\bar{m}-1)}} \right], \quad (9)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \max \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{D_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i}{D_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(m-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{\bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i}{\bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(\bar{m}-1)}} \right] \quad (10)$$

Senão

$$\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = [0, 0] \text{ com } \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1] \text{ e } \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1]$$

Até  $\| \tilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(l-1)} \| < \varepsilon$

Após a inicialização dos parâmetros da proposição do antecedente, a partição do universo de discurso da variável linguística  $\mathbf{Z}_k$  será atualizada recursivamente através do algoritmo *evolving Takagi-Sugeno* (eTS) *fuzzy* tipo-2 intervalar, a fim de adaptar a estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* proposto à dinâmica descrita pelo dados experimentais. A versão *fuzzy* tipo-2 desenvolvida para o algoritmo eTS está baseada na densidade  $D_k(z_k^j)$  da amostra  $\mathbf{z}_k$  do conjunto de dados experimentais, para a  $j$ -ésima dimensão, a qual é calculada recursivamente por (Agelov et al., 2010):

$$D_k(z_k^j) = \frac{k-1}{(k-1)(\delta_k+1) + \sigma_k - 2\rho_k} \quad (11)$$

onde  $\delta_k = \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j)^2$ ;  $\sigma_k = \sigma_{k-1} + \sum_{j=1}^{o+1} (z_{k-1}^j)^2$ ;  $\rho_k = \sum_{j=1}^{o+1} z_k^j \alpha_k$  e  $\alpha_k = \alpha_{k-1} + z_{k-1}^j$ , tal que  $D_1(z_1^j) = 1$ ;  $\alpha_1 = 0$  e  $\sigma_1 = 0$ . Em seguida, a densidade dos centros dos agrupamentos  $D_k(z^{i*})$ ,  $i = 1, \dots, c$ , é atualizada, recursivamente, como segue:

$$D_k(z^{i*}) = (k-1) + (k-2) \left( \frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j - z_{k-1}^j)^2 \quad (12)$$

A atualização do número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar proposto é baseada em 3 condições, as quais são descritas abaixo:

A **Condição A** é utilizada para selecionar uma amostra como um novo centro de agrupamento, sendo expressa conforme abaixo:

$$D_k(z_k^j) > \max_{i=1}^c D(z^{i*}) \text{ OU } D_k(z_k^j) < \min_{i=1}^c D(z^{i*}) \quad (13)$$

Se a condição A é satisfeita, então um novo agrupamento é formado ( $c \leftarrow c+1$ ;  $z^{i*} \leftarrow z_k^j$ ;  $D(z^{i*}) = D_k(z_k^j)$ );

A **Condição B** evita a sobreposição de regras *fuzzy*, sendo equacionada como segue (Angelov and Kordon, 2010):

$$\text{SE } \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(z_k^j) > e^{-1}, \quad i = 1, \dots, c-1 \\ \text{ENTÃO } c \leftarrow c-1 \quad (14)$$

A **Condição C** visa garantir que apenas regras *fuzzy* com alguma contribuição sejam mantidas na base de regras, excluindo regras com baixa utilidade  $U_k^i$  (Angelov and Kordon, 2010):

SE  $U_k^i < \eta$ ,  $i = 1, \dots, c$ , ENTÃO  $c \leftarrow c-1$  com  $\eta = [0.01 \ 0.3]$  e

$$U_k^i = \frac{\sum_{l=1}^k \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(z_l^j)}{k - I^{i*}} \quad (15)$$

onde  $I^{i*}$  é o instante de tempo em que a  $i$ -ésima regra *fuzzy* foi criada. A partir da análise das condições decritas anteriormente, a variância intervalar  $\tilde{\sigma}_k^i$  de cada agrupamento definido na proposição do antecedente é atualizada recursivamente como segue:

$$\tilde{\sigma}_k^i = \sqrt{\zeta (\tilde{\sigma}_{k-1}^i)^2 + (1-\zeta) \frac{1}{S_k^i} (z_k^j - z^{i*})^2} \quad (16)$$

onde  $\zeta$  é uma constante de aprendizagem, definida no intervalo  $[0 \ 1]$  e  $S_k^i$  é o número de amostras associadas ao  $i$ -ésimo agrupamento no instante de tempo  $k$ .

