

Uma representação aumentada voltada ao Controle Preditivo com desacopladores ^{*}

Rodrigo Galvão de Souza Câmara ^{*} Tito Luís Maia Santos ^{*}

^{} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,
Universidade Federal da Bahia, Salvador-BA
(e-mail: rodrigogalvaocamara@gmail.com, tlsantos@ufba.br).*

Abstract:

This work presents an augmented state-space model for decoupling model predictive controllers. The proposed model ensures a decoupled response from the reference to the output in the absence of active constraints. This kind of decoupled response is not usually achieved in closed-loop systems with model predictive controllers due to the decoupling cost. In comparison to similar works, the proposed approach guarantees closed-loop stability by using the standard constrained stabilizing ingredients. Hence, the proposed model is general, such that it can be combined with multiple stabilizing model predictive control strategies and multiple decoupling strategies. The conditions to ensure a decoupled response are discussed and a simulation example is presented to illustrate the benefits of the proposed strategy.

Resumo: No presente trabalho apresenta-se um modelo aumentado em espaço de estados para controladores preditivos com desacopladores. O modelo proposto permite assegurar uma resposta desacoplada em malha fechada da referência para a saída na ausência de restrições ativas, o que tipicamente não ocorre em estratégias de controle preditivo convencionais devido ao custo adicional imposto por uma resposta desacoplada. Se comparado a trabalhos similares, a abordagem apresentada permite assegurar estabilidade em malha fechada por meio dos ingredientes estabilizantes de controladores preditivos na presença de restrições. Neste sentido, o modelo aumentado proposto é geral, podendo ser combinado a diversas estratégias de controle preditivo com garantias de estabilidade e diversas técnicas de desacoplamento. São discutidas as condições para obtenção de uma resposta desacoplada e um exemplo de simulação é apresentado para ilustrar os benefícios da abordagem proposta.

Keywords: Model Predictive Control; Decoupling; Constraints; Stability; State Space

Palavras-chaves: Controle Preditivo Baseado em Modelo; Desacoplamento; Restrições, Estabilidade; Espaço de Estados

1. INTRODUÇÃO

Sistemas multivariáveis podem apresentar acoplamento cruzado significativo, o qual se manifesta quando a modificação de uma variável manipulada impacta na variação de mais de uma variável de saída de processo de forma representativa. Técnicas de desacoplamento (Gagnon et al., 1998) costumam ser utilizadas para simplificar o projeto de controladores e para evitar que a mudança de uma referência ocasione uma resposta transitória significativa nas múltiplas saídas do processo controlado. Cada técnica possui benefícios e desvantagens e a motivação para a escolha da técnica a ser utilizada depende da aplicação (Gagnon et al., 1998). Assim, é desejável uma abordagem flexível para os controladores com desacopladores, de forma a permitir a adoção de técnicas variadas de desacoplamento, como em Lima and Santos (2013).

As técnicas de controle preditivo são reconhecidas por lidar naturalmente com sistemas multivariáveis (Camacho and Bordons, 2007). Não obstante, respostas acopladas são esperadas a partir da utilização de controladores preditivos como consequência do custo adicional demandado para proporcionar o desacoplamento com relação ao critério minimizado. Em outras palavras, uma resposta desacoplada implica em sacrificar o desempenho ótimo dado um critério ou, alternativamente, demanda a modificação do critério. Este problema é usualmente exemplificado com o controle de altitude e velocidade de um modelo linearizado de um avião (Camacho and Bordons, 2007). Neste tipo de problema, é desejável que a variação de referência de velocidade não cause efeito na altitude ou que uma mudança de altitude não tenha impacto na velocidade da aeronave. O nível de interação cruzada para uma determinada mudança de referência depende dos parâmetros de sintonia do controlador preditivo (Camacho and Bordons, 2007), pois o efeito do desacoplamento com relação ao critério de otimização depende da definição da função custo.

A literatura voltada aos controladores preditivos com desacoplamento tem avançado nos últimos anos. A combinação

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Projeto 308741/2021-8 e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

de controladores preditivos generalizados e desacopladores foram abordadas e utilizadas em Bego et al. (2000) e Chen et al. (2020). Controladores preditivos baseados em representações não-mínimas e desacopladores foram propostos em Zhang and Gao (2013) e Zhang and Gao (2015). A utilização de redes neurais com função custo dinâmica foi discutida em da Fonseca Pereira and Flesch (2020), Zhu et al. (1999) e Qin et al. (1996). A formulação de controladores preditivos em espaço de estado com realização mínima também foi discutida em Kurilla (2017), Bansode and Jadhav (2015), Lima and Santos (2013) e Middleton and Adams (2008). Apesar da evolução das estratégias de controle preditivo com desacoplamento, o problema da garantia de estabilidade na presença de restrições não tem sido considerado nos trabalhos relacionados. Em particular, tratou-se de estabilidade em Lima and Santos (2013), mas apenas o problema de estabilidade sem restrições foi abordado por meio da inclusão de um custo terminal. Além do exposto, os trabalhos mencionados analisam a propriedade de desacoplamento de técnicas específicas, com exceção de Lima and Santos (2013) que utilizou uma abordagem mais generalizada.

