

## Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de um conversor boost com restrições nos estados e controle <sup>\*</sup>

Luiz Carlos Cardozo Magno <sup>\*</sup> Humberto Xavier Araújo <sup>\*</sup>  
Caio dos S. Magalhães <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> PPGEE, Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA (e-mails:  
luiz.cardozo@ufba.br, humberto.araujo@ufba.br, caio.santos@ufba.br).

**Abstract:** In this paper, a new design approach is proposed for state feedback robust  $\mathcal{H}_\infty$  controllers to control a DC-DC boost converter subject to state and control constraints, in the presence of parametric polytopic uncertainties. The resistances present in the inductor and in the capacitor are taken into account in the model of the converter. The results of numerical simulations demonstrate the viability of the proposed method.

**Resumo:** Neste trabalho, é proposta uma nova abordagem de projeto de controladores robustos  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado para controle de um conversor CC-CC elevador *boost* sujeito a restrições nos estados e no controle, na presença de incertezas paramétricas do tipo politopo. A resistência presente no indutor e no capacitor são levadas em consideração na modelagem do conversor. Os resultados das simulações numéricas demonstram a viabilidade do método proposto.

**Keywords:** Boost converter;  $\mathcal{H}_\infty$  control; parametric uncertainties; state and control constraints; bounded disturbances; LMI.

**Palavras-chaves:** Conversor boost; controle  $\mathcal{H}_\infty$ ; incertezas paramétricas; restrições nos estados e controle; perturbações limitadas; LMI.

### 1. INTRODUÇÃO

Os conversores de potência são sistemas importantes utilizados para tratamento de energia de uma fonte primária. Dentre os conversores, o conversor elevador CC-CC *boost* tem recebido bastante atenção nas áreas acadêmica e industrial, sendo utilizado em diversas aplicações como fontes de energia renovável (de Brito et al., 2013), (Agorreta et al., 2011), (Walker and Sernia, 2002), (Li and Shi, 2019), veículos elétricos (Chang and Liaw, 2009), (Oulad-Abbou et al., 2018), UPS (*uninterruptible power supplies*) (Mohan, 2003), (Vieira and Pires, 2016) e célula combustível em (Na et al., 2011) e (Ramírez-Murillo et al., 2018).

O conversor CC-CC elevador *boost* tem como objetivo adequar o nível de tensão de uma fonte de energia às especificações da carga. Para isto, um sistema de controle deve ser projetado de modo que assegure a estabilidade do conversor, e satisfaça especificações de desempenho associadas à resposta transitória como, por exemplo, sobressinal e tempo de acomodação, e rejeite perturbações tanto na tensão de alimentação como na corrente da carga.

Em abordagens de controle convencionais, é comum a utilização do modelo médio do conversor e, posteriormente, a sua linearização em um determinado ponto de operação. Geralmente, esses procedimentos não levam em consideração as incertezas nos parâmetros do conversor e tampouco a saturação no sinal de controle e as restrições nos estados.

<sup>\*</sup> Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES).

Consequentemente, essas abordagens podem resultar em comportamentos indesejados em malha fechada.

Vários trabalhos abordam o problema de controle robusto dos conversores CC-CC como, por exemplo, Ollala et al. (2009), Maccari-Jr. et al. (2012), Khayat et al. (2017), Magalhães et al. (2020). Entretanto, nenhuma das referências citadas levam em consideração as restrições nos estados e no sinal de controle explicitamente no projeto do controlador. (Maccari-Jr. et al. (2012)) trata do controle robusto  $\mathcal{H}_2$  do conversor *boost* com a resistência de carga,  $R$ , razão cíclica complementar,  $D'$ , e tensão de alimentação,  $v_g$ , como parâmetros incertos, sem levar em consideração a resistência série equivalente do capacitor,  $R_C$ , e a resistência série equivalente do indutor,  $R_L$ , na modelagem. (Khayat et al. (2017)) propõe controladores  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  para o conversor *boost*, considerando a capacitância  $C$ , a indutância  $L$  e razão cíclica  $D$  como parâmetros incertos com a presença de  $R_C$  e  $R_L$  no modelo matemático.

Este trabalho propõe uma nova abordagem para o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado, levando-se em consideração as restrições nos estados e controle. É uma abordagem baseada no conceito de invariância positiva e utiliza as desigualdades matriciais lineares (LMIs) e a modelagem proposta em (Ollala et al. (2011)). Também leva em conta as resistências internas do capacitor e indutor na modelagem do conversor (Magalhães et al. (2020)). Como medida de desempenho do sistema de malha fechada, adota-se o custo garantido da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . É possível então estabelecer um compromisso

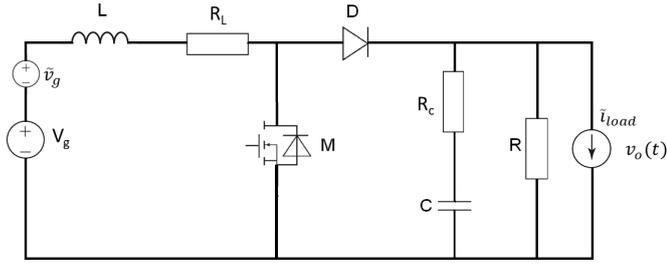


Figura 1. Circuito do conversor *boost* com  $R_L$  e  $R_C$ .

entre a rejeição de perturbações (tensão de alimentação e corrente de carga) e especificações de resposta transitória que podem ser obtidas através da alocação de polos.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 descreve a modelagem do conversor CC-CC *boost*. Na Seção 3, a abordagem de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições é apresentada. Nesta seção, uma condição suficiente para a invariância positiva é deduzida. Os resultados da aplicação do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  são apresentados na Seção 4. E as conclusões são tratadas na Seção 5.

## 2. O CONVERSOR BOOST

Um conversor CC-CC recebe uma tensão de alimentação de uma fonte CC e converte a tensão de alimentação em outro nível de tensão. Assim, pode-se aumentar ou diminuir o valor da tensão de alimentação por meio da saída do conversor.