*Estimação Paramétrica Consequente* Para a estimação inicial dos parâmetros que definem a proposição do consequente das regras *fuzzy*, foi implementada uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar *offline* do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) (Juang, 1994), o qual utiliza as partições obtidas pelo algoritmo Gustafson-Kessel apresentado na Seção 2.2. Considerando o conjunto

de dados experimentais inicial  $\mathbf{Z}$ , tal que  $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \ \mathbf{y}_k]^T$ , com  $k = 1, \dots, N_b$ , onde  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  correspondem, respectivamente, aos dados experimentais de entrada e saída da série temporal sob análise, conforme descrito na Eq. (1). Escolhe-se o número apropriado de parâmetros de Markov  $q$  e executa-se os seguintes passos:

**Passo 1** - Cálculo da matriz de regressores  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N_b-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-q-1} \end{bmatrix}_{[(m+p)q+m] \times N_b} \quad (17)$$

**Passo 2** - Cálculo dos parâmetros de Markov do observador intervalares para a  $i$ -ésima regra  $\tilde{\mathbf{Y}}^i$ :

$$\tilde{\mathbf{y}}^T = \sum_{i=1}^c \tilde{\Gamma}^i \Lambda^T \tilde{\mathbf{Y}}^i \quad (18)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_q) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_{q+1}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_{N_b-1}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

é a matriz diagonal de ponderação da  $i$ -ésima regra fuzzy obtida a partir do algoritmo de agrupamento fuzzy tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel;

$$\tilde{\mathbf{Y}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \cdots & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i(q-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_0^i & \tilde{\mathbf{Y}}_1^i & \tilde{\mathbf{Y}}_2^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_q^i \end{bmatrix} \quad (20)$$

são os parâmetros de Markov do observador da  $i$ -ésima regra, tal que:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = [\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i] \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = [\tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i, -\tilde{\mathbf{K}}_k^i] \quad (22)$$

e  $\tilde{\mathbf{y}}$  é a saída intervalar estimada pelo filtro de Kalman fuzzy evolutivo tipo-2 intervalar. Manipulando a Eq. (18), tem-se:

$$\Lambda \tilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \Lambda^T \tilde{\mathbf{Y}}^i \quad (23)$$

onde  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_{N_b}] \in \mathbb{R}^{p \times N_b}$  corresponde ao vetor de dados experimentais. Assumindo  $\tilde{\mathbf{U}}^i = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \Lambda^T$  e  $\tilde{\mathbf{S}}^i = \Lambda \tilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T$ , Eq. (23) é reescrita como segue:

$$\tilde{\mathbf{U}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^i = \tilde{\mathbf{S}}^i \quad (24)$$

A Eq. (24) é solucionada pelo método de fatoração QR (Chen, 1999), a fim de tornar o método robusto uma vez que esta técnica não realiza operações de inversa de matrizes. Aplicando fatoração QR no termo  $\tilde{\mathbf{U}}^i$  no lado direito da Eq. (24), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^i \tilde{\mathbf{R}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^i = \tilde{\mathbf{S}}^i \quad (25)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Q}}^i$  é uma matriz ortogonal, tal que  $(\tilde{\mathbf{Q}}^i)^{-1} = (\tilde{\mathbf{Q}}^i)^T$  e  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  é uma matriz triangular superior. Uma vez que a matriz  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  é triangular superior, Eq. (25) é solucionada por substituição retroativa, obtendo-se o vetor de parâmetros de Markov do observador  $\tilde{\mathbf{Y}}^i$ .

