

## Filtragem com previsão-correção para sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto<sup>\*</sup>

Oswaldo L. V. Costa<sup>\*</sup> André M. de Oliveira<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP (e-mail: oswaldo@lac.usp.br).

<sup>\*\*</sup> Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP (e-mail: andre.marcorin@unifesp.br)

---

**Abstract:** In this paper we consider a finite horizon filtering problem for discrete-time Markov jump linear systems. We assume that only the output and the jump parameters are available to the filter and the goal is to obtain a “prediction-correction” formula which is optimal among the Markovian filters. As in the case with no jumps, we show that an optimal filter can be obtained from a set of coupled Riccati difference equations associated to the filtering problem. When there is only one mode of operation our results coincide with the traditional Kalman filter for discrete-time linear systems.

**Resumo:** Neste artigo consideramos um problema de filtragem a horizonte finito para sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto. Assumimos que apenas a saída e os parâmetros de salto estão disponíveis para o filtro, e o objetivo é obter uma fórmula de “previsão-correção” que seja ótima entre os filtros Markovianos. Como no caso sem saltos, mostramos que um filtro ótimo pode ser obtido a partir de um conjunto de equações a diferenças de Riccati acopladas entre si, associadas ao problema de filtragem. Quando há apenas um modo de operação, nossos resultados coincidem com o filtro de Kalman

*Keywords:* discrete-time; Markovian jump systems; “prediction-correction” formula; finite horizon; Riccati equations.

*Palavras-chaves:* tempo discreto; sistemas com saltos Markovianos; fórmula de “previsão-correção”; horizonte finito; equações de Riccati.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Este artigo trata de problemas de filtragem para uma família de processos estocásticos com múltiplos modelos lineares, conhecida como sistemas lineares com saltos Markovianos (do inglês, *Markov jump linear systems*, MJLS). Para esta classe de processos, assume-se que o sistema real pode ser representado por um número finito de possíveis modelos lineares a tempo discreto, e as transições entre esses modelos segue uma cadeia de Markov  $\theta(k) \in \{1, \dots, N\}$ . O valor do parâmetro de Markov caracteriza o “modo de operação” do sistema, e pode representar mudanças abruptas devido a falhas, mudanças ambientais, perda de pacotes em sistemas de rede, etc. No início da década de 1990, MJLS foram usados para modelar sistemas de controle ativos tolerantes a falhas (do inglês, *Active Fault-Tolerant Control Systems*, AFTCS), veja Mariton (1989),

---

<sup>\*</sup> Esse trabalho foi financiado parcialmente pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) projeto No. 2021/13338-6, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto No. 304149/2019 – 5, pelo FAPESP/Shell Research Center for Gas Innovation, projeto FAPESP No. 2020/15230 – 5, pelo Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Sistemas Autônomos Cooperativos (INSAC), projeto CNPq/INCT 465755/2014–3, projeto FAPESP/INCT 2014/50851–0 e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), proc. 88887.136349/2017-00.

e desde então o número de aplicações usando esta classe de modelos tem crescido consideravelmente. Para uma visão geral de MJLS, sugerimos as referências Costa et al. (2013); Boukas (2006); Costa and Tuesta (2004); Dufour and Elliott (1998); Dragan et al. (2010); Shi and Li (2015), e Mahmoud et al. (2003) para aplicações de MJLS em AFTCS.

Problemas de filtragem são de interesse não apenas pelo grande número de aplicações, mas também por serem fundamentais no estudo de problemas de controle com observações parciais na variável de estado. Existe hoje uma extensa literatura sobre o assunto, sendo o filtro de Kalman um dos resultados mais importante na área. Com relação ao problema de filtragem de MJLS, uma questão importante está relacionada à disponibilidade ou não do modo de Markov  $\theta(k)$ . Para o caso em que  $\theta(k)$  não está disponível, apenas soluções numéricas, geralmente escritas em termos de problemas de otimização de desigualdades matriciais lineares (LMIs), foram apresentadas na literatura para o projeto de filtros. Possíveis abordagens para resolver este problema são o caso *independente do modo*, no qual um único filtro deve ser projetado para todos os modos de operação do sistema (veja, por exemplo, Chang and Yang (2013)), o caso *dependente de cluster*, no qual o espaço de estado da cadeia de Markov é escrito como a união de conjuntos disjuntos (clusters) e a única informação

disponível é em qual cluster a cadeia de Markov pertence (ver, por exemplo, Val et al. (2002)), e a *abordagem baseada em detector* (ou *hidden MJLS*), na qual há uma variável observável, denotada por  $\hat{\theta}(k)$ , de modo que o processo conjunto  $Z(k) = (\theta(k), \hat{\theta}(k))$  pode ser visto como um modelo oculto de Markov (ver, por exemplo, Costa et al. (2015); Todorov et al. (2018); de Oliveira and Costa (2017, 2018); Oliveira and Costa (2017); de Oliveira and Costa (2020), ou, sob o nome de *assíncrono MJLS*, Shen et al. (2019); Zhao et al. (2020); Xu et al. (2015); Tao et al. (2021, in print.); Wu et al. (2019); Wang and Yang (2019)).