Este trabalho trata do conversor *boost* mostrado na Figura 1, e tem a função de elevar o valor da tensão de alimentação  $V_g$  por meio da tensão de saída  $V_o$ .

Além disso, estão presentes  $R_L$  associada ao indutor de indutância  $L$ , conhecida como indutor ESR (*Equivalent Series Resistance*), e  $R_C$  associada ao filtro capacitivo de capacitância  $C$  e conhecida como capacitor ESR (*Equivalent Series Resistance*).  $\tilde{i}_{load}$  é uma fonte de corrente fictícia utilizada para representar uma perturbação definida pela corrente de carga.

Supõe-se que o conversor *boost* funcionará em modo de condução contínua (CCM). De modo que a chave MOSFET será controlada por um controlador PWM que está fechado por  $DT$  segundos e aberta  $(1-D)T$  segundos.  $D$  e  $T$  são a razão cíclica e o período de chaveamento, respectivamente.

A teoria do modelo médio é utilizada para obter um modelo matemático para conversores CC-CC, calculando a média das equações dinâmicas dos circuitos equivalentes em chave aberta e chave fechada (Erikson and Maksimovic, 1999). O modelo em espaço de estados é escrito da seguinte forma.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_\omega\omega(t) + B_uu(t), \\ z(t) = C_zx(t) + D_\omega\omega(t) + D_uu(t), \end{cases} \quad (1)$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_\omega \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_z \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $D_\omega \in \mathbb{R}^{q \times l}$  e  $D_u \in \mathbb{R}^{q \times m}$ .  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  é vetor de controle,  $\omega \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de perturbação e  $z \in \mathbb{R}^q$  é o vetor da saída controlada.

As variáveis de estado são definidas como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \\ x_{int}(t) \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_g(t) \\ \tilde{i}_{load}(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = d(t).$$

Para obter erro nulo em regime permanente entre a tensão de referência  $V_{ref}$  e a tensão de saída  $v_o(t)$ , o estado  $x_{int}(t)$  correspondente à integral do erro entre  $V_{ref}$  e  $v_o(t)$  é considerado.

Em algumas aplicações do conversor *boost*, ocorrem perturbações na tensão de alimentação e na corrente de carga do sistema. Estas perturbações são representadas no modelo matemático por  $\tilde{v}_g(t)$  e  $\tilde{i}_{load}$ , respectivamente. Considera-se a tensão de alimentação  $v_g$  composta por uma componente CC  $V_g$  e uma pequena perturbação CA  $\tilde{v}_g(t)$ , cujo efeito na saída deve ser mitigado junto com o efeito de  $\tilde{i}_{load}$ .

As matrizes de espaço de estados obtidas com o modelo médio, considerando-se  $R_L$  e  $R_C$ , e linearizadas em torno de um ponto de equilíbrio, são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(R_L R + R_L R_C + D' R_C R)}{(R_C + R)L} & -\frac{D'R}{(R_C + R)L} & 0 \\ \frac{D'R}{(R_C + R)C} & -\frac{1}{(R_C + R)C} & 0 \\ \frac{D'R_C R}{(R_C + R)} & \frac{R}{(R_C + R)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D'R_C R}{(R_C + R)L} \\ 0 & -\frac{R}{(R_C + R)C} \\ 0 & -\frac{R_C R}{(R_C + R)} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} \frac{(R_C + D'R)V_C}{(R_C + R)D'L} \\ \frac{V_C}{(R_C + R)D'C} \\ -\frac{R_C V_C}{(R_C + R)D'} \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} \frac{D'R_C R}{R_C + R} & \frac{R}{R_C + R} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_C R}{R_C + R} \end{bmatrix},$$

$$D_u = \begin{bmatrix} -\frac{R_C V_C}{(R_C + R)D'} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que  $D$  é a razão cíclica média estacionária, cujo valor está sempre entre 0 e 1, e  $D' = 1 - D$  é o seu valor complementar. Os pontos de equilíbrio dos estados médios  $v_C$  e  $i_L$  são, respectivamente, dados por:

$$V_C = \frac{D'R(R_C + R)V_G}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2}, \quad (3)$$

$$I_L = \frac{V_C}{D'R} = \frac{(R_C + R)V_G}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2}. \quad (4)$$

Deve-se salientar que, sendo  $v_o = v_C + R_C i_C = v_C + R_C C \dot{v}_C$ , então a saída  $V_o$  em estado estacionário é igual a  $V_C$ .

### 2.1 Politopo convexo de incertezas

Nesta formulação, os parâmetros  $D'$ ,  $R$ ,  $R_C$  e  $C$  são considerados incertos ou variam lentamente no tempo devido ao envelhecimento do conversor.

As matrizes no espaço de estados dependem destes parâmetros. Eles podem ser agrupados em um vetor de incertezas  $p = [p_1, \dots, p_{n_p}]$ . Os limites de cada parâmetro são conhecidos, ou seja,  $p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$ . Assim o vetor  $p$  pertencerá ao conjunto convexo  $C_o(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_L)$ , em que  $\mathcal{G}_i$  representa os vértices do politopo convexo com  $L = 2^{n_p}$ .