**Passo 3** - Cálculo dos parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(j-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad (27)$$

$$= \left[ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \left( \tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i \right) \right. \\ \left. - \tilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \tilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \quad (28)$$

$$= \left[ \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)}, -\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Os parâmetros de Markov intervalares do sistema  $\tilde{\mathbf{Y}}_j^i$  são obtidos como segue:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)} - \sum_{\ell=1}^j \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\ell}^i, \quad \text{for } j = 1, \dots, q \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = - \sum_{\ell=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\ell}^i, \quad \text{for } j = q+1, \dots, \infty \quad (32)$$

e os parâmetros de Markov intervalares do ganho do observador são obtidos por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1^{i^o} = \tilde{\mathbf{Y}}_1^{i(2)} = \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} - \sum_{\ell=1}^{j-1} \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\ell}^{i^o}, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = - \sum_{\ell=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\ell}^{i^o}, \quad \text{para } j = q+1, \dots, \infty \quad (35)$$

**Passo 4** - Calcular a matriz de Hankel  $\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$ :

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (36)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são inteiros arbitrários.

**Passo 5** - Para  $j = 1$ , decompor  $\tilde{\mathbf{H}}^i(0)$  usando decomposição em valores singulares:

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(0) = \tilde{\mathbf{\Xi}}^i \tilde{\mathbf{\Sigma}}^i \tilde{\mathbf{\Psi}}^{iT} \quad (37)$$

onde  $\tilde{\mathbf{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \alpha p}$  e  $\tilde{\mathbf{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$  são matrizes ortogonais e  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \beta m}$  é a matriz diagonal de valores

singulares referente ao conjunto de dados experimentais.

**Passo 6** - Cálculo da matrizes de observabilidade  $\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  e controlabilidade  $\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i$ :

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \tilde{\Xi}_n^i \left( \tilde{\Sigma}_n^i \right)^{1/2} \quad (38)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left( \tilde{\Sigma}_n^i \right)^{1/2} \tilde{\Psi}_n^{iT} \quad (39)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \left[ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i2} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i\gamma-1} \right]^T \quad (40)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left[ \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i2} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i\beta-1} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \right] \quad (41)$$

**Passo 7** - Obtenção das matrizes que compõe os modelos no espaço de estados da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = \left( \tilde{\Sigma}_n^i \right)^{-1/2} \tilde{\Xi}_n^{iT} \tilde{\mathbf{H}}_n^i (1) \tilde{\Psi}_n^i \left( \tilde{\Sigma}_n^i \right)^{-1/2} \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \quad (44)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (45)$$

**Passo 8** - Cálculo da matriz de ganho de Kalman intervalar:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ} = -\tilde{\mathcal{P}}_\beta^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (46)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ} = -\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (47)$$

Assumindo  $\tilde{\mathbf{A}}^i = -\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  e  $\tilde{\mathbf{N}}^i = \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ}$ , Eq. (47) é reescrita como segue:

$$\tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i = \tilde{\mathbf{N}}^i \quad (48)$$

A Eq. (48) é solucionada pelo método de fatoração QR aplicado ao termo  $\tilde{\mathbf{A}}^i$  para obtenção de  $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$ , da mesma forma como realizado no **Passo 2**.

#### Atualização Paramétrica Recursiva do Filtro de Kalman Fuzzy Evolutivo Tipo-2 Intervalar

Considerando o vetor de regressores no instante de tempo  $k = N_b + 1, k = N_b + 2, \dots$ , dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \left[ \mathbf{u}_{k+1} \quad \mathbf{Z}_k \quad \mathbf{Z}_{k-1} \quad \dots \quad \mathbf{Z}_{k-q} \right]^T \quad (49)$$

os parâmetros de Markov do observador intervalares  $\tilde{\mathbf{Y}}_k^i$  são obtidos pela atualização recursiva da Eq. (24), como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^i = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_k^i = \tilde{\mathbf{s}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{y}_k^T \quad (51)$$

Uma vez que  $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$  e  $\tilde{\mathbf{s}}_k^i$  foram atualizados e aplicando-se fatoração QR em  $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$ , os parâmetros de Markov do observador  $\tilde{\mathbf{Y}}_k^i$  são atualizados. A proposição do consequente das regras *fuzzy* é atualizado recursivamente repetindo os Passos 3 a 7. De forma similar, a matriz de ganho de

Kalman intervalar  $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$  é obtida pela atualização recursiva da Eq. (48), como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^i = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (52)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_k^i = \tilde{\mathbf{s}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (53)$$

Uma vez que  $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$  e  $\tilde{\mathbf{s}}_k^i$  foram atualizados, e aplicando-se o método de fatoração QR em  $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$ , a matriz de ganho de Kalman *fuzzy* intervalar é atualizada a cada instante de tempo  $k$ . Para ilustrar as etapas de treinamento e atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, conforme a metodologia proposta neste artigo, um diagrama de blocos é mostrado na Fig. 1.