Por outro lado, o caso em que o parâmetro de Markov está disponível permite obter resultados analíticos para o projeto do filtro, como foi mostrado em Costa et al. (2005) sobre a otimalidade de filtros de previsão de um passo entre a classe de filtros de Markov (ou seja, filtros que dependem explicitamente apenas de  $\theta(k)$ ). A solução apresentada é baseada em um conjunto de equações a diferenças de Riccati acopladas entre si, resultado que se assemelha ao tradicional filtro de Kalman. Neste artigo este problema é revisitado, mas incluindo mais um passo no problema de filtragem, conhecido como a fórmula de “correção”, que leva em consideração as informações mais atualizadas de  $y(k)$  e  $\theta(k)$  para estimar a variável de estado  $x(k)$ . Este artigo se dedica a mostrar a otimalidade dessa fórmula de “previsão-correção” entre os filtros markovianos, estendendo o resultado em Costa et al. (2005), que considerou apenas a fórmula de “previsão”. Quando restrito ao caso sem saltos, o filtro de “previsão-correção” obtido neste artigo coincide com o filtro tradicional de Kalman.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos a notação e algumas definições. Na Seção 3 definimos o modelo de MJLS e a formulação do problema de filtragem. Na Seção 4 apresentamos no Teorema 3 o resultado principal do artigo, que fornece um filtro ótimo para o problema, baseado em um conjunto de equações a diferenças de Riccati acopladas entre si. A seção 5 apresenta um exemplo numérico comparando o filtro de Markov obtido neste artigo com o filtro de Kalman variável no tempo. O artigo é concluído na Seção 6 com alguns comentários finais.

## 2. NOTAÇÃO E ALGUMAS DEFINIÇÕES

Ao longo do artigo,  $\mathbb{R}^n$  representará o espaço real  $n$  dimensional, e  $\mathbb{M}^{m,n}$  o espaço linear normado de todos as  $n$  por  $m$  matrizes reais. Para simplificar, escrevemos  $\mathbb{M}^n = \mathbb{M}^{n,n}$ . O símbolo  $'$  representará o transposto de uma matriz,  $tr(\cdot)$  denota o traço de uma matriz, e  $L \geq 0$  ( $L > 0$  respectivamente) indica que uma matriz simétrica  $L$  é semi-definida positiva (definida positiva respectivamente). Definimos  $\mathbb{M}^{n+} = \{L \in \mathbb{M}^n; L \geq 0\}$ .

Definimos  $\mathcal{H}^{m,n}$  como o espaço linear formado por todas as seqüências de matrizes reais  $H = (H_1, H_2, \dots, H_N)$  com  $H_i \in \mathbb{M}^{m,n}$  e, como antes, definimos  $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^{n,n}$  e  $\mathcal{H}^{n+} = \{H \in \mathcal{H}^n; H_i \in \mathbb{M}^{n+}, i = 1, 2, \dots, N\}$ . Dizemos que  $H = (H_1, H_2, \dots, H_N) \geq 0$  ( $> 0$ ) se para cada  $i = 1, \dots, N$  temos que  $H_i \geq 0$  ( $> 0$ ) respectivamente.

Para inteiros positivos  $N$  e  $T$  definimos os conjuntos  $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$  e  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ . Em um espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , seja  $\{\theta(k) \in \mathbb{N}\}$  uma cadeia de

Markov variável no tempo tomando valores em  $\mathbb{N}$  com probabilidade de transição  $p_{ij}(k), k \in \mathbb{T}$  onde, para cada  $k \in \mathbb{T}$ ,  $p_{ij}(k) \geq 0$  para  $i, j \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{j=1}^N p_{ij}(k) = 1$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Representamos as matrizes de probabilidade de transição como  $\mathbb{P}(k) = [p_{ij}(k)]$ , e definimos  $\pi_i(k) = \mathcal{P}(\theta(k) = i)$ . Segue que

$$\pi(k+1)' = \pi(0)'\mathbb{P}(0) \dots \mathbb{P}(k) \quad (1)$$

onde

$$\pi(k) = \begin{bmatrix} \pi_1(k) \\ \vdots \\ \pi_N(k) \end{bmatrix}.$$

Para qualquer conjunto  $A \in \mathcal{F}$  definimos a função indicadora  $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$  se  $\omega \in A$ , 0 caso contrário.

## 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

No espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , considere o seguinte MJLS::

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}(k)x(k) + G_{\theta(k)}(k)w(k) \\ y(k) = L_{\theta(k)}(k)x(k) + H_{\theta(k)}(k)w(k) \end{cases} \quad (2)$$

onde  $\{x(k); k \in \mathbb{T}\}$  representa o vetor de estado em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{w(k); k \in \mathbb{T}\}$  uma seqüência de ruído em  $\mathbb{R}^q$ ,  $\{y(k); k \in \mathbb{T}\}$  a seqüência de variáveis mensuráveis em  $\mathbb{R}^p$ . Também temos  $A(k) = (A_1(k), \dots, A_N(k)) \in \mathcal{H}^n$ ,  $G(k) = (G_1(k), \dots, G_N(k)) \in \mathcal{H}^{q,n}$ ,  $L(k) = (L_1(k), \dots, L_N(k)) \in \mathcal{H}^{n,p}$ ,  $H(k) = (H_1(k), \dots, H_N(k)) \in \mathcal{H}^{q,p}$ . Assumimos que a saída e “modos de operação”  $(y(k), \theta(k))$  respectivamente são conhecidos em cada momento  $k$ . Consideramos

$$E(x(0)) = \mu_0, \quad E(x(0)x(0)') = Q_0.$$

Fazemos as seguintes suposições:

- A1)  $\{w(k); k \in \mathbb{T}\}$  é uma seqüência de ruído branco em  $\mathbb{R}^q$ , (isto é,  $E(w(k)) = 0$ ,  $E(w(k)w(k)') = I$ , e  $\{w(0), \dots, w(T)\}$  são vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos,
- A2)  $G_i(k)H_i(k)' = 0$  (esta hipótese pode ser removida, veja a Observação 5.1 em Costa et al. (2005)) e que  $H_i(k)H_i(k)' > 0$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{T}$ ,
- A3) o ruído  $\{w(k); k \in \mathbb{T}\}$  e a cadeia de Markov  $\{\theta(k); k \in \mathbb{T}\}$  são seqüências independentes, e também independentes de  $x(0)$ .

A  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias  $\{y(t), \theta(t); t = 0, \dots, k\}$  será representada por  $\mathcal{F}_k$ . Portanto segue que  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{T}}$  é uma família crescente de  $\sigma$ -álgebras com  $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1} \subset \mathcal{F}$ . Além disso, a medida de probabilidade  $\mathcal{P}$  é tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\theta(k+1) = j | \mathcal{F}_k) &= \mathcal{P}(\theta(k+1) = j | \theta(k)) \\ &= p_{\theta(k)j}(k). \end{aligned} \quad (3)$$

Estaremos interessados em filtros de Markov de “previsão-correção” definidos como segue. A fórmula de “previsão” de um passo é dada, para  $k = 0, \dots, T-1$ , por

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \hat{A}_{\theta(k)}(k)\hat{x}(k|k-1) + \hat{B}_{\theta(k)}(k)y(k) \\ \hat{x}(0|-1) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4)$$

enquanto a parte de “correção”, considerando uma combinação linear da “previsão” de um passo  $\hat{x}(k|k-1)$  e as informações mais atualizadas de  $y(k)$  e  $\theta(k)$ , é dada por

$$\hat{x}(k|k) = \hat{R}_{\theta(k)}(k)\hat{x}(k|k-1) + \hat{S}_{\theta(k)}(k)y(k). \quad (5)$$

Observe que a escolha particular de  $\widehat{R}_i(k) = I - \widehat{S}_i(k)L_i(k)$  levaria à fórmula usual de “previsão-correção”

$\widehat{x}(k|k) = \widehat{x}(k|k-1) + \widehat{S}_{\theta(k)}(k)(y(k) - L_{\theta(k)}(k)\widehat{x}(k|k-1))$ , significando que a “previsão” de uma etapa  $\widehat{x}(k|k-1)$  é corrigida, através do ganho do filtro  $\widehat{S}_{\theta(k)}(k)$ , pelo erro entre os dados reais  $y(k)$  e a previsão de saída de uma etapa  $L_{\theta(k)}(k)\widehat{x}(k|k-1)$ .

Definimos a seguir o problema de filtragem que queremos resolver.

**Problema de filtragem:** Encontre  $\widehat{A}_i(k)$ ,  $\widehat{B}_i(k)$ ,  $\widehat{R}_i(k)$ ,  $\widehat{S}_i(k)$  e  $\widehat{x}_0$  em (4), (5) tal que minimiza

$$\sum_{k=0}^T E(\|e(k|k)\|^2)$$

onde  $e(k|k) = x(k) - \widehat{x}(k|k)$ .

#### 4. RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, fornecemos uma solução para o problema de filtragem apresentado na seção anterior. Para isso primeiro definimos  $\mathbb{J}(k) \triangleq \{i \in \mathbb{N}; \pi_i(k) > 0\}$  (lembre-se do cálculo de  $\pi_i(k)$  em (1)) e as seguintes equações de Riccati a diferenças acopladas entre si:

$$Y_j(k+1) = \sum_{i \in \mathbb{J}(k)} p_{ij}(k) \left[ A_i(k)Y_i(k)A_i(k)' - A_i(k)Y_i(k)L_i(k)'(H_i(k)H_i(k)'\pi_i(k) + L_i(k)Y_i(k)L_i(k)')^{-1} \times L_i(k)Y_i(k)A_i(k)' + \pi_i(k)G_i(k)G_i(k)' \right], \quad (6)$$

$$Y_i(0) = \pi_i(0)(Q_0 - \mu_0\mu_0')$$

Defina também  $\bar{M}_i(k)$  como segue. Para  $i \in \mathbb{J}(k)$ ,

$$\bar{M}_i(k) = -Y_i(k)L_i(k)'(H_i(k)H_i(k)'\pi_i(k) + L_i(k)Y_i(k)L_i(k)')^{-1}, \quad (7)$$