Além disso, se as matrizes dependem linearmente de  $p$ , então existe outro envelope convexo  $C_o(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_L)$  que contém todas as possíveis combinações do sistema incerto, que pode ser expresso por:

$$[A(p), B_w(p), \dots, D_u(p)] \in C_o(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_L) = \left\{ \sum_{i=1}^L \sigma_i \mathcal{G}_i, \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \sigma_i = 1 \right\}. \quad (5)$$

Entretanto, como pode ser visto em (2), a relação entre as matrizes de entrada e os parâmetros incertos é não linear para o conversor *boost*, o que impede a aplicação direta de (5). Para tornar isso possível, os seguintes parâmetros são definidos:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{R_C + R}, \quad \mu = \frac{R}{R_C + R}, \quad \eta = \frac{D'R}{R_C + R}, \\ \delta &= \frac{V_C R}{(R_C + R)D'V_g} = \frac{R^2}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2} \\ \epsilon &= \frac{(R_C + D'R)V_C}{(R_C + R)D'V_g} = \frac{D'R^2 + R_C R}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2} \end{aligned} \quad (6)$$

As matrizes no espaço de estado podem ser reescritas como:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(R_L + R_C)\eta}{L} & -\frac{\eta}{L} & 0 \\ \frac{\eta}{C} & -\frac{\beta}{C} & 0 \\ R_C \eta & \mu & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_C \eta}{L} \\ 0 & -\frac{\mu}{C} \\ 0 & -R_C \mu \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} \frac{V_g \epsilon}{L} \\ -\frac{V_g \delta}{R_C} \\ -\frac{R_C V_g \delta}{R} \end{bmatrix},$$

$$C_z = [R_C \eta \quad \mu \quad 0], \quad D_w = [0 \quad -R_C \mu],$$

$$D_u = \begin{bmatrix} -\frac{R_C V_g \delta}{R} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Ainda existem não-linearidades envolvendo parâmetros incertos, como  $R_C$ ,  $R$  e  $C$  em (7).

A contribuição de Magalhães et al. (2020) foi isolar  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ , parâmetros que dependem principalmente de  $D'$ . Uma vez que  $R_C$  e  $R_L$  tendem a ser muito menores que  $R$ , considerando os efeitos do envelhecimento e da

temperatura, estes três parâmetros são aproximados para  $\eta \approx D'$ ,  $\epsilon \approx \frac{1}{D'}$  e  $\delta \approx \frac{1}{D'^2}$ .

Embora essas aproximações não sejam usadas diretamente, elas sugerem um envelope convexo menos conservador. Uma abordagem similar é empregada em Ollala et al. (2011), em que um envelope convexo ótimo é deduzido para cobrir uma linha tridimensional que representa as incertezas de  $D'$ . Entretanto nosso problema não desconsidera o efeito de  $R_L$  e  $R_C$ , assim uma nova função de incertezas é proposta:

$$f(D', R_C, R) = \left\{ (\eta, \epsilon, \delta) : D' \in [\underline{D}', \overline{D}'], R_C \in [\underline{R}_C, \overline{R}_C], R \in [\underline{R}, \overline{R}] \right\}. \quad (8)$$

Uma função multivariável é representada em (8), sua representação gráfica no  $\mathbb{R}^3$  é uma série parametrizada de curvas que formam um sólido.

A função  $f(D', R_C, R)$  considera  $D' \in [0, 3; 1, 0]$ ,  $R_C \in [0, 2; 0, 6]\Omega$ ,  $R \in [20; 50]\Omega$  e  $R_L = 0, 4$ . A opção mais simples para cobertura politópica possui 8 vértices do hiper-retângulo que são definidos por 8 possíveis combinações entre valores extremos de cada parâmetro  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ .

Embora tecnicamente correta, esta estratégia está longe de ser ótima e pode levar à síntese de um controlador infactível devido ao excesso de conservadorismo.

Um método mais funcional é proposto por Magalhães et al. (2020) e consiste na definição de vértices de uma cobertura ótima do plano de projeções. Uma vez que existem 3 variáveis incertas e 8 combinações possíveis de valores limite, os primeiros 8 vértices são considerados como limites do sólido. Apenas mais 2 vértices são necessários para construir um envelope convexo e eles podem ser obtidos da cobertura ótima de cada plano de projeção.

Os 10 vértices do envelope convexo são mostrados na Tabela 1. Embora o novo politopo tenha muitos vértices, o politopo de 8 vértices têm volume muito menor (0,4356 contra 13,4258), o que mostra uma enorme redução do conservadorismo de modelagem.

Tabela 1. Vértices do envelope convexo.

eixo-x( $\eta$ )	Valor	eixo-y ( $\epsilon$ )	Value	eixo-z ( $\delta$ )	Value
$x_1$	0,297	$y_1$	2,739	$z_1$	8,834
$x_2$	0,990	$y_2$	0,980	$z_2$	0,971
$x_3$	0,299	$y_3$	3,064	$z_3$	10,077
$x_4$	0,996	$y_4$	0,992	$z_4$	0,988
$x_5$	0,296	$y_5$	3,068	$z_5$	9,833
$x_6$	0,988	$y_6$	0,992	$z_6$	0,980
$x_7$	0,291	$y_7$	2,759	$z_7$	8,361
$x_8$	0,971	$y_8$	0,980	$z_8$	0,952
$x_9$	0,436	$y_9$	1,907	$z_9$	1,976
$x_{10}$	0,436	$y_{10}$	1,503	$z_{10}$	1,976

Como já mencionado,  $f(D', R_C, R)$  é uma função de três variáveis, e sua dependência de  $D'$  é muito mais acentuada que de outras variáveis. A ideia do envelope convexo é isolar e tratar separadamente a incerteza em  $D'$ .

Assim,  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  podem representar como um vértice em  $v$  no vetor de incerteza  $p$ , o que leva a um menor conservadorismo.

Outro parâmetro incerto pode ser individualmente incluído no vetor  $p$  como  $[R_C, R, C, v]$ , assumindo  $C \in [\underline{C}, \overline{C}]$ . Assim, o polítopo final tem  $L = 80$  vértices, considerando todas as possíveis combinações entre os vértices  $v$  e os valores extremos de cada parâmetro. Portanto, as incertezas em (5) podem ser tratadas da seguinte forma.

$$\mathcal{G}_1 = [A(p_1), B_\omega(p_1), \dots, D_u(p_1)] \quad (9)$$

em que  $p_1 = [R_C, \underline{R}, \underline{C}, v_1], \dots$

$$\mathcal{G}_{80} = [A(p_{80}), B_\omega(p_{80}), \dots, D_u(p_{80})] \quad (10)$$

em que  $p_{80} = [\overline{R_C}, \overline{R}, \overline{C}, v_{10}], \dots$

Vale ressaltar que as não-linearidades presentes na matriz de entrada não invalidam a cobertura politópica. Isto se deve ao fato que os parâmetros são estritamente crescentes ( $R_C$  e  $\eta$ ) ou estritamente decrescentes ( $\frac{1}{R}$ ,  $\frac{1}{C}$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ ). Portanto, todos os resultados possíveis para produtos e divisões estão incluídos no polítopo final formado pela combinação dos extremos.