### 3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, resultados da metodologia proposta aplicada ao conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, são apresentados. Para ilustrar a eficiência da metodologia proposta, será realizada uma análise comparativa com a abordagem em (Eyoh et al., 2018), largamente citada na literatura, considerando a métrica RMSE - *Root Mean Square Error* como critério de avaliação de desempenho.

A série temporal de Mackey-Glass é gerada a partir da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t) \quad (54)$$

onde  $\tau = 17$ , o qual representa um atraso de tempo e o valor inicial de  $x(t)$  é considerado como  $x(0) = 1.2$ . A partir da Eq. (54) foi obtido um conjunto de dados com tamanho total de 1000 amostras, o qual é mostrado na Fig. 2. A incerteza associada ao conjunto de dados da série temporal de Mackey-Glass deve-se a seu comportamento caótico aumentando a complexidade do seu rastreamento e previsão. As primeiras 500 amostras foram utilizadas para a etapa de treinamento do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar enquanto as 500 amostras restantes foram utilizadas durante sua etapa de atualização recursiva. Considerando o conjunto de dados inicial, o modelo *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar implementado pelo filtro de Kalman, conforme descrito na Eq. (1), foi estimado durante a etapa de treinamento. Uma vez que o conjunto de dados de interesse corresponde à série temporal caótica de Mackey-Glass, a variável de entrada  $\mathbf{u}_k$  na Eq. (1) é considerada como um sinal de ruído branco com baixa amplitude. Foi realizado o particionamento dos dados referentes às 500 primeiras amostras da variável  $x$  descrita na Eq. (54) através do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel descrito na Seção 2.2 para, assim, definir a estrutura inicial do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar. Na implementação do algoritmo de agrupamento GK, adotou-se a seguinte parametrização:  $c = 3$  (número de regras *fuzzy* inicial), índice de fuzzificação intervalar  $\tilde{m} = [1.7 \ 2.2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-5}$ . As funções de pertinência intervalares resultantes do agrupamento dos dados, considerando as primeiras 500 amostras do conjunto de dados, são mostradas na Fig. 3. A partição do conjunto de dados obtida, conforme mostrada na Fig. 3, serviu como critério de ponderação para a