e  $\bar{M}_i(k) = 0$  para  $i \notin \mathbb{J}(k)$ . Finalmente defina  $M_i(k) = A_i(k)\bar{M}_i(k)$ . Após algumas manipulações algébricas pode-se ver que  $Y_i(k)$  em (6) também pode ser escrito como

$$Y_j(k+1) = \sum_{i \in \mathbb{J}(k)} p_{ij}(k) \left[ (A_i(k) + M_i(k)L_i(k))Y_i(k)(A_i(k) + M_i(k)L_i(k))' + \pi_i(k)(G_i(k) + M_i(k)L_i(k))(G_i(k) + M_i(k)L_i(k))' \right], \quad (8)$$

e de (8) é fácil ver que  $Y_i(k) \geq 0$  para todos os  $i \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{T}$ , de modo que, da suposição A2) e do fato de que  $\pi_i(k) > 0$  sempre que  $i \in \mathbb{J}(k)$ , as inversas em (6) e (7) estão bem definidas.

Definimos a seguir o seguinte filtro. A equação de “previsão” de um passo é dada, para  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , por

$$\begin{cases} \widehat{x}_e(k+1|k) = A_{\theta(k)}(k)\widehat{x}_e(k|k-1) - M_{\theta(k)}(k)(y(k) - L_{\theta(k)}(k)\widehat{x}_e(k|k-1)) \\ \widehat{x}_e(0|-1) = E(x(0)) = \mu_0 \end{cases} \quad (9)$$

enquanto a equação de “correção” é dada, para  $k = 0, 1, \dots, T$ , por

$$\widehat{x}_e(k|k) = \widehat{x}_e(k|k-1) - \bar{M}_{\theta(k)}(k)(y(k) - L_{\theta(k)}(k)\widehat{x}_e(k|k-1)). \quad (10)$$

Os erros associados com os estimadores dados em (9) e (10) são definidos por

$$\widetilde{x}_e(k|k-1) = x(k) - \widehat{x}_e(k|k-1) \quad (11)$$

$$\widetilde{x}_e(k|k) = x(k) - \widehat{x}_e(k|k) \quad (12)$$

de modo que, de (2) e (9)-(12) concluímos que

$$\widetilde{x}_e(k+1|k) = [A_{\theta(k)}(k) + M_{\theta(k)}(k)L_{\theta(k)}(k)]\widetilde{x}_e(k|k-1) + [G_{\theta(k)}(k) + M_{\theta(k)}(k)H_{\theta(k)}(k)]w(k) \quad (13)$$

$$\widetilde{x}_e(0|-1) = x(0) - E(x(0)) = x(0) - \mu_0$$

e que

$$\widetilde{x}_e(k|k) = [I + \bar{M}_{\theta(k)}(k)L_{\theta(k)}(k)]\widetilde{x}_e(k|k-1) + \bar{M}_{\theta(k)}(k)H_{\theta(k)}(k)w(k). \quad (14)$$

Defina, para  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{Y}_i(k) = E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widetilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}).$$

De (13), Hipóteses A1), A3) e Proposição 3.35 2) em Costa et al. (2005), temos que

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i(k+1) &= \sum_{i=1}^N p_{ij}(k) \left[ (A_i(k) + M_i(k)L_i(k))\bar{Y}_i(k)(A_i(k) + M_i(k)L_i(k))' + \pi_i(k)(G_i(k) + M_i(k)L_i(k))(G_i(k) + M_i(k)L_i(k))' \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_i(0) = \pi_i(0)(Q_0 - \mu_0\mu_0').$$

Notando que

$$\bar{Y}_i(k) = E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widetilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0$$

sempre que  $\pi_i(k) = 0$  podemos ver de (8) e (15), e aplicando indução em  $k$ , que

$$Y_i(k) = \bar{Y}_i(k) = E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widetilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}). \quad (16)$$

Um teorema chave para derivar nossos resultados é o seguinte:

**Teorema 1.** Para  $\widehat{x}(k|k-1)$ ,  $\widehat{x}(k|k)$  como em (4), (5),  $\widehat{x}_e(k|k-1)$ ,  $\widehat{x}_e(k|k)$  como em (9), (10), e  $\widetilde{x}_e(k|k-1)$ ,  $\widetilde{x}_e(k|k)$  como em (11), (12), temos para  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{T}$  que

$$E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widetilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0, \quad (17)$$

$$E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widehat{x}(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0, \quad (18)$$

e

$$E(\widetilde{x}_e(k|k)\widehat{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0, \quad (19)$$

$$E(\widetilde{x}_e(k|k)\widehat{x}(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0. \quad (20)$$

**Prova.** A prova de (17) e (18) segue do Teorema 5.2 em Costa et al. (2005). Vamos provar (19) e (20). Basta mostrar (20) pois (19) é um caso particular de (20) quando tomamos  $\widehat{x}(k|k) = \widehat{x}_e(k|k)$ . Lembramos de (14) e (5) que