### 3. CONTROLADOR $\mathcal{H}_\infty$ ROBUSTO COM RESTRIÇÕES

Deseja-se projetar um controlador robusto para regular a tensão de saída do conversor CC-CC *boost* de forma que não haja saturação do sinal de controle e as restrições nos estados sejam respeitadas. A síntese é realizada através da solução de um problema de otimização convexa com restrições LMI.

Considera-se o sistema descrito pelas equações no espaço de estado definido em (1). Supõe-se que as matrizes  $A$ ,  $B_u$ ,  $B_\omega$ ,  $C_z$ ,  $D_u$  e  $D_\omega$  pertencem ao seguinte polítopo convexo:

$$\mathcal{D} = \{(A, B_u, B_\omega, C_z, C_u, C_\omega) : (A, B_u, B_\omega, C_z, C_u, C_\omega)(\alpha) = \sum_{i=1}^L \alpha_i (A, B_u, B_\omega, C_z, C_u, C_\omega), \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \quad (11)$$

em que  $L$  é o número de vértices do polítopo.

Supõe-se que todos os pares  $(A, B_u)$  são estabilizáveis e que os vetores de estado e de controle estão sujeitos a restrições físicas.

O conjunto de estados admissíveis é definido pelo polítopo convexo:

$$D(g, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n; g_i^T x \leq \rho_i, i = 1, \dots, r\}, \quad (12)$$

em que  $g_i \in \mathbb{R}^n, g_i \neq 0, \rho > 0, i = 1, \dots, r$ .

Para as condições iniciais  $x_0 = x(t_0)$  admissíveis, considera-se um conjunto poliedral definido por:

$$D(g_0, \rho_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; g_0^T x_0 \leq \rho_0, i = 1, \dots, s\}, \quad (13)$$

em que  $g_0 \in \mathbb{R}^n, g_0 \neq 0, \rho_0 > 0, i = 1, \dots, s$ .

O sinal de controle  $u(t)$  pertence ao poliedro definido por:

$$D(h, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^m; h_i^T u \leq \mu_i, i = 1, \dots, p\}, \quad (14)$$

em que  $h_i \in \mathbb{R}^m, h_i \neq 0, \mu_i > 0, i = 1, \dots, p$ .

As perturbações devem pertencer ao seguinte conjunto:

$$D(\omega_0) = \{\omega \in \mathbb{R}^l; \|\omega\| \leq \omega_0\}, \quad (15)$$

em que  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclidiana. Assim, a perturbação  $\omega(t)$  está contida em uma hipersfera de raio  $\omega_0$ .

A lei de controle a ser projetada é dada por

$$u(t) = Kx(t), \quad (16)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . A partir de (14), o conjunto  $D(K, h, \mu)$

$$D(K, h, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^n; h_i^T Kx \leq \mu_i, i = 1, \dots, p\} \quad (17)$$

define a região na qual a saturação do sinal de controle não ocorre.

Em malha fechada, levando-se em consideração a ação integral no projeto do controlador por realimentação de estado, o sistema resultante é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_\omega \omega(t) + B_r r(t), \\ z(t) = C_f x(t) + D_\omega \omega(t), \end{cases} \quad (18)$$

em que  $r \in \mathbb{R}^m$  é a referência,  $A_f = A + B_u K, \forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_u \in \mathcal{D}_B$ , e  $C_f = C_z + D_u K$ . Para que as restrições nos estados e no controle sejam satisfeitas, o ganho  $K$  deve ser tal que os estados do sistema em malha fechada pertençam à região definida pela interseção  $D(g, \rho) \cap D(K, h, \mu)$ .

A função de transferência de malha fechada de  $\omega$  para  $z$  é dada por:

$$H_f(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_\omega + D_\omega. \quad (19)$$

Supondo-se que o ganho de realimentação  $K$  estabilizante satisfaz as restrições do sistema incerto (12) e (14), um limitante superior  $\gamma$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H_f(s)$  é usado como medida de desempenho (Zhou et al. (1995)):

$$\|H_f(s)\|_\infty = \sup_{\omega(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} < \gamma. \quad (20)$$

Caso haja solução, o seguinte problema de otimização convexa fornece o limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H_f(s)$  (Gahinet and Apkarian (1994)):

$$\begin{aligned} & \min_{W > 0} \gamma \\ & \text{s. a} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} A_{f_i} W & B_{\omega_i} & W C_{f_i}^T \\ B_{\omega_i}^T & -\gamma I & D_{\omega_i}^T \\ C_{f_i} W & D_{\omega_i} & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0.$$

$$i = 1, \dots, L.$$

Nota-se que  $A_{f_i}, B_{\omega_i}, C_{f_i} e D_{\omega_i}$  são calculadas com os vértices do polítopo de matrizes  $\mathcal{D}$  (11).

O problema de síntese robusta  $\mathcal{H}_\infty$  com custo garantido se resume então a encontrar um controlador estabilizante por realimentação de estado com ação integral que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H_f(s)$ , com domínio de incerteza politópico (11), satisfazendo as restrições (12) a (14), para qualquer perturbação admissível (15) e referência no domínio fechado

$$R(r_0) = \{r \in \mathbb{R}^l; \|r\| \leq r_0\}. \quad (22)$$

#### 3.1 Síntese do controlador $\mathcal{H}_\infty$ robusto

A síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  robusto que satisfaz as restrições nos estados e controle pode ser baseada no conceito de invariância positiva (Blanchini (1990)).