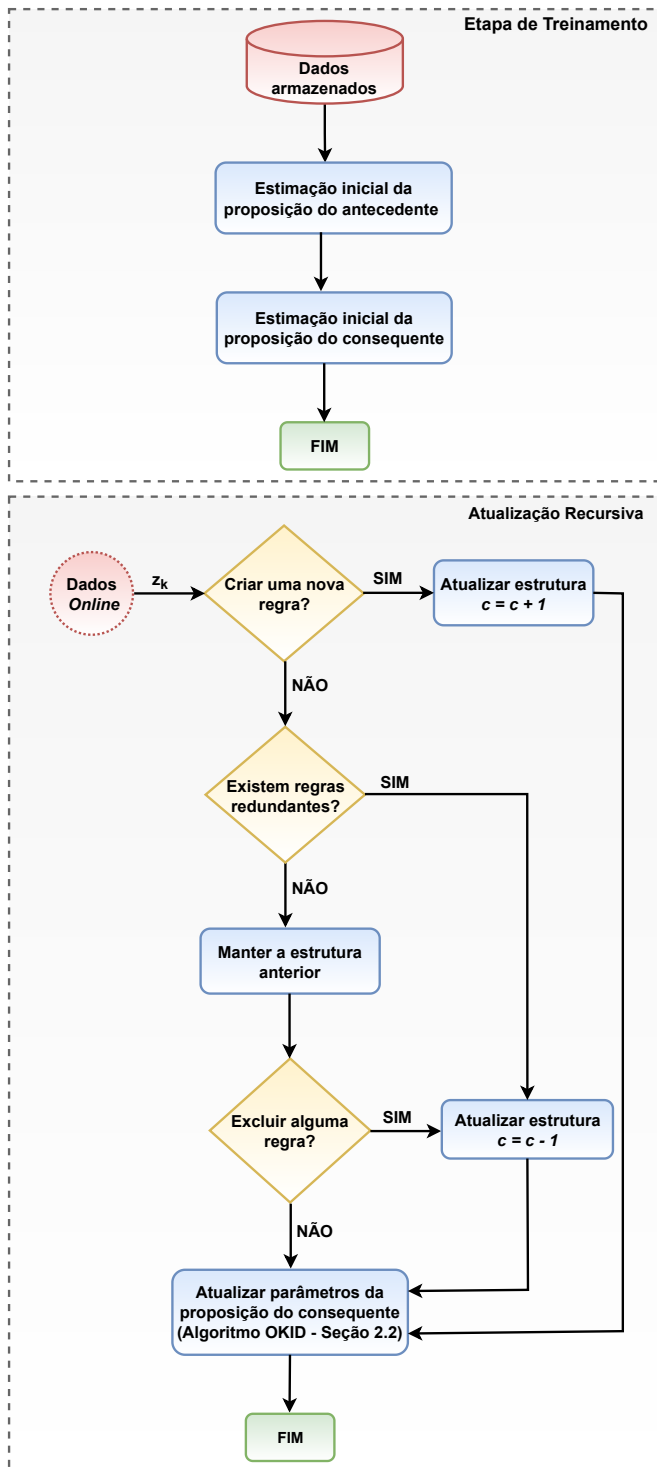


Figura 1. Diagrama de blocos da metodologia proposta correspondente as etapas de treinamento e atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar.

estimação inicial das matrizes que compõe o consequente do modelo *fuzzy*, por meio do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar *offline*. Os parâmetros para a estimação inicial do consequente do modelo *fuzzy*, através do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar descrito na Seção 2.2, foram definidos como  $q = 1$ ,  $\gamma = 30$  e  $\beta = 30$ .

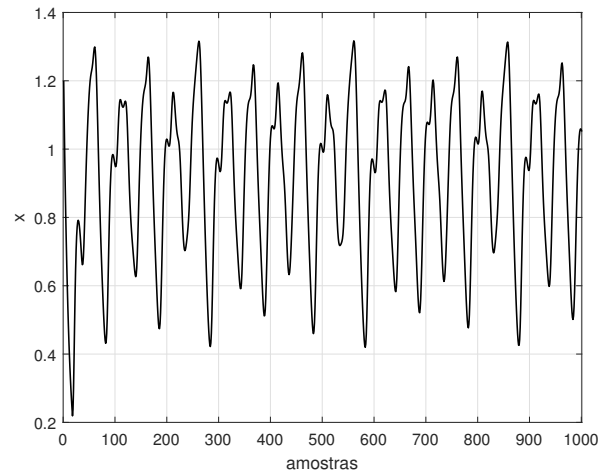


Figura 2. Conjunto de dados referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass.

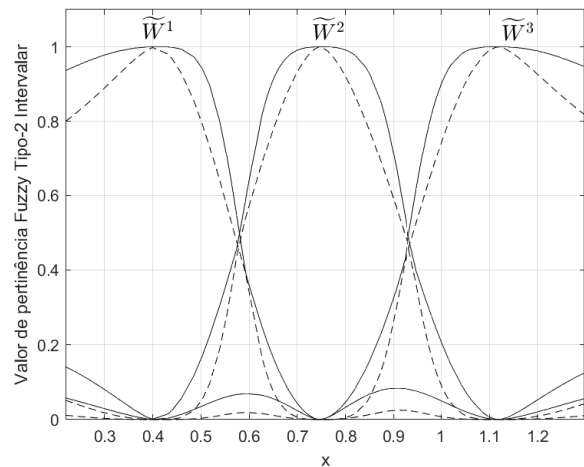


Figura 3. Funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares resultantes do agrupamento de dados, referente a variável de estado  $x$ .