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_e(k|k) &= [I + \bar{M}_{\theta(k)}(k)L_{\theta(k)}(k)]\widetilde{x}_e(k|k-1) \\ &\quad + \bar{M}_{\theta(k)}(k)H_{\theta(k)}(k)w(k), \end{aligned}$$

$$\widehat{x}(k|k) = \widehat{R}_{\theta(k)}(k)\widehat{x}(k|k-1) + \widehat{S}_{\theta(k)}(k)y(k),$$

de forma que,

$$\begin{aligned} E(\widetilde{x}_e(k|k)\widehat{x}(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= \\ &= [I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]E(\widetilde{x}_e(k|k-1)\widehat{x}(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})\widehat{R}_i(k)' \\ &\quad + [I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]E(\widetilde{x}_e(k|k-1)y(k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})\widehat{S}_i(k)' \\ &\quad + \bar{M}_i(k)H_i(k)E(w(k)\widehat{x}(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})\widehat{R}_i(k)' \\ &\quad + \bar{M}_i(k)H_i(k)E(w(k)y(k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})\widehat{S}_i(k)'. \end{aligned} \quad (21)$$

Vamos considerar cada um dos quatro termos do lado direito de (21). Notamos que o primeiro é igual a zero de

(18). Da suposição de independência A3) temos que  $w(k)$  é independente de  $\hat{x}(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  pois por definição (veja (9))  $\hat{x}(k|k-1)$  depende dos valores anteriores de  $\theta(s)$ ,  $w(s)$ ,  $s = 0, \dots, k-1$  e  $x(0)$ , e  $w(k)$  e  $\theta(k)$  são independentes pela hipótese A3). A partir disso e lembrando que  $E(w(k)) = 0$  concluímos que

$$E(w(k)\hat{x}(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = E(w(k))E(\hat{x}(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0$$

mostrando que o terceiro termo de (21) também é igual a zero. Para o segundo termo, notamos primeiro de (11) que

$$x(k) = \tilde{x}_e(k|k-1) + \hat{x}_e(k|k-1)$$

de maneira que podemos escrever que

$$y(k) = L_{\theta(k)}(k)(\tilde{x}_e(k|k-1) + \hat{x}_e(k|k-1)) + H_{\theta(k)}(k)w(k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_e(k|k-1)y(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= \\ E(\tilde{x}_e(k|k-1)\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})L_i(k)' &+ \\ E(\tilde{x}_e(k|k-1)\hat{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})L_i(k)' &+ \\ E(\tilde{x}_e(k|k-1)w(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})H_i(k)' &. \end{aligned} \quad (22)$$

De (17) temos que  $E(\tilde{x}_e(k|k-1)\hat{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0$  e por argumentos semelhantes como acima, temos que  $w(k)$  e  $\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  são variáveis aleatórias independentes (lembre-se que  $\tilde{x}_e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}_e(k|k-1)$ , e que  $x(k)$ ,  $\hat{x}_e(k|k-1)$ , depende apenas dos valores anteriores de  $\theta(s)$ ,  $w(s)$ ,  $s = 0, \dots, k-1$ , e  $x(0)$ ), de modo que

$$\begin{aligned} E(w(k)\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= \\ E(w(k))E(\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= 0. \end{aligned}$$

De (22) e (16), concluímos que o valor esperado no segundo termo do lado direito de (21) pode ser escrito como

$$E(\tilde{x}_e(k|k-1)y(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = Y_i(k)L_i(k)'. \quad (23)$$

Finalmente, observando os mesmos argumentos acima que  $w(k)$  e  $x(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  são variáveis aleatórias independentes, de modo que  $E(w(k)x(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0$ , temos que o valor esperado no quarto termo da lado direito de (21) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E(w(k)y(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= E(w(k)x(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})L_i(k)' + \\ E(w(k)w(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})H_i(k)' &= \\ E(w(k)w(k))E(\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})H_i(k)' &= \pi_i(k)H_i(k)'. \end{aligned} \quad (24)$$

Combinando (21), (22), (23), (24) concluímos que

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_e(k|k)\hat{x}(k|k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= \\ ([I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]Y_i(k)L_i(k)' &+ \\ \bar{M}_i(k)(\pi_i(k)H_i(k)H_i(k)'))\hat{S}_i(k)' &= (Y_i(k)L_i(k)' + \\ \bar{M}_i(k)(L_i(k)Y_i(k)L_i(k)' + \pi_i(k)H_i(k)H_i(k)'))\hat{S}_i(k)'. \end{aligned} \quad (25)$$

De (7) é imediato que para  $i \in \mathbb{J}(k)$ ,

$$Y_i(k)L_i(k)' = \bar{M}_i(k)(H_i(k)H_i(k)'\pi_i(k) + L_i(k)Y_i(k)L_i(k)) \quad (26)$$

de modo que de (25) e (26) obtemos que

$$E(\tilde{x}_e(k|k)\hat{x}(k|k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0,$$

completando a prova.