*Definição 1:* Sejam  $D$  um conjunto convexo e compacto que contém a origem e  $\Omega$  um conjunto não vazio.  $\Omega$  é chamado de conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18) se para todo estado inicial  $x(t_0) \in \Omega$  e

toda sequência de perturbação  $\omega(t) \in D(\omega_0)$ ,  $t \geq t_0$ , e referência  $r(t) \in R(r_0)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $x(t) \in \Omega$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Seja  $\mathcal{K}$  o conjunto de todos os ganhos que estabilizam assintoticamente o sistema com incertezas (18). Segue diretamente da Definição 1 que o ganho  $K \in \mathcal{K}$  é uma solução do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com custo garantido, respeitando as restrições (12) a (14), se

$$K = \arg \min \{ \gamma : \|H_f(s)\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathcal{K} \} \quad (23)$$

e existe um conjunto positivamente  $DR$ -invariante  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  associado ao sistema (18), com domínio de incerteza (11), tal que

$$D(g_0, \rho_0) \subseteq \Omega \subseteq D(g, \rho), \quad (24)$$

$$\Omega \subseteq D(K, h, \mu). \quad (25)$$

Considera-se o conjunto elipsoidal positivamente invariante

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : x^T W^{-1} x \leq 1, W \in \mathbb{R}^{n \times n}, W = W^T \succ 0 \}. \quad (26)$$

Com este conjunto invariante obtido a partir de uma função de Lyapunov quadrática, o seguinte teorema é proposto para a síntese do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições. Sejam  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, \bar{s}$ , os vértices do politopo  $D(g_0, \rho_0)$ .

**Teorema 1.** Sejam o sistema em malha fechada (18) com incertezas (11) e os conjuntos  $D(\omega_0)$  (15) e  $R(r_0)$  (22). Se  $(W, Y, \gamma, \sigma_i, \psi_i, \alpha_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , é a solução ótima do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\substack{W \succ 0, Y, \sigma_i > 0, \Psi_i > 0, \alpha_i > 0 \\ \text{s. a}}} \gamma \quad (27)$$

$$g_i^T W g_i \leq \rho_i^2, \quad i = 1, \dots, r; \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & W \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, \bar{s}; \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_i^2 & h_i^T Y \\ Y^T h_i & W \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma & B_{\omega i} & B_r & 0 \\ B_{\omega i}^T & -\sigma_i I & 0 & 0 \\ B_r^T & 0 & -\Psi_i I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \omega_0^2 + \psi_i r_0^2 - \alpha_i \end{bmatrix} \preceq 0; \quad (31)$$

$i = 1, \dots, L;$

$$\begin{bmatrix} A_i W + W A_i^T + B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T & B_{\omega i} & W C_{zi}^T + Y^T D_{ui}^T \\ & B_{\omega i}^T & D_{\omega i}^T \\ C_{zi} W + D_{ui} Y & D_{\omega i} & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0; \quad (32)$$

$i = 1, \dots, L,$

com  $\Sigma = A_i W + W A_i^T + B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T + \alpha_i W$ , então o ganho por realimentação de estado  $K = YW^{-1}$  é uma solução ótima do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com

restrições nos estados (12) e (13) e controle (14), e o limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é  $\gamma$ .

**Prova.** As LMIs (28) asseguram que o conjunto elipsoidal  $\Omega$  (26) está contido no politopo  $D(g, \rho)$  (12). Esta é uma condição necessária e suficiente, e sua demonstração baseada em considerações geométricas (Nesterov and Nemirovskii (1994)) é simples de ser feita e, portanto, será omitida.

O conjunto convexo  $\Omega$  contém o politopo convexo  $D(g_0, \rho_0)$  (13) se e somente se seus vértices estão contidos neste conjunto, ou seja:

$$v_i^T W^{-1} v_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, \bar{s}. \quad (33)$$

Utilizando-se o complemento de Schur (Boyd et al. (1994)), obtêm-se as LMIs (29).

De forma similar à condição (28), o conjunto  $\Omega$  está contido na região  $D(K, h, \mu)$  se e somente se:

$$(K^T h_i)^T W (K^T h_i) \leq \mu_i^2, \quad i = 1, \dots, p. \quad (34)$$

Substituindo-se  $K = YW^{-1}$  em (34), tem-se:

$$\mu_i^2 - h_i^T Y W^{-1} Y^T h_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (35)$$

As LMIs (30) podem ser obtidas a partir das desigualdades (35) utilizando-se o complemento de Schur.

Assim, se as LMIs (28) a (30) são factíveis então as condições (24) e (25) impostas ao conjunto  $\Omega$  são satisfeitas.

A  $DR$ -invariância positiva do conjunto  $\Omega$  definido em (26) é assegurada pelas desigualdades bilineares em  $\alpha_i$  e  $W$  (31).

Seja  $v(x) = x^T W^{-1} x$  uma função de Lyapunov associada ao sistema de malha fechada (18). A derivada de  $v(x)$  ao longo das trajetórias do sistema (18) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x^T (A_f^T W^{-1} + W^{-1} A_f) x + x^T W^{-1} B_\omega \omega + \\ &+ \omega^T B_\omega^T W^{-1} x + x^T W^{-1} B_r r + r^T B_r^T W^{-1} x \leq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Para demonstrar que  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18), é suficiente provar que  $\dot{v}(x) \leq 0$  para todo  $x$  na fronteira de  $\Omega$ , ou seja, satisfazendo  $x^T W^{-1} x = 1$ , e para todo  $r$  e  $\omega$  admissíveis. Assim, pode ser demonstrado que se  $\dot{v}(x) \leq 0$  para todo  $x, r$  e  $\omega$  tal que  $v(x) \geq 1$  e  $\omega \in D(\omega_0)$  e  $r \in R(r_0)$ , então  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18).

Portanto, se a desigualdade (36) é satisfeita para qualquer  $(x, r, \omega)$  tal que  $x^T W^{-1} x \geq 1$  e  $\omega^T \omega \leq \omega_0^2$  e  $r^T r \leq r_0^2$ , então  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18).