Neste trabalho, será apresentado um modelo aumentado que permite garantir estabilidade e resposta desacoplada na ausência de restrições ativas por meio de técnicas lineares de controle preditivo com garantia de estabilidade na presença de restrições. As condições para obtenção de respostas desacopladas serão discutidas. Assim, o modelo aumentado pode ser utilizado em combinação com diversas estratégias de controle preditivo em espaço de estado com garantias de estabilidade. Uma simulação baseada no problema de tanques acoplados será utilizada para ilustrar os benefícios da técnica proposta.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresenta-se brevemente a definição do problema. Na Seção 3 é proposta a representação aumentada voltada ao desacoplamento. Na Seção 4 é apresentado um possível controlador preditivo com garantias de estabilidade baseado em custo e restrição terminais. Por fim, resultados simulados são discutidos na Seção 5 e os comentários finais apresentados na Seção 6.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere uma representação em espaço de estados definida por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \Gamma d_k \\ y_k &= Cx_k + \nu_k, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estados num instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor do sinal de controle, $d_k \in \mathfrak{R}^{n_p}$ representa uma perturbação aditiva desconhecida, $\nu_k \in \mathfrak{R}^m$ representa um ruído de medição e $y_k \in \mathfrak{R}^m$ o vetor de saída do processo. Assume-se que o par (A, B) é controlável e o par (C, A) é observável. Uma estratégia de controle preditivo pode ser definida com vista a minimizar um custo dado $J(x_k, r_k; \mathbf{u}(k))$ no qual $r_k \in \mathfrak{R}^m$ é um vetor de referência e $\mathbf{u}(k) \in \mathfrak{R}^{m \times N_u}$ é um vetor com N_u controles futuros como segue

$$\begin{aligned} J(x_k, r_k; \mathbf{u}(k)) &= \sum_{j=1}^N (y_{k+j|k} - r_k)^\top Q_y (y_{k+j|k} - r_k) \\ &+ \sum_{j=0}^{N_u} (u_{k+j|k} - u_r)^\top R (u_{k+j|k} - u_r), \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $y_{k+j|k}$ uma predição para y_k dada a informação disponível no instante k , $\mathbf{u}(k) = [u_{k|k}^\top \dots u_{k+N_u-1|k}^\top]^\top$ e u_r o sinal de controle em regime permanente que leva $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_k$.

Tendo em vista a presença de acoplamento significativo entre a entrada (u_k) e saída (y_k), considere que o sistema encontra-se em regime permanente com $y_{k-1} = y_{k-2} = r_{k-1}$. Então assumamos que ocorre uma mudança de referência no instante k tal que $\Delta r_k = r_k - r_{k-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$. No que diz respeito ao conjunto de controles futuros que otimiza o critério ótimo ($J(x_k, r_k; \mathbf{u}(k)^*)$), não há motivos para esperar que o impacto de $\Delta r_k = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$ se manifeste apenas no primeiro elemento do vetor de saída, pois todo vetor u_k e todos os elementos do erro do seguimento de referência ($y_{k+1|k} - r_k$) podem ser explorados com vistas a minimizar a função custo dada por $J(x_k, r_k; \mathbf{u}(k))$. Por consequência, o impacto da mudança de referência ($\Delta r_k = r_k - r_{k-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$) no vetor de saídas (y_{k+1}) depende dos parâmetros de ajuste da função custo (Q_y e R). Naturalmente, há um sacrifício do erro de seguimento de referência de todas as saídas visando a minimização de $J(x_k, r_k; \mathbf{u}(k))$ na presença de acoplamentos significativos.

O problema do acoplamento cruzado em controladores preditivos tem sido tratado por meio de duas grandes abordagens, a saber: função custo dinâmica (da Fonseca Pereira and Flesch, 2020; Zhu et al., 1999; Qin et al., 1996), que altera as ponderações ao longo da evolução para impor uma resposta desacoplada e inclusão de desacopladores (Zhang and Gao, 2015; Lima and Santos, 2013; Zhang and Gao, 2013), nos quais utiliza-se explicitamente o modelo desacoplado entre um sinal de controle virtual e a saída do processo. Nestes trabalhos, a garantia de estabilidade com factibilidade recursiva na presença de restrições não tem sido objeto de investigação. Em particular, nas abordagens baseadas em desacopladores explícitos, a inclusão de desacopladores é usualmente realizada considerando diretamente o modelo desacoplado, desprezando a dinâmica interna do desacoplador e negligenciando o cálculo dos ingredientes estabilizantes na presença de restrições no sinal de controle.

No presente trabalho será apresentada uma formulação de representação em espaço de estados aumentada que permite assegurar uma resposta desacoplada na ausência de restrições ativas, incorporando a garantia de estabilidade de controladores preditivos com convergência e factibilidade recursiva assegurada.

3. REPRESENTAÇÃO AUMENTADA COM GARANTIA DE ESTABILIDADE

Considere que o modelo entrada-saída referente ao sistema (1) é dado por

$$\mathbf{P}(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B. \quad (3)$$

Um desacoplador, definido pela matriz de transferência $\mathbf{D}(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, é um sistema dinâmico tal que

$$\mathbf{P}_D(z) = \mathbf{P}(z)\mathbf{D}(z), \quad (4)$$

sendo $\mathbf{P}_D(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz de transferência diagonal. A abordagem proposta se restringe a modelos quadrados, sendo uma definição típica em estratégias de controle baseadas em desacopladores Gagnon et al. (1998). Deve-se observar que a relação da entrada virtual para a entrada efetiva é dada por

$$U(z) = \mathbf{D}(z)V(z), \quad (5)$$

sendo $Y(z) = \mathbf{P}_D(z)V(z)$ com $Y_j(z) = P_D^{j,j}(z)V_j(z)$, na ausência de perturbações. Para preservar a estabilidade interna, não pode ocorrer o cancelamento entre polos instáveis e zeros de transmissão fora do interior do círculo unitário na multiplicação $\mathbf{P}(z)\mathbf{D}(z)$. Em outras palavras, os polos e os zeros de transmissão de $\mathbf{P}(z)$ devem ser preservados em $\mathbf{P}_D(z)$.

Uma realização qualquer para $\mathbf{D}(z)$ é definida tal que

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= A_D\psi_k + B_Dv_k \\ u_k &= C_D\psi_k + D_Dv_k \end{aligned} \quad (6)$$

sendo $\psi_k \in \mathbb{R}^{n_a}$ o vetor de estados num instante k , $v_k \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor do sinal de controle virtual (entrada do desacoplador) e $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor do sinal de controle (saída do desacoplador).

Nas estratégias de controle preditivo com desacopladores, costuma-se utilizar $\mathbf{P}_D(z)$ como modelo de predição que relaciona v_k e y_k . Assim, o problema pode ser tratado como um conjunto de m sistemas monovariáveis. Essa abordagem simplifica o problema, mas despreza a dinâmica do desacoplador, o que dificulta a imposição das condições estabilizantes na presença de restrições em u_k . Para evitar este problema, será usada uma representação aumentada, para fins de predição, que preserva a dinâmica interna do desacoplador.

3.1 Representação aumentada com desacopladores

Considere, agora, uma representação aumentada onde o vetor de estados é formado pela concatenação dos vetores de estados do modelo da planta dado pela Eq. (1) e do modelo do desacoplador representado pela Eq. (6), tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \psi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_D \end{bmatrix} v_k + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} d_k \\ y_k &= [C \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_k \\ \psi_k \end{bmatrix} + \nu_k, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo $\mathbf{0}$ uma matriz nula de dimensões apropriadas.

Substituindo a expressão do sinal de controle da Eq. (6), $u(k) = C_D\psi_k + D_Dv_k$, na Eq. (7), chega-se à seguinte representação

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= A_\chi\chi_k + B_\chi v_k + \Gamma_\chi d_k \\ y_k &= C_\chi\chi_k + \nu_k, \end{aligned} \quad (8)$$

sendo $\chi_k = [x_k^\top \ \psi_k^\top]^\top$ e com as matrizes aumentadas definidas por

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & BC_D \\ \mathbf{0} & A_D \end{bmatrix}, B_\chi = \begin{bmatrix} BD_D \\ B_D \end{bmatrix}, \Gamma_\chi = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_\chi = [C \ \mathbf{0}].$$

Nesta formulação, há de se destacar que: (i) x_k é um vetor de estados medido no instante “ k ”; (ii) o vetor de estados do desacoplador, $\psi_k = A_D\psi_{k-1} + B_Dv_{k-1}$, é calculado a cada instante “ k ”; (iii) o sinal de controle virtual, v_k , é obtido a partir da estratégia de controle preditivo por meio de um algoritmo de otimização e (iv) $u_k = C_D\psi_k + D_Dv_k$ é o sinal de controle efetivamente aplicado à entrada do processo. Ao contrário das estratégias de controle preditivo que estão baseadas num modelo desacoplado, $\mathbf{P}_d(z)$, as restrições para o controle efetivo podem ser expressas diretamente por uma combinação linear dos estados com o controle virtual, isto é

$$u_k = F_\chi\chi_k + F_vv_k, \quad (9)$$

com $F_\chi = [\mathbf{0} \ C_D]$ e $F_v = D_D$. Assim, torna-se possível calcular os conjuntos admissíveis positivamente invariantes para uma lei estabilizante implícita, assegurando factibilidade recursiva e convergência nominal da função custo sob determinadas condições do custo terminal.

Seja uma realimentação de estados dada por $v_k = K_\chi\chi_k$. Uma restrição poliedral para o sinal de controle, descrita na forma $H_uu_k \leq g_u$, pode ser reescrita por meio de uma restrição nos estados como $H_u(F_\chi\chi_k + F_vK_\chi\chi_k) \leq g_u$. Esta transformação é importante para fins de determinação do conjunto terminal que assegura a admissibilidade da lei implícita estabilizante, garantindo factibilidade recursiva e, se desejado, otimalidade local - no interior do conjunto invariante.

A título de exemplo, assumindo $R > 0$ e $Q_y > 0$, é possível calcular uma lei de controle ($v_k = K_\chi\chi_k$) tal que

$$\Phi_\chi^\top P_\chi \Phi_\chi - P_\chi + K_\chi^\top R K_\chi + C_\chi^\top Q_y C_\chi = \mathbf{0},$$

com $P_\chi > 0$ e $\Phi_\chi = A_\chi + B_\chi K_\chi$. Essa lei pode ser a própria solução do regulador linear quadrático (LQR) ou outra realimentação de estados linear. Tendo em vista restrições nos estados na forma $\mathcal{X} = \{x_k \in \mathbb{R}^n : H_x x_k \leq g_x\}$ e $\mathcal{U} = \{u_k \in \mathbb{R}^m : H_u u_k \leq g_u\}$, pode-se calcular o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante¹, \mathcal{O}_∞ , tal que $\chi_k \in \mathcal{O}_\infty \Rightarrow (A_\chi + B_\chi K_\chi)\chi_k \in \mathcal{O}_\infty$, com $u_k = (F_\chi + F_v K_\chi)\chi_k \in \mathcal{U}$, $\forall \chi_k \in \mathcal{O}_\infty$ e $x_k = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]\chi_k \in \mathcal{X}$, $\forall \chi_k \in \mathcal{O}_\infty$. Desta forma, é possível implementar estratégias com desacopladores usando controladores preditivos lineares com garantia de estabilidade a exemplo de Limón et al. (2008) e Ferramosca et al. (2009).

As técnicas de controle preditivo baseadas em desacopladores são definidas tais que duas condições devem ser atendidas para assegurar desacoplamento no caso nominal (sem perturbações e sem erros de modelagem): condição (i), a função custo $J(x_k, r_k, \nu_k)$ deve ser convexa com parcelas quadráticas desacopladas e condição (ii), a solução ótima ν_k^* não deve apresentar restrições ativas durante o regime transitório. A Condição (i) implica que todas as parcelas sejam na forma $\delta_i y_i(k + j|k)^2$ ou $\rho_i v_i(k + j|k)^2$ com $\delta_i > 0$ e $\rho_i > 0$. Isto é naturalmente assegurada por meio de matrizes $Q_y > 0$ e $R > 0$ diagonais. A Condição (ii) não pode ser assegurada *a priori*, pois a presença de restrições ativas depende de fatores como amplitude da mudança de referência e ponderações da função custo. Não obstante, devido às características lineares do modelo do sistema controlado, quanto menor for o período com

¹ O conjunto invariante não necessariamente precisa ser o máximo (\mathcal{O}_∞) como indicado em Gilbert and Tan (1991), mas é comum utilizá-lo para aumentar o domínio de atração.

restrições ativas, menor será o efeito do acoplamento na resposta à mudança de referência. Esta é uma propriedade importante, pois a resposta com acoplamento pode eventualmente ocorrer, mas seu efeito será mitigado caso a ocorrência de restrições ativas não ocorra num intervalo prolongado.

4. CONTROLADORES PREDITIVOS BASEADOS EM MODELO DE VELOCIDADE

As estratégias de controle preditivo com garantias de estabilidade compõem uma família de técnicas de controle com múltiplas definições de função custo, restrições e modelos de predição. Os controladores preditivos baseados em modelo de velocidade são úteis pela incorporação da ação integral ao modelo de predição, o que elimina a necessidade de observadores de perturbação para calcular o valor da referência de controle de regime permanente ($u_{eq,r}$) associada a um valor de referência (r).

Da Eq. (8), os vetores de estados conhecidos nos instantes k e $k - 1$ são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= A_\chi \chi_k + B_\chi v_k + \Gamma_d d_k \\ \chi_k &= A_\chi \chi_{k-1} + B_\chi v_{k-1} + \Gamma_d d_{k-1}. \end{aligned}$$

Subtraindo-se os estados nos instantes k e $k - 1$ ($\Delta\chi_k = \chi_k - \chi_{k-1}$), verifica-se a relação a seguir

$$\Delta\chi_{k+1} = A_\chi \Delta\chi_k + B_\chi \Delta v_k + \Gamma_d \Delta d_k. \quad (10)$$

Fazendo o mesmo para a saída nos instantes $k + 1$ e k , obtém-se

$$y_{k+1} = y_k + C_\chi A_\chi \Delta\chi_k + C_\chi B_\chi \Delta v_k + \Delta v_k. \quad (11)$$

Para fins de modelo de predição, assumindo perturbações constantes, chega-se a

$$\begin{aligned} \xi_{k+1+j|k} &= A_\xi \xi_{k+j|k} + B_\xi \Delta v_{k+j|k}, \\ y_{k+j|k} &= C_\xi \xi_{k+j|k}, \end{aligned} \quad (12)$$

sendo $\xi_k = [\Delta\chi_k^\top \ y_k^\top]^\top$, $\xi_{k+j|k} = [\Delta\chi_{k+j|k}^\top \ y_{k+j|k}^\top]^\top$ e com as matrizes aumentadas definidas conforme a seguir

$$A_\xi = \begin{bmatrix} A_\chi & \mathbf{0} \\ C_\chi A_\chi & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad B_\xi = \begin{bmatrix} B_\chi \\ C_\chi B_\chi \end{bmatrix}, \quad C_\xi = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}].$$

Usando o modelo de velocidade, a combinação linear que define o incremento de controle passa a ser

$$\Delta u_k = F_\xi \xi_k + F_v \Delta v_k, \quad (13)$$

$F_\xi = [F_\chi \ \mathbf{0}] = [\mathbf{0} \ C_D \ \mathbf{0}]$ e $F_v = D_D$. Neste caso, a lei estabilizante implícita é dada por $\Delta v_k = K_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r})$, o custo terminal é definido por $\Phi^\top P \Phi - P = -K_\xi^\top R K_\xi - C_\xi^\top Q C_\xi$ com $\Phi = (A_\xi + B_\xi K_\xi)$ e $\xi_{eq,r} = [\mathbf{0}^\top \ r^\top]^\top$. A única diferença significativa diz respeito à definição dos ingredientes estabilizantes que aparecem no conjunto terminal uma vez que a restrição em Δu_k deve ser convertida para $u_k = \Delta u_k + u_{k-1}$. Deve-se notar que $\xi_{eq,r}$ e u_r definem uma transação da origem da representação em espaço de estados para fins de regulação com $\xi_{eq,r} = A_\xi \xi_{eq,r}$ e $u_k = \Delta u_k + u_{k-1} \rightarrow u_k - u_r = \Delta u_k + u_{k-1} - u_r$. Esta transação não interfere no cálculo do custo terminal, pois $\xi_{k+1+j|k} = A_\xi \xi_{k+j|k} + B_\xi \Delta v_{k+j|k}$ com $\Delta v_k = K_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r})$ resulta em $\xi_{k+1+j|k} - \xi_{eq,r} = (A_\xi \xi_{k+j|k} + B_\xi K_\xi)(\xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r})$.

Com relação à restrição terminal, faz-se necessário incorporar a dinâmica de u_{k-1} como segue

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+1+j|k} \\ \tilde{u}_{k+j|k} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} A_\xi & \mathbf{0} \\ F_\xi & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\xi \\ F_v \end{bmatrix} [K_\xi \ \mathbf{0}] \right)}_{A_a} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+j|k} \\ \tilde{u}_{k-1+j|k} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

sendo $\tilde{\xi}_{k+j|k} = \xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r}$ e $\tilde{u}_{k-1+j|k} = u_{k-1+j|k} - u_r$. Cabe enfatizar que $F_\xi \tilde{\xi}_k = F_\xi \xi_k$, pois $F_\xi = [F_\chi \ \mathbf{0}] = [\mathbf{0} \ C_D \ \mathbf{0}]$. Neste caso, o estado adicional definido por $\tilde{u}_{k-1+j|k}$ tem o papel de armazenar o controle futuro anterior tal que $\tilde{u}_{k+j|k}$ pode ser obtido por meio de $\Delta u_{k+j|k} + \tilde{u}_{k-1+j|k}$. Assim, pode-se obter uma aproximação invariante admissível (Ω_ϵ^k) para o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante aumentado dependente de r_k , tal que $[\xi_{k+N|k}^\top \ u_{k+N-1|k}^\top] \in \mathcal{O}_{a,\infty}^k$ e $[\xi_{k+N|k}^\top \ u_{k+N-1|k}^\top] \in \Omega_\epsilon^k$ asseguram a invariância e a satisfação das restrições sob a lei de controle $\Delta v_{k+N-1|k} = K_\xi(\xi_{k+N|k} - \xi_{eq,k})$ com $\xi_{eq,k}$ sendo a condição de equilíbrio definida por r_k . A aproximação invariante e admissível se faz necessária na prática, pois o máximo conjunto invariante admissível pode não ser finitamente determinado em decorrência dos autovalores iguais à unidade.

Nesta abordagem aproximada, $\Omega_\epsilon^k \subset \mathcal{O}_{a,\infty}^k$, pode ser calculado com um algoritmo finitamente determinado conforme proposto em Gilbert and Tan (1991, Seção 5). De forma simplificada, assumindo de $\mathcal{O}_{a,\infty}^k \subset \mathbb{Z}^{r_k}$ com $\mathbb{Z}^{r_k} = \{z \in \mathbb{R}^{n+n_d+2m} : H_z z \leq g_z\}$, sendo \mathbb{Z}^{r_k} o conjunto de restrições de controle e estados transladados descritos no espaço de estados aumentados. A restrição contraída é definida por $\mathbb{Z}_{\epsilon,ss}^{r_k} = \{z \in \mathbb{R}^{n+n_d+2m} : H_z A_{ss} z \leq g_z - \mathbb{1}\epsilon\}$, sendo $\epsilon > 0$ um parâmetro de contração, $\mathbb{1}\epsilon$ um vetor constante com elementos iguais a ϵ e $A_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (F_\xi + F_v K_\xi)(\mathbf{I} - A_\xi - B_\xi K_\xi)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. Finalmente, a aproximação Ω_ϵ^k pode ser obtida substituindo a restrição \mathbb{Z}^{r_k} pela interseção $\mathbb{Z}^{r_k} \cap \mathbb{Z}_{\epsilon,ss}^{r_k}$. O conjunto Ω_ϵ^k tende a $\mathcal{O}_{a,\infty}^k$ quando ϵ tende a 0. Por outro lado, o número de iterações para a obtenção de Ω_ϵ^k também tende a aumentar com a redução de ϵ . Detalhes da aproximação invariante admissível podem ser obtidos em Gilbert and Tan (1991, Seção 5). Vale enfatizar que $A_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_a^k$ e $A_{ss} A_a = A_{ss}$. Assim, a restrição contraída praticamente não altera o volume e a forma do conjunto terminal assumindo valores pequenos de ϵ .

Considerando os ingredientes estabilizantes apresentados, a estratégia baseada em desacoplamento recai na formulação usual de uma técnica de controle preditivo com garantias de estabilidade obtida com um problema de otimização como segue

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{v}(k)} \quad & J_N(\xi_k, u_{k-1}, r_k; \Delta \mathbf{v}(k)) \\ \text{s.t.} \quad & \xi_{k|k} = \xi_k, \\ & \xi_{k+1+j|k} = A_\xi \xi_{k+j|k} + B_\xi \Delta v_{k+j|k}, \quad j \in \mathbb{Z}_{[0,N-1]}, \\ & u_{k+j|k} \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{Z}_{[0,N-1]}, \\ & \Delta u_{k+j|k} \in \Delta \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{Z}_{[0,N-1]}, \\ & x_{k+j|k} \in \mathcal{X}, \quad j \in \mathbb{Z}_{[0,N-1]}, \\ & [\xi_{k+N|k}^\top \ u_{k+N-1|k}^\top] \in \Omega_\epsilon^k. \end{aligned} \quad (15)$$

A função custo é dada por

$$J_N(\zeta_k; \Delta \mathbf{v}(k)) = \sum_{j=1}^N (y_{k+j|k} - r_k)^\top Q_y (y_{k+j|k} - r_k) + \sum_{j=0}^{N_v} \Delta v_{k+j|k}^\top R \Delta v_{k+j|k} + (\xi_{k+N|k} - \xi_{eq,k})^\top P (\xi_{k+N|k} - \xi_{eq,k}),$$

com $\zeta_k = [\xi_k^\top \ u_{k-1}^\top \ r_k^\top]^\top$.

Como descrito anteriormente, $\Delta u_{k+j|k}$, $u_{k+j|k}$ e $x_{k+j|k}$ podem ser obtidos por combinações lineares envolvendo $\xi_{k+j|k}$, $\Delta v_{k+j|k}$ e $u_{k+j-1|k}$. Devido ao princípio do horizonte deslizante, utiliza-se apenas $u_k = u_{k|k}$, repetindo-se a operação a cada amostragem. Deve-se destacar que a representação aumentada voltada ao desacoplamento pode ser combinada a múltiplas estratégias com estabilidade garantida. A abordagem baseada em modelo de velocidade é apenas uma das diversas alternativas.

A dimensão em espaço de estados utilizada para fins de obtenção do conjunto invariante terminal é dada $n + n_d + 2m$, o que pode ser um elemento complicador para fins de cálculo do conjunto terminal. Este conjunto é calculado fora do problema de otimização, o que diminui o impacto da representação aumentada. Com relação ao problema de otimização, o custo computacional não é impactado consideravelmente, pois o número de variáveis de decisão é preservado. Não obstante, a principal contribuição do presente trabalho consiste na proposta de uma representação aumentada para fins de respostas desacopladas com garantia de estabilidade em controladores preditivos. Neste contexto, a representação aumentada proposta pode ser aplicada a outras técnicas de controle preditivo com estabilidade garantida.

5. ESTUDO DE CASO

O problema de controle de tanques acoplados será considerado nesta seção (Johansson, 2000). Este problema é particularmente interessante, pois as estratégias de controle preditivo podem resultar numa resposta instável para horizontes de predições curtos devido ao princípio do horizonte deslizante. O problema da instabilidade surge na configuração com zeros de transmissão de tempo discreto fora do círculo unitário (Garcia-Gabin and Camacho, 2002).

O modelo dos tanques é apresentado a seguir

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} u_1(t), \\ \dot{h}_2(t) &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2(t)} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4(t)} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} u_2(t), \\ \dot{h}_3(t) &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} u_2(t), \\ \dot{h}_4(t) &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} u_1(t), \end{aligned}$$

sendo $h_\ell(t)$ o nível em centímetros, $u_\ell(t)$ o comando de vazão em volts, $g = 981 \text{ cm/s}^2$ e os demais parâmetros apresentados na Tabela 1.

Assume-se que todos os estados são mensuráveis, mas a saída controlada é definida por $y(t) = k_c [h_1(t) \ h_2(t)]^\top$ com $k_c = 0,5$. O ponto de equilíbrio considerado é dado

Tabela 1. Parâmetros do modelo dos tanques interconectados.

i	A_i (cm ²)	a_i (cm ²)	k_i (cm ³ /(sV))	γ_i
1	28	0,071	3,14	0,43
2	32	0,057	3,29	0,34
3	28	0,071	-	-
4	32	0,057	-	-

por $\bar{h}_1 = 12,6 \text{ cm}$ e $\bar{h}_2 = 13 \text{ cm}$. Essa configuração resulta num modelo linearizado dado por

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{63s+1} & \frac{2,5}{(63s+1)(39s+1)} \\ \frac{2,5}{(56s+1)(91s+1)} & \frac{1,6}{91s+1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

O modelo linearizado foi discretizado com um período de amostragem $T_s = 5 \text{ s}$. Para evitar o cancelamento do zero de transmissão, preservando a estabilidade interna, foi utilizado o mesmo desacoplador simplificado aplicado em Lima and Santos (2013) dado por

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} -1 & P_{12}(z)/P_{11}(z) \\ P_{21}(z)/P_{22}(z) & -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Com vistas a minimizar as fontes de restrições ativas, permitindo uma análise mais detalhada das discussões, optou-se por incluir apenas as restrições de controle dadas por $2 \text{ V} \leq u_{k+j|k} \leq 5 \text{ V}$ sem perda de generalidade. Para fins de sintonia do controlador preditivo baseado em modelo de velocidade, foram utilizados $Q_y = \mathbf{I}$, $R = \mathbf{I}$, $P > 0$ e K_ξ sendo as matrizes associadas à solução do problema LQR. Para o cálculo do conjunto terminal, utilizou-se $\epsilon = 0,1$ e o pacote *MPT3 Toolbox* (Herceg et al., 2013). Serão comparadas duas estratégias, a saber: (i) controlador preditivo proposto com desacoplamento ($N = N_u = 5$) e (ii) controlador preditivo com garantia de estabilidade sem desacoplamento ($N = 5$ e $N_u = 5$). Para fins de comparação, a mesma abordagem para estabilização foi utilizada tal que a técnica sem desacoplamento pode ser recuperada impondo $A_D = 0$, $B_D = 0$, $C_D = 0$ e $D_d = \mathbf{I}$. Há de se destacar que a resposta desacoplada é observada neste tipo de problema mesmo na ausência de restrições (Lima and Santos, 2013). São consideradas duas mudanças de referências e uma perturbação do tipo degrau de amplitude $0,3 \text{ cm}$ é adicionada à saída 1 no instante $t = 1300 \text{ s}$.

As respostas das estratégias testadas são apresentadas na Figura 1. A técnica com desacoplamento apresenta um efeito de fase não-mínima significativa, o que é necessário para incorporar o efeito da variação de uma referência sem variar a outra saída. Essa demanda decorre da necessidade de se preservar os zeros de transmissão para preservação da estabilidade interna. Na técnica sem desacoplamento, o efeito transitório se manifesta na saída em que não ocorre a mudança de referência, conforme esperado. Há de se observar que ocorre uma pequena interação cruzada na técnica com desacoplamento, mas esse resultado é bastante reduzido tendo em vista a utilização do modelo de simulação não-linear. Em outras palavras, uma mudança de referência no nível $h_2(t)$ tem efeito reduzido em $h_1(t)$. Quando se observa o efeito da rejeição de perturbação, nota-se que a técnica com desacoplamento praticamente restringe o impacto da perturbação ao escopo do nível do tanque 1, o que não ocorre na técnica convencional. Há

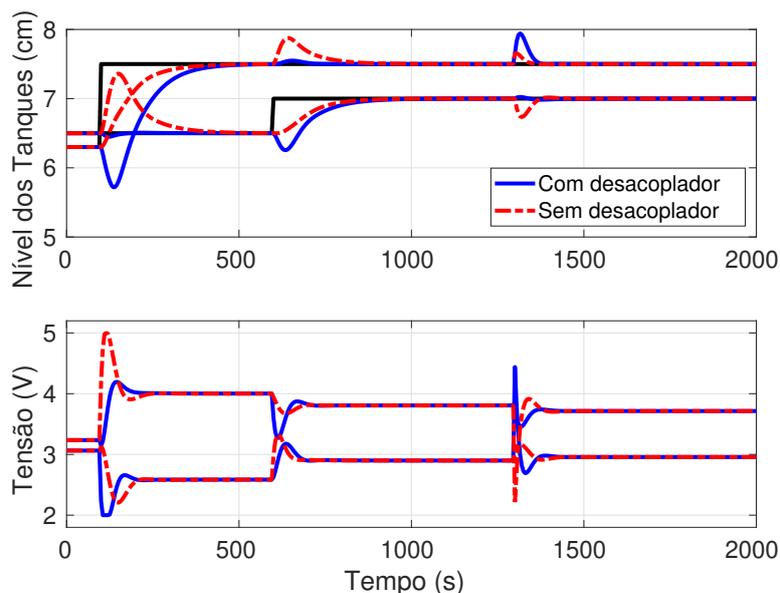


Figura 1. Comparação das respostas do sistema de quatro tanques com e sem desacoplador.

de se destacar que, assim como se verificou no cenário sem restrições discutido em Lima and Santos (2013), caso os ingredientes estabilizantes não sejam usados com $N = N_u = 5$, observa-se uma resposta instável em malha aberta.

Um aspecto interessante dos resultados apresentados na Figura 1 decorre do custo associado ao desacoplamento uma vez que surge um erro de seguimento de referência significativo. Graças a esse erro, torna-se possível realizar a mudança de referência sem provocar a interação cruzada. Esse erro poderia ser reduzido aumentando a ponderação Q_y ou reduzindo R , mas optou-se por manter o mesmo parâmetro de sintonia para preservar a análise comparativa. No entanto, deve-se enfatizar que a grandeza do sinal v_k não é equivalente ao sinal u_k . Neste sentido, ao se utilizar a abordagem proposta, os parâmetros Q_y e R devem ser definidos em função de $\mathbf{P}_D(z)$.

As técnicas com garantias de estabilidade permitem manter uma operação segura na presença de restrições independente da sintonia. Na formulação apresentada, estabilidade nominal e desacoplamento são tratados conjuntamente. Durante a primeira mudança de referência, pode-se verificar que ocorreu a saturação da ação de controle no seu valor mínimo. Mesmo com a saturação, o efeito da interação cruzada foi significativamente reduzido, especialmente quando se compara à técnica sem desacoplamento. Portanto, a técnica proposta também permite mitigar o efeito da interação cruzada na presença de restrições ativas.

6. CONCLUSÃO

Foi proposta uma representação aumentada para controladores preditivos que permitem assegurar estabilidade e proporcionar resposta à mudanças de referências desacopladas na ausência de restrições ativas. A representação proposta é geral, podendo ser integradas a outras estratégias de controle preditivo com garantias de estabilidade. Um estudo de caso baseado no problema de tanques aco-

plados foi usado para ilustrar a importância da técnica proposta. No que diz respeito aos trabalhos futuros, há a possibilidade de se investigar o problema de garantia de estabilidade com a utilização das funções custo dinâmicas. O problema robusto também merece investigação.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do CNPq (308741/2021-8).

REFERÊNCIAS

- Bansode, P. and Jadhav, S.P. (2015). Decoupling based predictive control analysis of a continuous stirred tank reactor. In *2015 International Conference on Industrial Instrumentation and Control (IIC)*, 816–820. doi:10.1109/IIC.2015.7150854.
- Bego, O., Peric, N., and Petrovic, I. (2000). Decoupling multivariable gpc with reference observation. In *2000 10th Mediterranean Electrotechnical Conference. Information Technology and Electrotechnology for the Mediterranean Countries. Proceedings. MeleCon 2000 (Cat. No.00CH37099)*, volume 2, 819–822 vol.2. doi:10.1109/MELCON.2000.880059.
- Camacho, E.F. and Bordons, C. (2007). *Model Predictive Control*. Springer, 2 edition.
- Chen, Z., Cui, J., Lei, Z., Shen, J., and Xiao, R. (2020). Design of an improved implicit generalized predictive controller for temperature control systems. *IEEE Access*, 8, 13924–13936. doi:10.1109/ACCESS.2020.2965021.
- da Fonseca Pereira, G. and Flesch, R.C.C. (2020). Desacoplamento de sistemas multivariáveis não lineares com mpc usando função custo dinâmica. In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*, volume 2.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. (2009). Mpc for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, 45(8), 1975–1978.

- Gagnon, E., Pomerleau, A., and Desbiens, A. (1998). Simplified, ideal or inverted decoupling? *ISA Transactions*, 37, 265–276.
- Garcia-Gabin, W. and Camacho, E.F. (2002). Application of multivariable gpc to a four tank process with unstable transmission zeros. In *Proceedings of the International Conference on Control Applications*, volume 2, 645–650. IEEE.
- Gilbert, E.G. and Tan, K.T. (1991). Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic control*, 36(9), 1008–1020.
- Herceg, M., Kvasnica, M., Jones, C., and Morari, M. (2013). Multi-Parametric Toolbox 3.0. In *Proc. of the European Control Conference*, 502–510. Zürich, Switzerland. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>.
- Johansson, K. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3), 456–465. doi:10.1109/87.845876.
- Kurilla, J. (2017). Temperature control of multidimensional system using decoupled mpc controllers. In *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*, 351–357. doi:10.1109/PC.2017.7976239.
- Lima, C.S.C. and Santos, T.L.M. (2013). Estudo sobre a redução do acoplamento em estratégias de controle preditivo baseado em modelo. *SBAI-Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Limón, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E.F. (2008). Mpc for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9), 2382–2387.
- Middleton, R.H. and Adams, G.J. (2008). Modification of model predictive control to reduce cross-coupling. *17th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, 9940–9945.
- Qin, X., Zhu, K., and Chai, T. (1996). Robust adaptive decoupling design for generalized predictive control with neural network. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2426–2431. doi: 10.1109/CDC.1996.573453.
- Zhang, R. and Gao, F. (2013). State space model predictive control using partial decoupling and output weighting for improved model/plant mismatch performance. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 52(2), 817–829.
- Zhang, R. and Gao, F. (2015). An improved decoupling structure based state space mpc design with improved performance. *Systems & Control Letters*, 75, 77–83. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.11.009>.
- Zhu, K., Qin, X., and Chai, T. (1999). A new decoupling design of self-tuning multivariable generalized predictive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 13(3), 183–196.