A partir da amostra 501, é iniciada a atualização recursiva do modelo *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, onde tanto a estrutura do antecedente como do consequente do filtro de Kalman são atualizadas recursivamente com o aumento ou redução do número de regras *fuzzy*, conforme a dinâmica descrita pelo conjunto de dados. Para isso, foi implementado o algoritmo *evolving Takagi-Sugeno* (eTS) tipo-2 intervalar proposto, para atualização da partições realizadas sobre o conjunto de dados, considerando os seguintes parâmetros: variância intervalar inicial  $\tilde{\sigma}_0^i = [0.03 \ 0.1]$ , constante de aprendizagem  $\zeta = 0.5$  e constante para exclusão de regras (Condição C)  $\eta = 0.02$ . A região de confiança, conforme mostrada na Fig. 4, criada durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, ilustra a eficiência da metodologia proposta para modelagem do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass. A variação do número de regras *fuzzy* do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar projetado, de acordo com as flutuações dinâmicas do conjunto de dados, é ilustrada na Fig. 5. O comportamento temporal dos ganhos de Kalman

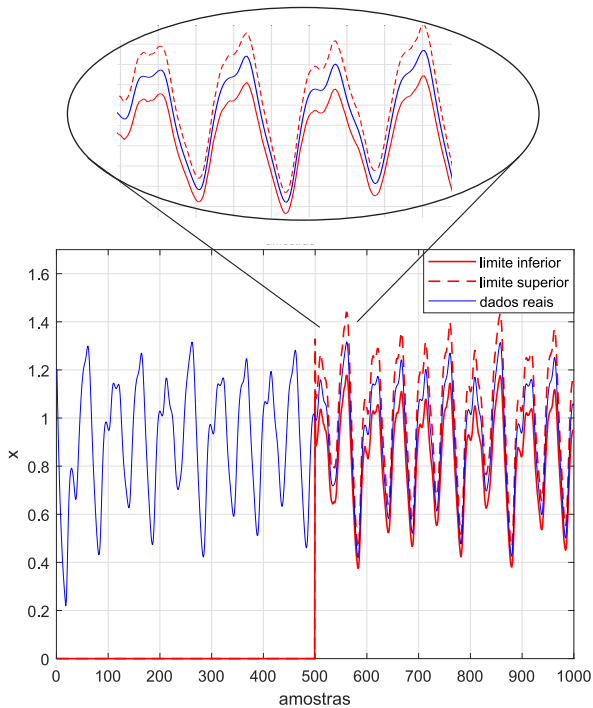


Figura 4. Região de confiança gerada pelo filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar para a modelagem do conjunto de dados referentes à série temporal caótica de Mackey-Glass, durante a etapa de atualização recursiva.

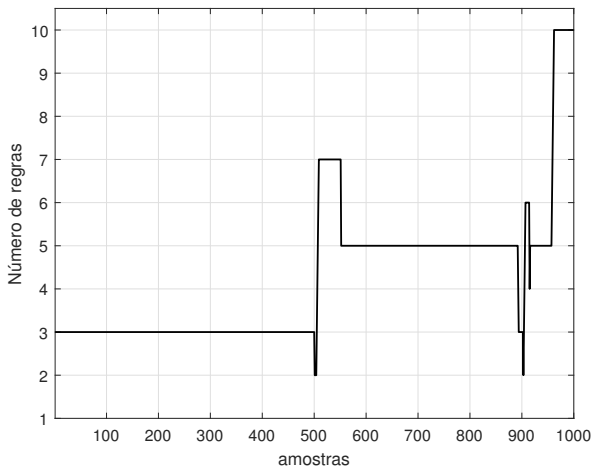


Figura 5. Variação do número de regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar para a modelagem dos conjunto de dados referente à série temporal caótica de Mackey-Glass.

intervalares  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 10}$  durante as etapas de treinamento e atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar para a modelagem do conjunto de dados da série temporal caótica de Mackey-Glass, é mostrado na Fig. 6. Os graus de ativação intervalares das regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, durante a etapa de atualização recursiva, para modelagem da série temporal caótica de Mackey-Glass é mostrada a Fig. 7.

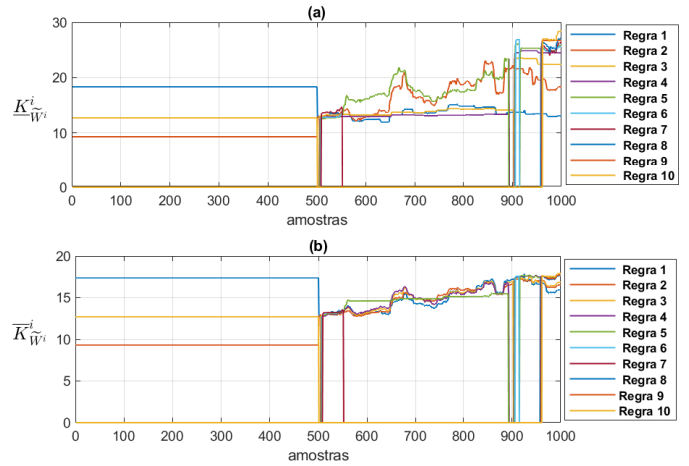


Figura 6. Comportamento temporal dos ganhos de Kalman intervalares  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 10}$  estimados durante as etapas de treinamento e atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar: (a) Ganho de Kalman inferior  $\underline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Ganho de Kalman superior  $\overline{K}_{\tilde{W}^i}^i$ .

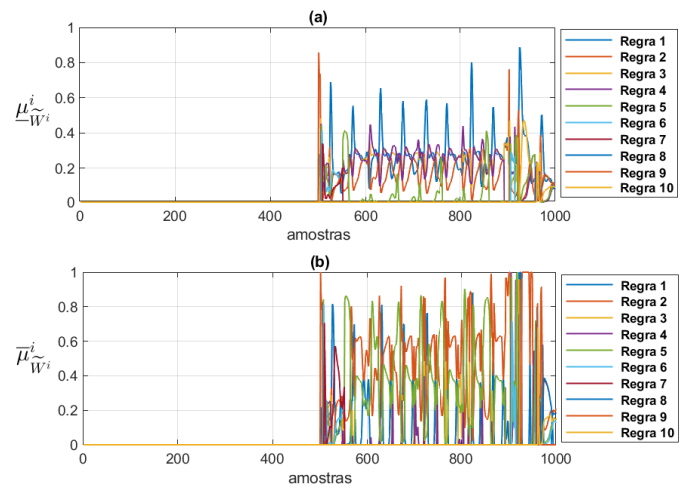


Figura 7. Graus de ativação *fuzzy* normalizados  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i |_{i=1, \dots, 10}$  do sistema de inferência do filtro de Kalman evolutivo tipo-2 intervalar, durante sua etapa de atualização recursiva: (a) Grau de ativação inferior  $\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i$ , (b) Grau de ativação superior  $\overline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i$ .

A fim de demonstrar a eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta, foi realizada uma análise comparativa com o desempenho da abordagem proposta em (Eyoh et al., 2018), considerando as métricas RMSE - *Root Mean Square Error* e MAE - *Mean Absolute Error*. Os resultados da análise comparativa são apresentados na Tabela 1. Pode ser observado a eficiência da metodologia proposta quando comparada à abordagem em (Eyoh et al., 2018), uma vez que obteve desempenho superior devido seu mecanismo de adaptação da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar conforme a dinâmica descrita pelo conjunto de dados.

Tabela 1. Eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, comparada a abordagem proposta em (Eyoh et al., 2018), com aplicações à série temporal caótica de Mackey-Glass.