Utilizando-se o  $S$ -procedure (Yakubovich (1992)), esta condição pode ser modificada para outra sem restrições. Ou seja, se existem escalares  $\alpha > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $\psi > 0$ , para qualquer  $(x, r, \omega)$ , tais que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x^T (A_f^T W^{-1} + W^{-1} A_f) x + x^T W^{-1} B_\omega \omega + \\ &+ \omega^T B_\omega^T W^{-1} x + x^T W^{-1} B_r r + r^T B_r^T W^{-1} x + \\ &+ \alpha (x^T W^{-1} x - 1) + \sigma (\omega_0^2 - \omega^T \omega) + \psi (r_0^2 - r^T r) \leq 0, \end{aligned} \quad (37)$$

então  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18).

Com a transformação de variável  $\zeta = W^{-1}x$ , a desigualdade (37) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \omega \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_f W + W A_f^T + \alpha W & B_\omega & B_r \\ & B_\omega & \\ & B_r^T & \\ & & -\sigma I & 0 \\ & & 0 & \psi I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \omega \\ r \end{bmatrix} + \sigma \omega_0^2 + \psi r_0^2 - \alpha \leq 0. \quad (38)$$

A desigualdade (38) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_f W + W A_f^T + \alpha W & B_\omega & B_r & 0 \\ & B_\omega & & 0 \\ & B_r^T & & 0 \\ & 0 & & \sigma \omega_0^2 + \psi r_0^2 - \alpha \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (39)$$

Utilizando-se a mudança de variável  $Y = KW$  e levando-se em consideração as propriedades de convexidade das incertezas do sistema (18), a desigualdade (39) deve ser satisfeita em cada vértice do politopo (11), ou seja:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & B_{\omega i} & B_r & 0 \\ B_{\omega i}^T & -\sigma_i I & 0 & 0 \\ B_r^T & 0 & -\Psi_i I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \omega_0^2 + \psi_i r_0^2 - \alpha_i \end{bmatrix} \preceq 0; \quad (40)$$

$i = 1, \dots, L,$

em que  $\Sigma = A_i W + W A_i^T + B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T + \alpha_i W$ .

Desta forma, se existem escalares positivos  $\alpha_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , que satisfazem as desigualdades (40), então  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $DR$ -invariante associado ao sistema (18) uma vez que  $\Omega \subseteq D(g, \rho) \cap D(K, h, \mu)$  para  $K = YW^{-1}$ .

As LMIs (32) seguem diretamente de (21) com a mudança de variável  $KW = Y$  e determinam um limitante superior  $\gamma$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . ■

Para o projeto do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições aplicado ao conversor CC-CC *boost*, neste trabalho, o problema (27) é resolvido fazendo-se uma busca unidimensional considerando os  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , iguais. Nota-se que o problema (27) com os  $\alpha_i$  fixos pode ser resolvido como um problema de otimização convexa via LMIs.

### 3.2 Alocação de polos baseada em LMI

É sabido que a localização dos polos de malha fechada está associada com as características da resposta transitória do sistema. Assim, alocar os polos de malha fechada em uma região desejada do semiplano esquerdo pode-se conduzir um bom desempenho em relação aos transitórios. Uma região interessante  $S(\theta, \bar{r})$  é definida pela interseção entre um círculo  $|a \pm jb| < \bar{r}$  e um setor cônico  $b < a \cotg(\theta)$ . É possível demonstrar (Chiliali and Gahinet (1996)) que o sistema incerto definido por (1) e (11) é estabilizável por uma lei de controle  $u(t) = Kx(t)$ , com polos de malha fechada dentro da região  $S(\theta, \bar{r})$ , se existem uma matriz

definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in m \times n$  que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} -\bar{r}W & W A_i^T + Y^T B_{ui}^T \\ A_i W + B_{ui} Y & -\bar{r}W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(A_i W + W A_i^T + B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T) \\ \sin\theta(-A_i W + W A_i^T - B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T) \\ \sin\theta(A_i W - W A_i^T + B_{ui} Y - Y^T B_{ui}^T) \\ \cos\theta(A_i W + W A_i^T + B_{ui} Y + Y^T B_{ui}^T) \end{bmatrix} \preceq 0, i = 1, \dots, L, \quad (42)$$

e o ganho do controlador é dado por  $K = YW^{-1}$ . Desta forma, para o projeto do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições nos estados e controle e com alocação de polos, é suficiente resolver o problema (27) adicionando-se as restrições (41) e (42).

## 4. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Considerando-se os parâmetros nominais e incertos previamente definidos (Tabela 2) e o politopo formado por 80 vértices, o algoritmo de otimização é executado pelo *LMI toolbox* do MATLAB usando  $\alpha = 77$ ,  $\rho = 72000$  e  $\theta = 25^\circ$ . Estes valores foram determinados com simulações. As restrições nos estados e no controle estão definidas na Tabela 3. O controlador projetado é dado por:

$$K = [-0,6842 \quad -0,0925 \quad -19,9375], \quad (43)$$

com o custo garantido associado  $\gamma = 849,8096$ .

Tabela 2. Parâmetros do conversor.

Parâmetros	Valores
$R$	$[20;50] \Omega$
$D'$	$[0,3;1,0]$
$R_C$	$[0,2;0,6] \Omega$
$C$	$[96;120] \mu F$
$R_L$	$0,4 \Omega$
$L$	$240 \mu H$
$V_g$	$12V$
$V_o, V_{ref}$	$24V$
$f_s$	$100kHz$

Tabela 3. Restrições nos estados e no controle.

Parâmetros	Valores
$i_L$	$[-0,4;5,5] A$
$v_C$	$[0;32] V$
$\int e$	$[-1;1] V$
$D$	$[0,2;0,88]$

Tabela 4. Perturbações utilizadas.