Defina para  $i \in \mathbb{J}(k)$ ,

$$\begin{aligned} X_i(k) &= Y_i(k) - Y_i(k)L_i(k)'(H_i(k)H_i(k)'\pi_i(k) \\ &+ L_i(k)Y_i(k)L_i(k))^{-1}L_i(k)Y_i(k) \end{aligned}$$

e  $X_i(k) = 0$  para  $i \notin \mathbb{J}(k)$ . Claramente temos que  $X_i(k) \leq Y_i(k)$  (lembre-se que  $Y_i(k) = 0$  para  $i \notin \mathbb{J}(k)$ ).

Proposição 2. Temos que

$$E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = X_i(k).$$

**Prova.** Consideremos  $i \in \mathbb{J}(k)$  pois, caso contrário, é imediato que  $E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0$ . De (14) segue que

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= [I + \bar{M}_i(k)L_i(k)] \\ \times E(\tilde{x}_e(k|k-1)\tilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &[I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]' + \\ [I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]E(\tilde{x}_e(k|k-1)w(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &H_i(k)'\bar{M}_i(k)' + \\ \bar{M}_i(k)H_i(k)E(w(k)\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]' + \\ \bar{M}_i(k)H_i(k)E(w(k)w(k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &H_i(k)'\bar{M}_i(k)'. \end{aligned} \quad (27)$$

Como discutido anteriormente, temos que  $w(k)$  e  $\tilde{x}_e(k|k-1)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  são variáveis aleatórias independentes, e como  $E(w(k)) = 0$  segue que o segundo e terceiro termos em (27) são zero. A partir disso e lembrando que  $Y_i(k) = E(\tilde{x}_e(k|k-1)\tilde{x}_e(k|k-1)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})$  e que

$$\begin{aligned} E(w(k)w(k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= E(w(k)w(k)')E(\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) \\ &= I\pi(k) \end{aligned}$$

da independência de  $w(k)$  e  $\theta(k)$ , segue que

$$E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = [I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]Y_i(k)[I + \bar{M}_i(k)L_i(k)]' + \bar{M}_i(k)(\pi_i(k)H_i(k)H_i(k)')\bar{M}_i(k)'. \quad (28)$$

Após algumas manipulações algébricas em (28) obtemos o resultado desejado.

O próximo teorema mostra que uma solução para o problema de filtragem ótima proposto na seção 3 pode ser obtida a partir das equações recursivas de Riccati de filtragem  $Y(k) = (Y_1(k), \dots, Y_N(k)) \in \mathcal{H}^{n+}$  como em (6) e ganhos  $M(k) = (M_1(k), \dots, M_N(k)) \in \mathcal{H}^{p,n}$  e  $\bar{M}(k) = (\bar{M}_1(k), \dots, \bar{M}_N(k)) \in \mathcal{H}^{p,n}$  como em (7):

**Teorema 3.** Uma solução ótima para o problema de filtragem de correção e previsão proposto na section 3 é:  $\hat{x}_0^{op} = \mu_0$  e

$$\hat{A}_i^{op}(k) = A_i(k) + M_i(k)L_i(k); \quad (29)$$

$$\hat{B}_i^{op}(k) = -M_i(k); \quad (30)$$

$$\hat{R}_i^{op}(k) = I + \bar{M}_i(k)L_i(k); \quad (31)$$

$$\hat{S}_i^{op}(k) = -\bar{M}_i(k). \quad (32)$$

O custo ótimo associado é:

$$\sum_{k=0}^T \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i(k)).$$

**Prova.** Em primeiro lugar, observe que  $\hat{x}_e(k|k-1)$  e  $\hat{x}_e(k|k)$  conforme definido em (9), (10), corresponde ao filtro de previsão-correção associado a (29)-(32). Notar que

$$\begin{aligned} E(\|e(k|k)\|^2) &= \sum_{i=1}^N E(e(k|k)'e(k|k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{tr} E(e(k|k)e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) \end{aligned}$$

e que podemos escrever que

$$\begin{aligned} e(k|k) &= x(k) - \hat{x}_e(k|k) + \hat{x}_e(k|k) - \hat{x}(k|k) \\ &= \tilde{x}_e(k|k) + v(k|k) \end{aligned}$$

onde  $v(k|k) = \hat{x}_e(k|k) - \hat{x}(k|k)$ . Do Teorema 1 temos que

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= 0, \\ E(\tilde{x}_e(k|k)\hat{x}(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) &= 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$E(\tilde{x}_e(k|k)v(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = 0.$$

Lembramos que da Proposição 2 temos que

$$E(\tilde{x}_e(k|k)\tilde{x}_e(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) = X_i(k).$$

Segue que

$$\begin{aligned} E(\|e(k|k)\|^2) &= \sum_{i=1}^N \text{tr} \left( E \left( (\tilde{x}_e(k|k) + v(k|k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\tilde{x}_e(k|k) + v(k|k))' \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i(k)) + E(\|v(k|k)\|^2) + \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(E(\tilde{x}_e(k|k)v(k|k)'\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}})) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i(k)) + E(\|v(k|k)\|^2) \geq \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i(k)) \end{aligned}$$

com a escolha ótima sendo  $v(k|k) = 0$ , completando a prova do teorema.

Comentário 1. Para o caso sem saltos ( $N = 1$ ) temos que o filtro ótimo obtido no Teorema 3 coincide com o filtro de Kalman tradicional (ver, por exemplo, Anderson and Moore (2005)).

Comentário 2. Observe que as equações recursivas de Riccati  $Y(k) \in \mathcal{H}^{n+}$  in (6) não são dependentes do caminho da amostra e podem ser facilmente avaliadas off-line, de modo que o filtro pode ser prontamente implementado on-line usando os ganhos de filtro pré-computados  $M(k) \in \mathcal{H}^{p,n}$ ,  $\bar{M}(k) \in \mathcal{H}^{p,n}$  in (7). Por outro lado, pode-se aplicar o filtro de Kalman variante no tempo para obter o melhor estimador linear de  $x(k)$ , pois os valores de  $\theta(k)$  são conhecidos ao longo do tempo e, neste caso, (2) pode ser visto como um sistema linear variante no tempo. Mas observe que, como apontado em Ji and Chizeck (1990), o cálculo off-line dos ganhos para o filtro de Kalman variável no tempo pode ser numericamente impraticável, pois esses cálculos seriam  $\theta(k)$  dependentes do caminho da amostra, e o número de caminhos de amostra cresce exponencialmente no tempo. Alternativamente, pode-se calcular os ganhos à medida que os valores de  $\theta(k)$  se tornam disponíveis, o que aumentaria o cálculo on-line, sendo assim também numericamente indesejável.

## 5. EXEMPLO - RECEPTOR SOLAR TÉRMICO

Consideramos o receptor solar térmico, introduzido em Sworder and Rogers (1983), e também estudado em Costa et al. (2005), com as seguintes matrizes do sistema invariante no tempo: para  $i \in \mathbb{N}$ ,  $L_i = 1$  e

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{A_1}{A_2} & G'_1 & G'_2 & H'_1 & H'_2 \\ \hline 0.8353 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ \hline 0.9646 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{array} \right].$$

O modo 1 representa um ambiente ensolarado, enquanto o modo 2, nublado. A matriz de probabilidade de transição  $\mathbb{P}$  é

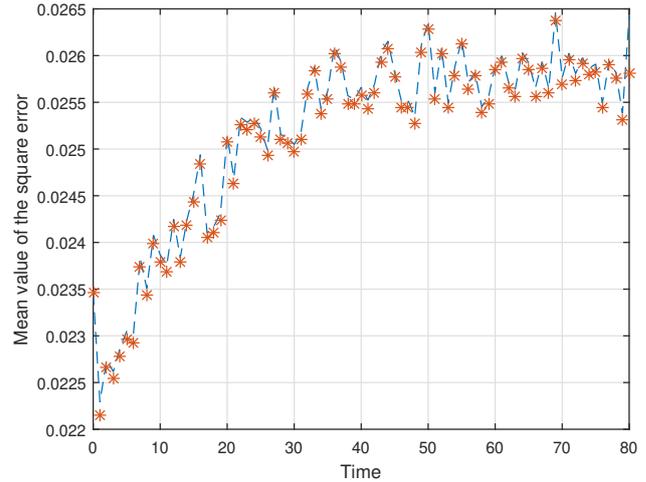


Figura 1. Valor médio do erro quadrado para uma simulação de Monte Carlo de 20.000 amostras, considerando o filtro de previsão-correção de Markov obtido neste artigo (linha contínua), e o tradicional (previsão-correção) filtro de Kalman variável no tempo (linha em estrela)

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9767 & 0.0233 \\ 0.0435 & 0.9565 \end{bmatrix}.$$

A condição inicial é uma variável aleatória  $x(0)$  com média  $\mu_0 = 1$ , e segundo momento  $Q_0 = 1.5$ . O tempo final é  $T = 80$ , e a probabilidade inicial para  $\theta(0)$  é  $\pi(0)' = [0.5 \ 0.5]$ . Na Figura 1 mostramos o valor médio do erro quadrado para uma simulação de Monte Carlo de 20000 amostras, considerando o filtro de previsão-correção de Markov obtido neste artigo, e o tradicional filtro de Kalman variável no tempo (previsão-correção), sendo os ganhos calculados on-line. Podemos ver na figura que ambos os filtros tiveram um comportamento muito semelhante. Também calculamos o valor médio do erro quadrado total para ambos os sistemas. Para o filtro de Kalman variável no tempo foi de 2,0339, enquanto para o filtro de previsão-correção de Markov foi de 2,0402, ou seja, apenas 0,31% maior que o filtro de Kalman. O valor teórico ótimo associado obtido do Teorema 3 seria 2,0389, próximo ao (2,0402) derivado das simulações de Monte Carlo. Por fim, vale ressaltar que para o filtro de predição de um passo o erro total seria de 17,1433, muito superior ao da fórmula de correção.