Abordagem	Número de regras	RMSE	MAE
Eyoh et al. (2018)	16	0.0040	0.213
Metodologia proposta	10	0.0026	0.139

#### 4. CONCLUSÃO

Neste artigo, uma metodologia para o projeto de filtro de Kalman *fuzzy* evolutivo tipo-2 intervalar, baseada em dados, foi proposta. Os resultados computacionais mostraram a aplicabilidade e eficiência da metodologia proposta, devido seu mecanismo de evolução da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, partindo-se de uma estimativa inicial, apresentando melhor desempenho quando comparada a outra abordagem proposta na literatura. Para fins de trabalhos futuros, a formulação da metodologia proposta utilizando técnicas de decomposição espectral de dados experimentais é de particular interesse.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (PPGEE/UFMA) pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

#### REFERÊNCIAS

Agelov, P., Filev, D.P., and Kasabov, N. (2010). *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. IEEE COMPUTER SOC PR.

Ahwiadi, M. and Wang, W. (2022). An adaptive evolving fuzzy technique for prognosis of dynamic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(3), 841–849. doi:10.1109/tfuzz.2021.3049916.

Angelov, P. and Kordon, A. (2010). Adaptive inferential sensors based on evolving fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(2), 529–539. doi:10.1109/tsmcb.2009.2028315.

Chen, C.T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press.

Dziwinski, P. and Bartczuk, L. (2020). A new hybrid particle swarm optimization and genetic algorithm method controlled by fuzzy logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(6), 1140–1154. doi:10.1109/tfuzz.2019.2957263.

Evangelista, A.P.F. and Serra, G.L.O. (2020). State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 394, 1–39. doi:10.1016/j.fss.2019.08.013.

Eyoh, I., John, R., Maere, G.D., and Kayacan, E. (2018). Hybrid learning for interval type-2 intuitionistic fuzzy logic systems as applied to identification and prediction problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(5), 2672–2685. doi:10.1109/tfuzz.2018.2803751.

Feng, H., Song, Q., Ma, S., Ma, W., Yin, C., Cao, D., and Yu, H. (2022). A new adaptive sliding mode

controller based on the RBF neural network for an electro-hydraulic servo system. *ISA Transactions*. doi:10.1016/j.isatra.2021.12.044.

Guirguis, D., Aulig, N., Picelli, R., Zhu, B., Zhou, Y., Vicente, W., Iorio, F., Olhofer, M., Matusiks, W., Coello, C.A.C., and Saitou, K. (2020). Evolutionary black-box topology optimization: Challenges and promises. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 24(4), 613–633. doi:10.1109/tevc.2019.2954411.

He, Z., Chen, G., Hao, T., Liu, X., and Teng, C. (2021). An optimal filter length selection method for MED based on autocorrelation energy and genetic algorithms. *ISA Transactions*, 109, 269–287. doi:10.1016/j.isatra.2020.10.010.

Juang, J.N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice Hall.

Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45. doi:10.1115/1.3662552.

Lin, Q., Lin, W., Zhu, Z., Gong, M., Li, J., and Coello, C.A.C. (2021). Multimodal multiobjective evolutionary optimization with dual clustering in decision and objective spaces. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 25(1), 130–144. doi:10.1109/tevc.2020.3008822.

Mendel, J.M. (2019). Comparing the performance potentials of interval and general type-2 rule-based fuzzy systems in terms of sculpting the state space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1), 58–71. doi:10.1109/tfuzz.2018.2856184.

Orouskhani, M., Shi, D., and Cheng, X. (2021). A fuzzy adaptive dynamic NSGA-II with fuzzy-based borda ranking method and its application to multimedia data analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(1), 118–128. doi:10.1109/tfuzz.2020.2979119.

Serra, G.L.O. (ed.) (2012). *Frontiers in Advanced Control Systems*. Intech.

Shirzadeh, M., Amirkhani, A., Tork, N., and Taghavifar, H. (2021). Trajectory tracking of a quadrotor using a robust adaptive type-2 fuzzy neural controller optimized by cuckoo algorithm. *ISA Transactions*, 114, 171–190. doi:10.1016/j.isatra.2020.12.047.

Wang, Y., Sun, S., Tian, Y., Sun, J., and Xu, L. (2021). Image reconstruction based on fuzzy adaptive kalman filter in electrical capacitance tomography. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 70, 1–10. doi:10.1109/tim.2021.3099563.