Tempo (s)	0,16	0,24
$\tilde{i}_{load}(A)$	0,2	-0,2
$\tilde{v}_g(V)$	0,4	-0,2

### 4.1 Perturbação de corrente de carga $\tilde{i}_{load}$

Para avaliar a robustez do controlador projetado, são realizadas simulações do sistema de controle em malha

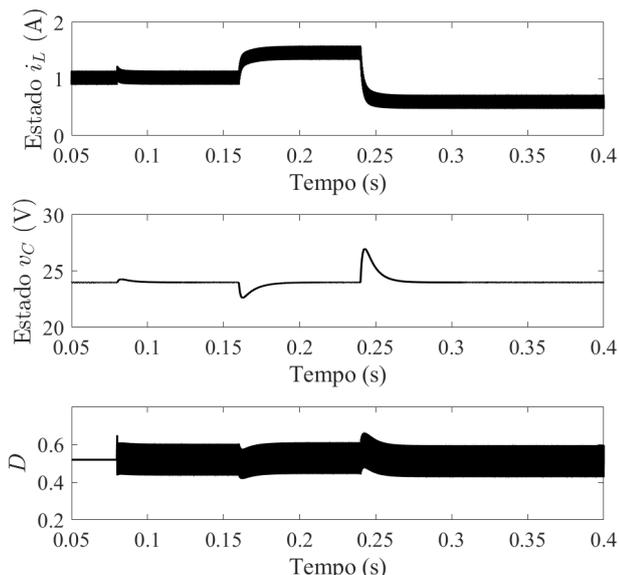


Figura 2. Estados e controle para perturbação de carga  $\dot{i}_{load} = [0, 2; -0, 2]$ .

fechada no ambiente SIMULINK/MATLAB. Inicialmente, o conversor está em um ponto de operação e o sistema de controle é ligado no instante  $t = 0,08s$ . Em  $t = 0,16s$  é adicionada a perturbação  $\dot{i}_{load} = 0,2A$ , e em  $t = 0,24s$  é adicionada a perturbação  $\dot{i}_{load} = -0,2A$ . Na Figura 2, pode-se observar o comportamento dos estados  $v_C$  e  $i_L$ , além do esforço de controle  $D$ . Verifica-se que os estados  $v_C$  e  $i_L$ , conforme previsto, respeitam as restrições descritas na Tabela 3, possuindo também um transitório rápido e adequado.

O comportamento da tensão de saída  $v_o$  e do estado  $\int erro$  pode ser visto na Figura 3. Percebe-se a regulação do sinal de saída e o estado da integral do erro dentro dos limites impostos.

#### 4.2 Perturbação de tensão de alimentação $\tilde{v}_g$

Neste caso, é analisado o comportamento do sistema diante de perturbações na tensão de alimentação do sistema  $\tilde{v}_g$ . Na Tabela 4 encontram-se os instantes em que acontecem as perturbações na tensão de alimentação do sistema. Na Figura 4, é ilustrado o comportamento dos estados  $i_L$  e  $v_C$  diante de variações na tensão de alimentação  $\tilde{v}_g$  do sistema, além do esforço de controle dado por  $D$ . O sinal de tensão de saída e a integral do erro face às perturbações no sinal de alimentação  $\tilde{v}_g$  podem ser vistos na Figura 5. Percebe-se que, mesmo diante de variações na tensão de alimentação, o sistema tem um bom desempenho, respeitando as restrições nos estados e no controle.

### 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi proposta uma nova abordagem para o projeto de controladores robustos com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , baseada em LMIs, com o objetivo de lidar com o modelo matemático mais próximo de situações práticas. Com esta abordagem é possível incorporar as restrições

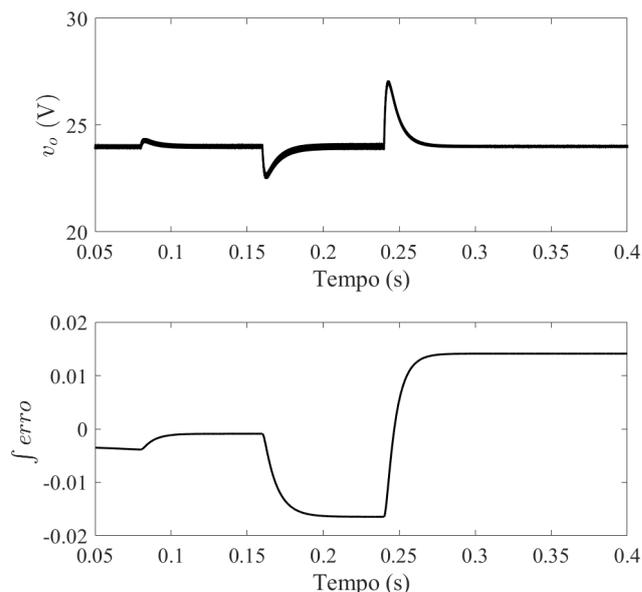


Figura 3. Saída e integral do erro para perturbação de carga  $\dot{i}_{load} = [0, 2; -0, 2]$ .

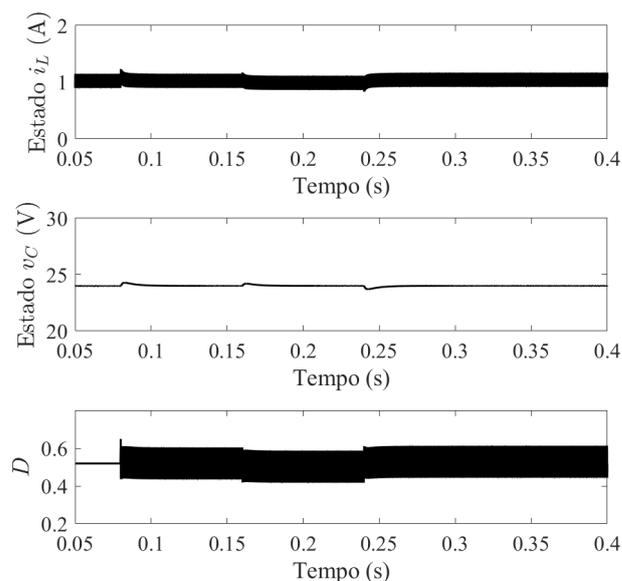


Figura 4. Estados e controle para perturbação na tensão de alimentação  $\tilde{v}_g = [0, 2; -0, 2]$ .

no sinal de controle e nos estados, além de tratar as incertezas paramétricas do tipo politopo. Essa abordagem foi validada com simulações. Nas simulações é possível verificar que as restrições nos estados e no controle são respeitadas pelo controlador projetado. Como trabalho futuro, deseja-se obter resultados experimentais com tal controlador.