## 6. CONCLUSÃO

Este artigo estuda o problema de filtragem de MJLS considerando a disponibilidade da saída do sistema  $y(k)$  bem como do parâmetro de Markov  $\theta(k)$ . Consideramos a classe de filtros de Markov de modo que a solução ótima pode ser obtida a partir de um conjunto de equações a diferenças de Riccati acopladas entre si. Este problema foi estudado em Costa et al. (2005) considerando filtros de “previsão” de um passo, e o objetivo principal do presente artigo foi revisar este problema considerando também a fórmula de “correção”, ou seja, uma filtro que leva em consideração as informações mais atualizadas de  $y(k)$  e  $\theta(k)$  na estimativa do estado  $x(k)$ . Para derivar nosso resultado tivemos que mostrar primeiro um resultado chave que é a

ortogonalidade entre o erro de estimação do filtro ótimo com qualquer outro estimador de filtro Markoviano (ver Teorema 1), um resultado similar ao encontrado no filtro de Kalman padrão. A partir desse resultado, derivamos no Teorema 3 o filtro ótimo para o problema de filtragem na forma “previsão-correção”. Uma possível linha de pesquisa futura seria considerar o problema a horizonte infinito e o caso com informação imperfeita do parâmetro de Markov.

## REFERÊNCIAS

- Anderson, B.D.O. and Moore, J.B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York City.
- Boukas, E.K. (2006). *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Birkhäuser Basel, New York City.
- Chang, X.H. and Yang, G. (2013). Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time systems using parameter-dependent lyapunov functions. *Journal of Control Theory and Applications*, 11, 122–127.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Marques, R.P. (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer-Verlag London, New York City.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Todorov, M.G. (2013). *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York City.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Todorov, M.G. (2015). A detector-based approach for the  $H_2$  control of Markov jump linear systems with partial information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(5), 1219–1234.
- Costa, O.L.V. and Tuesta, E.F. (2004).  $H_2$ -control and the separation principle for discrete-time Markovian jump linear systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16(4), 320–350.
- de Oliveira, A.M. and Costa, O.L.V. (2017).  $H_2$ -filtering for discrete-time hidden Markov jump systems. *International Journal of Control*, 90(3), 599–615.
- de Oliveira, A.M. and Costa, O.L.V. (2018). Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering for Markov jump linear systems. *International Journal of Systems Science*, 49(15), 3023–3036.
- de Oliveira, A.M. and Costa, O.L.V. (2020). An iterative approach for the discrete-time dynamic control of Markov jump linear systems with partial information. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(2), 495–511.
- Dragan, V., Morozan, T., and Stoica, A.M. (2010). *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems (Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering)*. Springer-Verlag.
- Dufour, F. and Elliott, R. (1998). Adaptive control of linear systems with Markov perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3), 351–372.
- Ji, Y. and Chizeck, H.J. (1990). Jump linear quadratic gaussian control - steady-state solution and testable conditions. *Control-Theory and Advanced Technology*, 6(3), 289–319.
- Mahmoud, M., Jiang, J., and Zhang, Y. (2003). *Active Fault Tolerant Control Systems - Stochastic Analysis and Synthesis*. Springer Verlag, Germany.
- Mariton, M. (1989). Detection delays, false alarm rates and the reconfiguration of control systems. *International Journal of Control*, 49, 981–992.
- Oliveira, A.M. and Costa, O.L.V. (2017).  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering for Markov jump linear systems with partial information on the jump parameter. *IFAC Journal of Systems and Control*, 1, 13–23.
- Shen, Y., Wu, Z., Shi, P., Su, H., and Huang, T. (2019). Asynchronous filtering for Markov jump neural networks with quantized outputs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49(2), 433–443.
- Shi, P. and Li, F. (2015). A survey on Markovian jump systems: Modeling and design. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13(1), 1–16.
- Sworder, D.D. and Rogers, R.O. (1983). An LQG solution to a control problem with solar thermal receiver. *TAC*, 28, 971–978.
- Tao, J., Xiao, Z., Rao, H., Wu, J., Lu, R., Shi, P., and Wang, X. (2021, in print.). Event-triggered and asynchronous reduced-order filtering codesign for fuzzy Markov jump systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. doi:10.1109/TSMC.2021.3079467.
- Todorov, M.G., Fragoso, M.D., and Costa, O.L.V. (2018). Detector-based  $H_\infty$  results for discrete-time Markov jump linear systems with partial observations. *Automatica*, 91, 159–172.
- Val, J.B., Geromel, J.C., and Gonçalves, A.P.C. (2002). The  $H_2$ -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state. *Automatica*, 38(2), 343–349.
- Wang, X.L. and Yang, G.H. (2019). Event-triggered  $H_\infty$  filtering for discrete-time t-s fuzzy systems via network delay optimization technique. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49(10), 2026–2035.
- Wu, Z.G., Shen, Y., Su, H., Lu, R., and Huang, T. (2019).  $H_2$  performance analysis and applications of 2-D hidden Bernoulli jump system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49(10), 2097–2107.
- Xu, Z., Su, H., Xu, H., and Wu, Z.G. (2015). Asynchronous  $H_\infty$  filtering for discrete-time Markov jump neural networks. *Neurocomputing*, 157, 33–40.
- Zhao, Y., Zhang, T., and Zhang, W. (2020). Asynchronous  $H_\infty$  control for uncertain singular stochastic Markov jump systems with multiplicative noise based on hidden Markov mode. *Journal of the Franklin Institute*, 357(9), 5226–5247.