### REFERÊNCIAS

Agorreta, J.L., Borrega, M., López, J., and Marroyo, L. (2011). Modeling and control of paralleled grid-connected inverters with lcl filter coupled due to grid

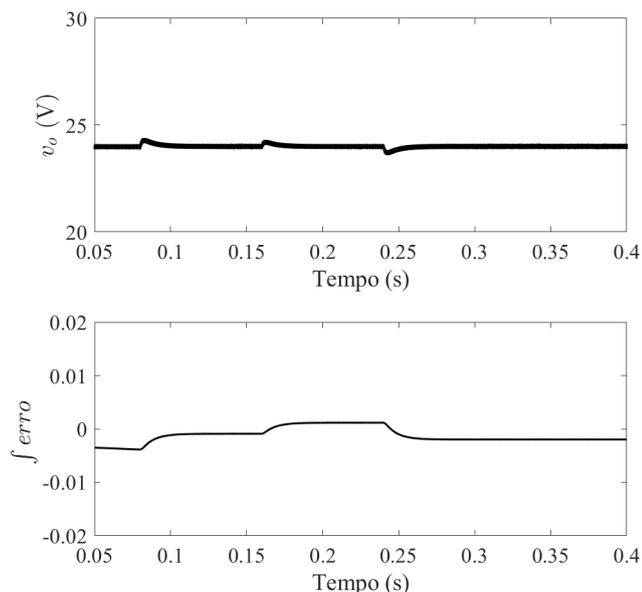


Figura 5. Saída e integral do erro para perturbação na tensão de alimentação  $\tilde{v}_g = [0, 2; -0, 2]$ .

impedance in pv plants. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 26(3), 770–785.

Blanchini, F. (1990). Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(11), 1231–1234.

Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Studies in Applied and Numerical Mathematics*. SIAM, Philadelphia.

Chang, H.C. and Liaw, C.M. (2009). Development of a compact switched-reluctance motor drive for ev propulsion with voltage-boosting and pfc charging capabilities. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(7), 3198–3215.

Chiliali, M. and Gahinet, P. (1996).  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 358–367.

de Brito, M.A.G., Galotto, L., Sampaio, L.P., Melo, G.A., and Canesin, C.A. (2013). Evaluation of the main mppt techniques for photovoltaic applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(3), 1156–1167.

Erikson, W. and Maksimovic, D. (1999). *Fundamentals of Power Electronics*. Klumer Academic Publishers, Massachusetts.

Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach  $H_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4, 421–448.

Khayat, Y., Naderi, M., Shafiee, Q., Batmani, Y., Fathi, M., and Bevrani, H. (2017). Robust control of a dc-dc boost converter:  $h_2$  and  $h_\infty$  techniques. In *2017 8th Power Electronics, Drive Systems Technologies Conference (PEDSTC)*, 407–412. doi:10.1109/PEDSTC.2017.7910360.

Li, R. and Shi, F. (2019). Control and optimization of residential photovoltaic power generation system with high efficiency isolated bidirectional dc-dc converter.

*IEEE Access*, 7, 116107–116122. doi:10.1109/ACCESS.2019.2935344.

Maccari-Jr., L.A., Montagner, V.F., Pinheiro, R., and Oliveira, R.C.L.F. (2012). Robust  $H_2$  control applied to boost converters: design, experimental validation and performance analysis. *IET Control Theory and Applications*, 6, 1881–1888.

Magalhães, C.S., Ordoñez, B., and Araújo, H.X. (2020). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for PWM boost converters subject to aging capacitor conditions. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 13378–13383. 21st IFAC World Congress.

Mohan, N. (2003). *Power Electronics Converters Applications and Design*. NJ: John Wiley Sons.

Na, W., Park, T., Kim, T., and Kwak, S. (2011). Light fuel-cell hybrid electric vehicles based on predictive controllers. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(1), 89–97.

Nesterov, Y. and Nemirovskii, A. (1994). *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics, PA, USA.

Olalla, C., Queinnec, I., Leyva, R., and El Aroudi, A. (2011). Robust optimal control of bilinear DC-DC converters. *Control Engineering Practice*, 19(7), 688–699.

Ollala, C., Leyva, R., Aroudi, A.E., and Quiennec, I. (2009). Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56, 2548–2558.

Ollala, C., Leyva, R., Aroudi, A.E., and Quiennec, I. (2011). Robust optimal control of bilinear DC-DC converters. *Control Engineering Practice*, 19, 688–699.

Oulad-Abbou, D., Doubabi, S., Rachid, A., García-Triviño, P., Fernández-Ramírez, L.M., Fernández-Ramírez, C.A., and Sarrias-Mena, R. (2018). Combined control of mppt, output voltage regulation and capacitors voltage balance for three-level dc/dc boost converter in pv- ev charging stations. In *2018 International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM)*, 372–376. doi:10.1109/SPEEDAM.2018.8445357.

Ramírez-Murillo, H., Restrepo, C., Konjedic, T., Calvente, J., Romero, A., Baier, C.R., and Giral, R. (2018). An efficiency comparison of fuel-cell hybrid systems based on the versatile buck-boost converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 33(2), 1237–1246. doi:10.1109/TPEL.2017.2678160.

Vieira, C. and Pires, V.F. (2016). Hybrid pv-ups system with multilevel structure of power converters and reliability improvement. In *2016 IEEE International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*, 873–878. doi:10.1109/ICRERA.2016.7884461.

Walker, G.R. and Sernia, P.C. (2002). Cascaded dc-dc converter connection of photovoltaic modules. In *2002 IEEE 33rd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference. Proceedings*, volume 1, 24–29 vol.1.

Yakubovich, V.A. (1992). Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic control problem with quadratic constraints. *Systems and Control Letters*, 19, 13–22.

Zhou, K., Doyle, J.C., and Glover, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey.